

SECO 2014-III ([1, 2])

Félix Monasterio-Huelin y Álvaro Gutiérrez

16 de marzo de 2014

Índice

Índice	50
Índice de Figuras	50
Índice de Tablas	50
16. Estabilidad de sistemas lineales	51
17. Sistemas de segundo orden oscilatorios continuos y discretos. Transformadas de Laplace y \mathcal{Z} de funciones trigonométricas	52
17.1. Relación entre los sistemas de segundo orden oscilatorios continuos y discretos	54
18. Estabilidad de polinomios	55
18.1. Tabla de Routh para el análisis de la estabilidad de polinomios en el sentido de Hurwitz	56
18.2. Transformación w para el análisis de la estabilidad de polinomios en el sentido de Schur	60
19. Intervalo de estabilidad de la constante K_p de un controlador Proporcional de un sistema de control realimentado. Selección del periodo de muestreo	62
B. Sistemas oscilatorios continuos y discretos	68
B.1. Sistema de segundo orden oscilatorio continuo	68
B.2. Sistema de segundo orden oscilatorio discreto	68
C. Cálculo de $\mathcal{Z} \left\{ \frac{p}{s^2(s+p)} \right\}$	70
Bibliografía	71

Índice de Figuras

13.	Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos oscilatorio libre y contribución de las condiciones iniciales $[y(0^-), \dot{y}(0^-)]$ en el caso particular de $\omega_n = 12\pi$, $[y(0^-), \dot{y}(0^-)] = [2, 100]$	53
14.	Características de la transformación $z = \frac{w+1}{w-1}$. (a) Plano z (b) Plano w	61
15.	Controlador Proporcional en una estructura de Control de Lazo Directo Continuo	62
16.	Controlador Proporcional en una estructura de Control de Lazo Directo Híbrido	63
17.	Controlador Proporcional en una estructura de Control de Lazo Directo Discreto	64
18.	Curvas de los coeficientes de la ecuación característica $w^2 + c_1w + c_2 = 0$	66
19.	Curvas de $c'_2(T)$ para diferentes valores de α	67

Índice de Tablas

5.	Transformadas \mathcal{L} y \mathcal{Z} de las funciones trigonométricas	54
----	--	----

16. Estabilidad de sistemas lineales

Consideremos la ecuación diferencial que representa al péndulo simple amortiguado libre (entrada nula):

$$\ddot{\theta}(t) + 2\alpha\dot{\theta}(t) + \omega_n^2 \sin \theta(t) = 0 \quad (16.1)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de atenuación, $\omega_n \in \mathbb{R}$ la frecuencia natural y $\theta(t) \in \mathbb{R}$ la posición angular.

Los puntos de equilibrio de un sistema se obtienen anulando las derivadas en la situación no forzada o libre, es decir con una entrada nula. En el caso del péndulo son las soluciones de la ecuación

$$\sin \theta(t) = 0 \quad (16.2)$$

Podemos ver que la ecuación de equilibrio 16.2 tiene dos soluciones:

$$\theta = 2n\pi \quad (16.3a)$$

$$\theta = (2n + 1)\pi \quad (16.3b)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$.

La estabilidad se define para cada uno de los puntos de equilibrio. El péndulo simple es un sistema no lineal con dos puntos de equilibrio. La posición vertical “hacia abajo” $\theta = 0$ es estable, mientras que la posición “hacia arriba” $\theta = \pi$ es inestable: una pequeña perturbación de la posición de equilibrio provoca que el péndulo no retorne a la posición “hacia arriba” pero sí lo haga a la posición “hacia abajo”. Sin embargo cuando el coeficiente de atenuación es nulo, $\alpha = 0$, la salida ante una pequeña perturbación es oscilatoria sin amortiguación, por lo que cualquier punto de equilibrio sería inestable.

Los sistemas lineales solo tienen un punto de equilibrio $y = 0$ siendo $y(t)$ la salida. Por esta razón suele hablarse de estabilidad del sistema lineal. Si los movimientos del péndulo simple se hacen en las proximidades del punto de equilibrio estable, es decir para $\theta(t) \approx 0$, se comportará como un sistema lineal haciendo $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$, dado por la ecuación de segundo orden

$$\ddot{\theta}(t) + 2\alpha\dot{\theta}(t) + \omega_n^2 \theta(t) = 0 \quad (16.4)$$

Hay diversas definiciones del concepto de estabilidad. La idea de provocar un movimiento a la salida introduciendo una pequeña perturbación a la entrada de un sistema es probablemente la más intuitiva. Es la idea de la definición de estabilidad de Lyapunov.

