

# Problema de seguimiento de un conjunto de señales de referencia. Especificaciones de diseño del régimen permanente

Félix Monasterio-Huelin

12 de febrero de 2016

## Índice

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>1</b>
<b>1. Planteamiento del problema de seguimiento de señales de referencia</b>	<b>2</b>
<b>2. Ejemplos del problema de seguimiento con controladores P, P-D, PD y PI</b>	<b>4</b>
2.1. Controlador P . . . . .	5
2.2. Controlador P-D . . . . .	5
2.3. Controlador PD . . . . .	6
2.4. Controlador PI . . . . .	7
2.5. Especificaciones de diseño del régimen permanente del sistema de control realimentado con los controladores P, PD, P-D y PI . . . . .	8
<b>A. Transformadas <math>\mathcal{L}</math>- y <math>\mathcal{Z}</math> de funciones monómicas causales</b>	<b>9</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>10</b>

## Índice de Figuras

2.1. Controlador P para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno . . . . .	5
2.2. Controlador P-D para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno . . . . .	5
2.3. Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno . . . . .	6
2.4. Controlador PI para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno . . . . .	7

## Índice de Tablas

A.1. Números eulerianos $A(m, j)$ . . . . .	9
---	---

# 1. Planteamiento del problema de seguimiento de señales de referencia

El problema de seguimiento de una señal de referencia consiste en el estudio del comportamiento del sistema realimentado en el régimen permanente, es decir el estudio cuando  $t \rightarrow \infty$  de la señal de error  $e(t)$  ante diferentes señales de referencia.

Para analizar este problema suele ser suficiente con utilizar el teorema del valor final para obtener el error de régimen permanente  $e(\infty)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}_- \{e(t)\} \quad (1.1a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \{e(k)\} \quad (1.1b)$$

Estos teoremas son solo válidos cuando las señales  $e(t)$  y  $e(kT)$  son estables. En caso contrario no pueden ser aplicados.

La señal de error se define como

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (1.2a)$$

$$e(k) = r(k) - y(k) \quad (1.2b)$$

por lo que su función de transferencia es

$$H_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - H(s) \quad (1.3a)$$

$$H_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = 1 - H(z) \quad (1.3b)$$

donde  $H(s)$  y  $H(z)$  son las funciones de transferencia de lazo cerrado continuo y discreto respectivamente.

Podemos reescribir el teorema del valor final para el problema de seguimiento de sistemas de control realimentado estables, como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s (1 - H(s)) R(s) \quad (1.4a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) (1 - H(z)) R(z) \quad (1.4b)$$

Escribiremos  $H(s)$  y  $H(z)$  en la forma racional siguiente,

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1.5a)$$

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (1.5b)$$

donde  $N(s)$ ,  $D(s)$  y  $N(z)$ ,  $D(z)$  son polinomios coprimos en  $s$  y  $z$  respectivamente. Los polinomios del numerador son de grado  $m$  y los del denominador de grado  $n$ , con  $m \leq n$ , ya que admitimos que el sistema de lazo cerrado es causal.

De nuevo, podemos reescribir el teorema del valor final para el problema de seguimiento de sistemas de control realimentado estables, como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{D(s) - N(s)}{D(s)} R(s) \quad (1.6a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{D(z) - N(z)}{D(z)} R(z) \quad (1.6b)$$

Al representar las funciones de transferencia de lazo cerrado en la forma racional de dos polinomios en  $s$  o  $z$ , y teniendo en cuenta que los sistemas son causales, es decir, que el grado del polinomio del numerador es menor o igual que el grado del polinomio del denominador, podemos comprender que el tipo de sistema de  $H(s)$  o  $H(z)$ , es decir el número de polos en  $s = 0$  o  $z = 1$  que tengan  $H(s)$  o  $H(z)$ , tendrá mucha importancia para el problema de seguimiento.

Por ejemplo, supongamos que  $H(s)$  viene dado por,

$$H(s) = \frac{s + 7}{s^2(s + 5)} \quad (1.7)$$

entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^3 + 5s^2 - s - 7}{s^2(s + 5)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-7}{5s} R(s) \quad (1.8)$$

En este ejemplo, el tipo de sistema es dos, lo que ha permitido una cancelación del monomio  $s$  que aparece en el teorema del valor final.

Pero también puede comprenderse que la diferencia de los polinomios  $D(s) - N(s)$  o  $D(z) - N(z)$  jugará un papel, nada despreciable, en el problema de seguimiento.

Por ejemplo, supongamos que  $H(s)$  viene dado por,

$$H(s) = \frac{11s + 5}{(s + 1)^2(s + 5)} = \frac{11s + 5}{s^3 + 7s^2 + 11s + 5} \quad (1.9)$$

entonces  $D(s) - N(s) = s^2(s + 7)$ . Como consecuencia,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3(s + 7)}{s^3 + 7s^2 + 11s + 5} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{7s^3}{5} R(s) \quad (1.10)$$

En este ejemplo, el tipo de sistema es cero, pero al ser el numerador un “subpolinomio completo” del denominador, se ha logrado que en el numerador de  $1 - H(s)$  pueda extraerse como factor común un monomio en  $s$  de grado dos.

En lo que sigue se realizará el estudio del problema de seguimiento de señales monómicas, o en general, polinómicas. En el Apéndice A se recogen las transformadas  $\mathcal{L}_-$  y  $\mathcal{Z}$  de las funciones monómicas causales.

En el primer ejemplo, podemos comprobar con la relación 1.8 que  $e(\infty) = \infty$  para cualquier señal de referencia monómica causal  $r(t) = r_q(t)$ , pero en el segundo ejemplo, podemos comprobar con la relación 1.10 que

$$e(\infty) = \begin{cases} 0 & q < 2 & (1.11a) \\ \frac{7}{5} & q = 2 & (1.11b) \\ \infty & q > 2 & (1.11c) \end{cases}$$

donde

$$r_q(t) = \frac{1}{q!} t^q r_0(t) \quad (1.12a)$$

$$\mathcal{L}_- \{r_q(t)\} = \frac{1}{s^{q+1}} \quad (1.12b)$$

siendo  $r_0(t)$  la función escalón unidad,  $q \in \mathbb{N}$  y  $q!$  el factorial de  $q$ ,  $q! = q(q - 1) \cdots 1$ .

Por lo tanto, en el primer ejemplo no se resuelve el problema de seguimiento de las señales de referencia monómicas, pero en el segundo se resuelve para las señales escalón y rampa, y se resuelve parcialmente para la parábola, ya que se produce un error en régimen permanente finito y distinto de cero.

El objetivo de diseño del controlador para la resolución del problema de seguimiento de un conjunto de señales de referencia concretas, consiste, por lo tanto, en la obtención de una función de transferencia de lazo cerrado adecuada. En el último ejemplo se ha visto que la selección de los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado ha sido suficiente para resolver el problema de seguimiento, si las especificaciones de diseño del régimen permanente no exigen que se resuelva el

problema de seguimiento para señales monómicas de grado tres. Como consecuencia, podemos decir que **el problema de seguimiento consiste en un problema de asignación de ceros de la función de transferencia de lazo cerrado**.

Una conclusión que puede sacarse a partir del segundo ejemplo, es que es imposible resolver el problema de seguimiento con un error de régimen permanente nulo para cualquier señal de referencia si se ha elegido a priori un controlador.

En general, el problema de seguimiento, utilizando la técnica de asignación de ceros, se resuelve para señales de referencia monómicas de grado  $q < n_s + 1$ , donde  $n_s$  es el grado del “subpolinomio completo” del denominador que aparece en el numerador.

Por ejemplo, si se diseña un controlador de tal forma que la función de transferencia de lazo cerrado sea la siguiente,

$$H(s) = \frac{7s^2 + 11s + 5}{(s + 1)^2(s + 5)} = \frac{7s^2 + 11s + 5}{s^3 + 7s^2 + 11s + 5} \quad (1.13)$$

entonces,  $e(\infty) = 0$ , para  $q < 3$ .

Otro ejemplo. Supongamos que,

$$H(s) = \frac{23s^2 + 11s + 5}{(s + 1)^2(s + 5)} = \frac{23s^2 + 11s + 5}{s^3 + 7s^2 + 11s + 5} \quad (1.14)$$

entonces,  $e(\infty) = 0$ , para  $q < 2$ , ya que el “subpolinomio completo” es  $11s + 5$ .

Hay que tener en cuenta que un “subpolinomio completo” incluye los de grado cuyo coeficiente es nulo. Por ejemplo, si

$$H(s) = \frac{11s + 5}{s^3 + 11s + 5} \quad (1.15)$$

entonces  $n_s = 2$ .