Otra es la que llamaremos estabilidad de entrada/salida acotada (BIBO en inglés: Bounded Input Bounded Output) que definimos de la siguiente forma. Diremos que un sistema es BIBO-estable si para una entrada acotada su salida permanece acotada. En caso contrario, es decir si para una entrada acotada su salida no está acotada diremos que el sistema es inestable.

Ambas definiciones son equivalentes en el caso de los sistemas lineales, a excepción de la situación en que la salida sea oscilatoria sin amortiguación o

sin atenuación ($\alpha = 0$). Según la definición de estabilidad de Lyapunov esta situación sería inestable, mientras que según la definición de estabilidad BIBO sería estable. En este caso diremos que el sistema es críticamente estable.

En la Sección 10 de la Parte I[1] se estudió la interpretación física de los polos de un sistema lineal. Se vió con un ejemplo de un sistema de primer orden que ante una entrada nula y condiciones iniciales no nulas el sistema tiene una salida no nula que define al polo del sistema (relación 10.15 de la Parte I[1]):

$$Y(s) = \frac{\alpha_0}{s - p} \quad (16.5)$$

donde $\alpha_0 = y(0^-)$.

La salida en el dominio del tiempo es,

$$y(t) = y(0^-)e^{pt}r_0(t) \quad (16.6)$$

donde $r_0(t)$ es la función escalón unidad.

Cuando $p < 0$ la salida tiende al punto de equilibrio $y = 0$, mientras que para $p \geq 0$ la salida tiende al infinito $y \rightarrow \infty$ o a una constante $y(0^-)$. Por lo tanto un sistema de primer orden es estable cuando $p < 0$ y es inestable en caso contrario según la definición de Lyapunov. Sin embargo será BIBO-estable para $p = 0$ ya que la entrada $u(t) = 0$ está acotada y la salida también. Este es el caso en que el sistema tiene un polo en el origen $s = 0$. En lo que sigue consideraremos que en este caso el sistema es estable.

La conclusión importante que debemos sacar es que los polos de un sistema lineal caracterizan la estabilidad del sistema. Esto es cierto para cualquier sistema lineal de orden n . Por lo tanto, las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia de un sistema caracterizan la estabilidad del sistema.

17. Sistemas de segundo orden oscilatorios continuos y discretos. Transformadas de Laplace y \mathcal{Z} de funciones trigonométricas

En los Apéndices B.1 y B.2 se estudian los sistemas continuo y discreto dados por las ecuaciones

$$\ddot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0 \quad (17.1a)$$

$$y(k+2) - 2\cos(\omega_n T)y(k+1) + y(k) = 0 \quad (17.1b)$$

donde $T \in \mathbb{R}^+$ es el periodo de muestreo, $\omega_n \in \mathbb{R}^+$ es la frecuencia natural e $y(t), y(kT) \in \mathbb{R}$ la salida de los sistemas continuo y discreto respectivamente.

Los polos del sistema continuo son $s = \pm j\omega_n$ y los del sistema discreto $z = e^{\pm j\omega_n T}$. Podemos observar que satisfacen la relación $z = e^{sT}$ estudiada en la Sección 12 de la Parte II[2].

Las salidas de estos sistemas vienen dadas por las ecuaciones B.5 y B.14,

$$y(t) = \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + y(0^-) \cos(\omega_n t) \quad (17.2a)$$

$$y(k) = \frac{y(T)}{\sin(\omega_n T)} \sin(k\omega_n T) - \frac{y(0)}{\sin(\omega_n T)} \sin((k-1)\omega_n T) \quad (17.2b)$$

Podemos ver que ambos tienen un comportamiento oscilatorio no amortiguado, como se muestra en la Figura 13 para el caso continuo, por lo que son sistemas críticamente estables.