En resumen, la selección de la estructura del controlador se convierte en un problema que afecta a la satisfacción de las especificaciones de régimen permanente, ya que no solo debe resolverse un problema de asignación de ceros, sino que debe seleccionarse un controlador que fije el orden mínimo del sistema de control realimentado de acuerdo con las especificaciones de régimen permanente.

La primera pregunta que debe responderse para resolver el problema de seguimiento con unas especificaciones de régimen permanente concretas, es la siguiente: ¿cuál debe ser el orden mínimo del sistema de control realimentado?

En la Sección siguiente veremos varios ejemplos donde se estudia el problema de seguimiento de un sistema de control realimentado con controladores P, PD, P-D y PI, para un sistema a controlar de orden dos, orden relativo dos y tipo uno.

## 2. Ejemplos del problema de seguimiento con controladores P, P-D, PD y PI

En esta Sección se va a analizar el problema de seguimiento de señales de referencia monómicas, de un sistema de control realimentado de un sistema de orden dos, orden relativo dos y tipo uno, con controladores P, PD, P-D y PI.

La función de transferencia del sistema a controlar la escribiremos en la forma

$$G(s) = \frac{K}{s(s + p)} \quad (2.1)$$

donde  $K, p \in \mathbb{R}^+$  son parámetros constantes y positivos del sistema.

## 2.1. Controlador P

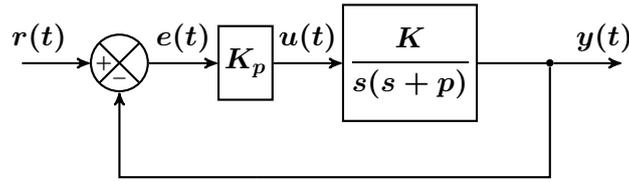


Figura 2.1: Controlador P para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 2.1 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional (P) donde el sistema a controlar es de segundo orden y de tipo uno. La función de transferencia de lazo cerrado  $H_P(s)$  tiene la forma,

$$H_P(s) = \frac{K_p K}{s^2 + ps + K_p K} \quad (2.2)$$

De acuerdo con las conclusiones de la Sección 1, y puesto que el numerador contiene un “subpolinomio completo” del denominador de grado  $n_s = 0$ , sabemos que solo se podrá resolver el problema de seguimiento para las señales monómicas de grado  $q < 1$ , es decir, solo para la señal de referencia escalón.

La función de transferencia del error tiene la forma,

$$H_{e,P}(s) = \frac{s(s+p)}{s^2 + ps + K_p K} \quad (2.3)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+p)}{s^2 + ps + K_p K} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 p}{K_p K} R(s) \quad (2.4)$$

Vemos que el error de régimen permanente para una señal de referencia escalón es nulo, mientras que es finito para la señal de referencia rampa.

En [1] se demuestra que

$$\omega_n = \sqrt{K K_p} \quad (2.5a)$$

$$p = 2\zeta\omega_n \quad (2.5b)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural de un sistema de orden dos.

El error a la rampa puede ser escrito en la forma,

$$e_{P,1}(\infty) = \frac{4\zeta^2}{p} \quad (2.6)$$

## 2.2. Controlador P-D

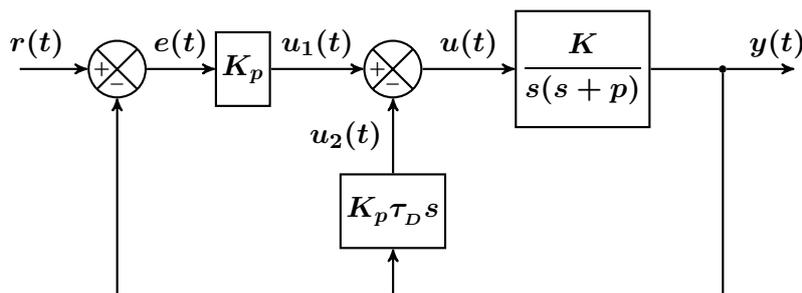


Figura 2.2: Controlador P-D para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 2.2 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador de tipo PD con el factor proporcional en el lazo directo y el factor derivativo en el lazo paralelo. Utilizaremos la notación P-D para esta clase de controladores.

Este sistema de control tiene una función de transferencia de lazo cerrado  $H_{P-D}(s)$  que coincide con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden, de la misma forma que con el controlador P, pero a diferencia de este tiene dos parámetros de diseño  $(K_p, \tau_D)$ ,

$$H_{P-D}(s) = \frac{K_p K}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (2.7)$$

De acuerdo con las conclusiones de la Sección 1, y puesto que el numerador contiene un “subpolinomio completo” del denominador de grado  $n_s = 0$ , sabemos que solo se podrá resolver el problema de seguimiento para las señales monómicas de grado  $q < 1$ , es decir, solo para la señal de referencia escalón.

La función de transferencia del error tiene la forma,

$$H_{e,P-D}(s) = \frac{s(s + p + K_p K \tau_D)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (2.8)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s + p + K_p K \tau_D)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 (p + K_p K \tau_D)}{K_p K} R(s) \quad (2.9)$$

Vemos que el error de régimen permanente para una señal de referencia escalón es nulo, mientras que es finito para la señal de referencia rampa.

En [1] se introduce el parámetro de diseño  $\beta_2$  tal que  $p = \beta_2 \zeta \omega_n$  y se demuestra que

$$\omega_n = \sqrt{K K_p} \quad (2.10a)$$

$$\tau_D = \frac{\zeta(2 - \beta_2)}{\omega_n} \quad (2.10b)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural de un sistema de orden dos.

El error a la rampa puede ser escrito en la forma,

$$e_{P-D,1}(\infty) = \frac{2\beta_2 \zeta^2}{p} \quad (2.11)$$

### 2.3. Controlador PD

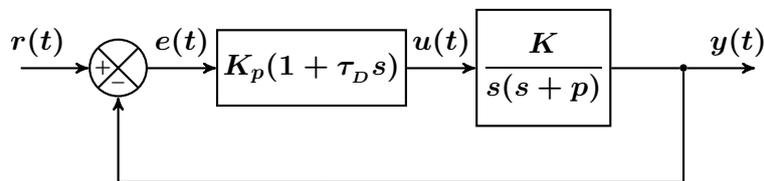


Figura 2.3: Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 2.3 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional-Derivativo (PD) ideal. La función de transferencia de lazo cerrado  $H_{PD}(s)$  tiene la forma

$$H_{PD}(s) = \frac{K_p K (1 + \tau_D s)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (2.12)$$

De acuerdo con las conclusiones de la Sección 1, y puesto que el numerador contiene un “subpolinomio completo” del denominador de grado  $n_s = 0$  ( $K K_p$ ), sabemos que solo se podrá resolver

el problema de seguimiento para las señales monómicas de grado  $q < 1$ , es decir, solo para la señal de referencia escalón.

La función de transferencia del error tiene la forma,

$$H_{e,PD}(s) = \frac{s(s+p)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (2.13)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+p)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 p}{K_p K} R(s) \quad (2.14)$$

Vemos que el error de régimen permanente para una señal de referencia escalón es nulo, mientras que es finito para la señal de referencia rampa.

En [1] se introduce el parámetro de diseño  $\beta_2$  tal que  $p = \beta_2 \zeta \omega_n$  y se demuestra que

$$\omega_n = \sqrt{K K_p} \quad (2.15a)$$

$$\tau_D = \frac{\zeta(2 - \beta_2)}{\omega_n} \quad (2.15b)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural de un sistema de orden dos.

El error a la rampa puede ser escrito en la forma,

$$e_{PD,1}(\infty) = \frac{\beta_2^2 \zeta^2}{p} \quad (2.16)$$

## 2.4. Controlador PI

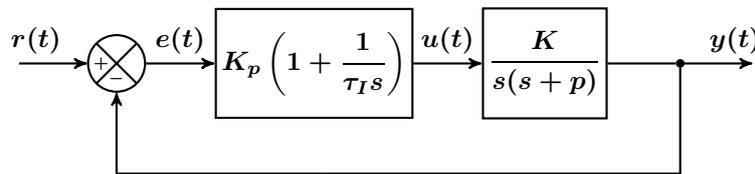


Figura 2.4: Controlador PI para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 2.4 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional-Integral (PI). La función de transferencia de lazo cerrado  $H_{PI}(s)$  tiene la forma

$$H_{PI}(s) = \frac{K_p K \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + K_p K \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} \quad (2.17)$$

De acuerdo con las conclusiones de la Sección 1, y puesto que el numerador contiene un “subpolinomio completo” del denominador de grado  $n_s = 1$ , sabemos que solo se podrá resolver el problema de seguimiento para las señales monómicas de grado  $q < 2$ , es decir, solo para las señales de referencia escalón y rampa.