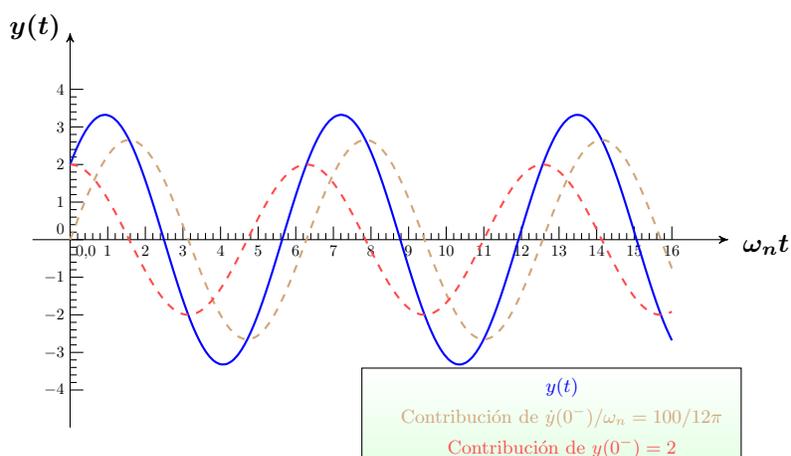


Figura 13: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos oscilatorio libre y contribución de las condiciones iniciales $[y(0^-), \dot{y}(0^-)]$ en el caso particular de $\omega_n = 12\pi$, $[y(0^-), \dot{y}(0^-)] = [2, 100]$

Demostraremos a continuación que 17.1b es una discretización exacta de 17.1a. Como consecuencia la Figura 13 también representa al sistema discreto haciendo $t = kT$ y sustituyendo $\dot{y}(0^-)$ por la expresión 17.4 que se demuestra a continuación.

En la Tabla 5 se recogen las Transformadas de Laplace y \mathcal{Z} de las funciones trigonométricas calculadas en los Apéndices B.1 y B.2.

Transformada \mathcal{L}	Función causal ($t = kT$)	Transformada \mathcal{Z}
$\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$	$\sin(\omega_n t)$	$\frac{z \sin(\omega_n T)}{z^2 - 2 \cos(\omega_n T)z + 1}$
$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$	$\cos(\omega_n t)$	$\frac{z(z - \cos(\omega_n T))}{z^2 - 2 \cos(\omega_n T)z + 1}$

Tabla 5: Transformadas \mathcal{L} y \mathcal{Z} de las funciones trigonométricas

17.1. Relación entre los sistemas de segundo orden oscilatorios continuos y discretos

Puede ser interesante expresar la ecuación 17.2b en función de senos y cosenos. Teniendo en cuenta que $\sin((k-1)\omega_n T) = \sin(k\omega_n T) \cos(\omega_n T) - \cos(k\omega_n T) \sin(\omega_n T)$

$$y(k) = \frac{y(T) - y(0) \cos(\omega_n T)}{\sin(\omega_n T)} \sin(k\omega_n T) + y(0) \cos(k\omega_n T) \quad (17.3)$$

Si contrastamos la ecuación 17.3 con la salida del sistema continuo 17.2a podemos observar que $y(k)$ es una discretización exacta de $y(t)$ donde

$$\dot{y}(0^-) = \frac{y(T) - y(0^-) \cos(\omega_n T)}{\sin(\omega_n T)} \omega_n \quad (17.4)$$

Puede comprobarse que esto es así haciendo $t = T$ en la ecuación 17.2a.

Para valores de T muy pequeños podemos utilizar la aproximación $\sin(\omega_n T) \approx \omega_n T$ y $\cos(\omega_n T) \approx 1$, en cuyo caso se obtiene la aproximación de Euler de la derivada:

$$\dot{y}(0^-) \approx \frac{y(T) - y(0^-)}{T} \quad (17.5)$$

18. Estabilidad de polinomios

Diremos que un polinomio $P(s)$ de grado n de la forma

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (18.1)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{C}$ es **estable en el sentido de Hurwitz**, si las raíces de la ecuación

$$P(s) = 0 \quad (18.2)$$

tienen parte real negativa distinta de cero.

Diremos que el polinomio 18.1 es críticamente estable cuando la parte real de las raíces de la ecuación 18.2 son nulas, es decir cuando las raíces son imaginarias puras. Puesto que el Teorema Fundamental del Algebra demuestra que las ecuaciones polinómicas de grado n tienen n raíces, y que cuando sus coeficientes son reales, $a_i \in \mathbb{R}$ sus raíces son reales o complejas conjugadas, entonces un polinomio solo puede ser críticamente estable si su grado n es par.

Diremos que un polinomio $P(z)$ de grado n de la forma

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (18.3)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ es **estable en el sentido de Schur**, si las raíces de la ecuación

$$P(z) = 0 \quad (18.4)$$

tienen módulo menor que la unidad.

Diremos que el polinomio 18.3 es críticamente estable cuando el módulo de las raíces de la ecuación 18.4 es la unidad.

Diremos que los polinomios 18.1 o 18.3 son inestables si no son estables ni críticamente estables.

Por extensión diremos que una raíz concreta de las ecuaciones 18.2 o 18.4 es estable, críticamente estable o inestable.