La función de transferencia del error tiene la forma,

$$H_{e,PI}(s) = \frac{s^2(s+p)}{s^2(s+p) + K_p K \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} \quad (2.18)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e_{PI}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2(s+p)}{s^2(s+p) + K_p K \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_I p s^3}{K_p K} R(s) \quad (2.19)$$

Vemos que el error de régimen permanente para señales de referencia escalón y rampa son nulos, mientras que para una señal de referencia parabólica es finito, de valor

$$e_{PI,2}(\infty) = \frac{\tau_I p}{K_p K} \quad (2.20)$$

Introduciendo el parámetro de diseño  $\beta_2$  tal que  $p = \beta_2 \zeta \omega_n$ , puede demostrarse que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K K_p}{2(\beta_2 - 2)\zeta^2 + 1}} \quad (2.21a)$$

$$\tau_I = \frac{\zeta \left( 2 + \frac{1}{(\beta_2 - 2)\zeta^2} \right)}{\omega_n} \quad (2.21b)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural de un sistema de orden dos.

El error a la parábola puede ser escrito en la forma

$$e_{PI,2}(\infty) = \frac{\beta_2^3 \zeta^2}{p^2 (\beta_2 - 2)} \quad (2.22)$$

## 2.5. Especificaciones de diseño del régimen permanente del sistema de control realimentado con los controladores P, PD, P-D y PI

En los ejemplos anteriores se ha demostrado que si la especificación de régimen permanente exige que el error a la rampa sea nulo, no puede ser elegido un sistema de control realimentado con controladores P, PD o P-D, pero sí podría ser elegido con un controlador PI.

Si la especificación de régimen transitorio no fuese tan exigente, sino que fuese que el error a la rampa sea finito, pero con un valor  $e_1(\infty) \leq K_{e1}$ , donde  $K_{e1}$  sea una constante prefijada, sería necesario estudiar las relaciones 2.6, 2.11 y 2.16, a partir de las cuales se obtendría una relación de posibles valores de  $\zeta$  y  $\beta_2$ . Por ejemplo, si se define  $K_{e1} = 2/p$ , entonces,

$$\zeta^2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{Controlador P} \quad (2.23a)$$

$$\beta_2 \zeta^2 \leq 1 \quad \text{Controlador P-D} \quad (2.23b)$$

$$\beta_2^2 \zeta^2 \leq 2 \quad \text{Controlador PD} \quad (2.23c)$$

## A. Transformadas $\mathcal{L}_-$ y $\mathcal{Z}$ de funciones monómicas causales

La Transformada  $\mathcal{L}_-$  de las funciones monómicas causales  $t^m r_0(t)$  con  $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$  es la siguiente:

$$\mathcal{L}_- \{t^m r_0(t)\} = \frac{m!}{s^{m+1}} \quad (\text{A.1})$$

La Transformada  $\mathcal{Z}$  de las funciones monómicas causales  $k^m r_0(k)$  con  $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$  es la siguiente:

$$\mathcal{Z} \{k^m r_0(k)\} = \frac{z \sum_{j=0}^{m-1} A(m, j) z^j}{(z-1)^{m+1}} \quad (\text{A.2})$$

siendo  $A(m, j)$  los números eulerianos definidos a continuación.

Los números eulerianos satisfacen la ecuación recursiva

$$A(m, j) = jA(m-1, j) + mA(m, j-1) \quad (\text{A.3})$$

que explícitamente tienen la forma

$$A(m, j) = \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (j-i+1)^m \quad (\text{A.4})$$

donde  $\binom{m+1}{i}$  representa el coeficiente binomial,  $\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$ .

En la Tabla A.1 se muestran algunos valores del triángulo de números eulerianos.

m	0	1	2	3	4
0	1				
1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1

Tabla A.1: Números eulerianos  $A(m, j)$

## Bibliografía

- [1] F. Monasterio-Huelin, *Sistemas de segundo orden: especificaciones de diseño del régimen transitorio. Controladores P, PD y P-D*, 2016. [Online]. Available: <http://roboLABO.etsit.upm.es>