Estas definiciones de estabilidad parecen exigir el cálculo de las raíces, sin embargo esto no es realmente necesario ya que es suficiente con aplicar algún test que verifique la condición de estabilidad. El test de Routh, que enunciamos a continuación, cumple este objetivo, además de que aporta información sobre la ubicación de las raíces en el plano complejo.

Una de las razones para utilizar métodos que no exijan el cálculo de raíces es el hecho de que los polinomios de grado mayor o igual al quinto no se pueden resolver por radicales (no hay expresión algebraica¹), salvo en casos particulares. Este hecho matemático exigiría utilizar métodos numéricos para el cálculo de las raíces y estos métodos siempre dan resultados aproximados por lo que en ocasiones son inaceptables.

¹Teorema de Abel-Ruffini y de Galois

18.1. Tabla de Routh para el análisis de la estabilidad de polinomios en el sentido de Hurwitz

Dado el polinomio 18.1, con $a_n \neq 0$,

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (18.5)$$

construimos la Tabla de Routh a partir de los coeficientes a_i , de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} s^n : \\ s^{n-1} : \\ s^{n-2} : \\ s^{n-3} : \\ s^{n-4} : \\ \vdots \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{llll} 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right. \quad (18.6)$$

donde los coeficientes b_i, c_i, d_i (y sucesivos) se calculan de la siguiente forma:

$$b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_{2i+1}}{a_1} = - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_{2i} \\ a_1 & a_{2i+1} \end{bmatrix}}{a_1} \quad (18.7a)$$

$$c_i = \frac{b_1 a_{2i+1} - a_1 b_{i+1}}{b_1} = - \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_{2i+1} \\ b_1 & b_{i+1} \end{bmatrix}}{b_1} \quad (18.7b)$$

$$d_i = \frac{c_1 b_{i+1} - b_1 c_{i+1}}{c_1} = - \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & b_{i+1} \\ c_1 & c_{i+1} \end{bmatrix}}{c_1} \quad (18.7c)$$

La columna de la izquierda es solo indicativa. Entenderemos que la primera columna de la izquierda de la Tabla es la de coeficientes $1, a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$.

Puede observarse que estamos suponiendo que los coeficientes de la primera columna de la izquierda son distintos de cero. En caso contrario los coeficientes sucesivos serían infinitos (salvo cancelaciones). Veremos enseguida como construir la Tabla de Routh en estos casos especiales.

La Tabla de Routh debe completarse con ceros a la derecha de cada fila.

El Teorema de Routh afirma dos cosas:

1. El polinomio $P(s)$ es estable en el sentido de Hurwitz si todos los coeficientes de la primera columna son positivos
2. El número de raíces positivas o con parte real positiva de $P(s) = 0$ coincide con el número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna.

Si el polinomio tuviese raíces complejas con parte real positiva deberán aparecer en pares conjugados por lo que habrá dos cambios de signo, pero el hecho de que haya dos cambios de signo no implica que sean complejas. Pueden ser dos raíces reales positivas. Tampoco indica este teorema el orden de multiplicidad de la raíces, ni permite saber si el polinomio es críticamente estable (raíces en el eje imaginario). Sin embargo puede conocerse esta información cuando una fila completa se hace nula, como vamos a ver a continuación.

Cada fila de grado j -ésimo (fila s^j) de la Tabla puede representarse como un polinomio de grado s^j llamado polinomio auxiliar. Por ejemplo la primera fila puede representarse por el polinomio $P_n(s)$ y la segunda por el polinomio $P_{n-1}(s)$, de tal forma que $P(s) = P_n(s) + P_{n-1}(s)$,

$$P_n(s) = s^n + a_2s^{n-2} + a_4s^{n-4} + \dots \quad (18.8a)$$

$$P_{n-1}(s) = a_1s^{n-1} + a_3s^{n-3} + a_5s^{n-5} + \dots \quad (18.8b)$$

y en general el polinomio auxiliar asociado a la fila de grado j -ésimo (fila s^j) tiene la forma

$$P_j(s) = f_{j1}s^j + f_{j2}s^{j-2} + f_{j3}s^{j-4} + \dots \quad (18.9)$$

donde f_{ji} son los coeficientes de la fila de grado j -ésimo.

A continuación se explica cómo construir la Tabla de Routh en dos casos especiales.

1. Filas nulas.

Puede demostrarse que $P_j(s) = 0$ si y solamente si las ecuaciones $P(s) = 0$ y $P_{j-1} = 0$ tienen las mismas raíces radiales, es decir raíces simétricas son respecto al origen en el plano complejo. En este caso el polinomio P_{j-1} es par por lo que la ecuación $P_{j-1}(s) = 0$ tiene raíces opuestas, reales o complejas.

En este caso la fila nula puede sustituirse por otro polinomio $P'_j(s)$ y continuar construyendo la Tabla normalmente donde

$$P'_j(s) = \frac{dP_{j-1}(s)}{ds} \quad (18.10)$$

Una vez construida la Tabla debemos saber que las raíces radiales imaginarias no producen cambios de signo, pero las radiales reales y complejas sí, por lo que puede saberse si $P(s)$ es críticamente estable o inestable. Cuando las raíces radiales son complejas (con parte real no nula) deberán aparecer de cuatro en cuatro ya que debe haber a su vez raíces complejas conjugadas. En este caso dos de ellas serán inestables. Por ejemplo el polinomio $P(s) = s^4 + 4$ cumple esta condición. Para comprobarlo puede hacerse el cambio de variables $v = s^2$. Entonces $P(v) = v^2 + 4 = (v + j2)(v - j2)$. Por lo tanto $s^2 = \pm 2j$. Haciendo $s = \sigma + j\omega$, elevando al cuadrado e igualando a $\pm 2j$ se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \omega^2 \\ \sigma\omega &= \pm 1 \end{aligned} \quad (18.11)$$

y de aquí las cuatro raíces radiales, $(\pm 1 \pm j)$.

Consideremos el polinomio

$$P(s) = s^2 + 4 = (s + j2)(s - j2) \quad (18.12)$$

Su Tabla de Routh es

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{l} 1 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \\ ? \end{array} \right. \quad (18.13)$$

Vemos que $P_1(s) = 0$, por lo que $P(s) = 0$ tendrá raíces radiales. Como el polinomio auxiliar $P_2(s) = s^2 + 4$ entonces su derivada con respecto a s es $P_1'(s) = 2s$ por lo que la Tabla queda en la forma:

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{l} 1 \quad 4 \\ 2 \quad 0 \\ 4 \quad 0 \end{array} \right. \quad (18.14)$$

Podemos observar que no hay cambios de signo en la primera columna, pero como se había producido una fila nula debemos sacar la conclusión de que las raíces radiales deben ser imaginarias, y en consecuencia el polinomio es críticamente estable.

En lo sucesivo escribiremos las dos tablas anteriores 18.13 y 18.15 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{l} 1 \quad 4 \\ 0; 2 \quad 0 \\ 4 \quad 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} P_2(s) = s^2 + 4 \\ P_1(s) = 0; P_1'(s) = 2s \end{array} \right. \quad (18.15)$$

Veamos algunos ejemplos de ecuaciones con raíces radiales.

1.i) Sea el polinomio

$$P(s) = s^3 - s^2 + 4s - 4 = (s^2 + 4)(s - 1) \quad (18.16)$$

La ecuación $P(s) = 0$ tiene dos raíces en el eje imaginario y una raíz real inestable.

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{l} 1 \quad 4 \\ -1 \quad -4 \\ 0; -2 \quad 0 \\ -4 \quad 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} P_2(s) = -s^2 - 4 \\ P_1(s) = 0; P_1'(s) = -2s \end{array} \right. \quad (18.17)$$

Vemos que hay una fila nula $P_1(s) = 0$ que ha sido sustituida por una nueva $P_1'(s) = -2s$, y un cambio de signo en los coeficientes de la primera columna. Puesto que se ha anulado una fila sabemos que debe haber soluciones radiales. Como el polinomio es de grado 3

no es posible que sean complejas, pero podrían haber sido reales. La forma de saber si las radiales son imaginarias o reales es analizando el polinomio auxiliar $P_2(s) = s^2 + 4$. Puesto que las raíces de $P_2(s) = 0$ son imaginarias, podemos concluir que hay una raíz real inestable que no es radial. En cualquier caso el polinomio es inestable.

1.ii) Sea el polinomio

$$P(s) = s^3 + s^2 - 4s - 4 = (s^2 - 4)(s + 1) \quad (18.18)$$

La ecuación $P(s) = 0$ tiene una raíz radial real inestable.

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & -4 \\ 1 & -4 \\ 0; 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} P_2(s) = s^2 - 4 \\ P_1(s) = 0; P_1'(s) = 2s \end{array} \quad (18.19)$$

Vemos que hay una fila nula $P_1(s) = 0$ que ha sido sustituida por una nueva $P_1'(s) = 2s$, y un cambio de signo en los coeficientes de la primera columna. Como en el ejemplo anterior tampoco sabemos si las soluciones radiales son imaginarias o reales. En este caso habría que estudiar el polinomio auxiliar $P_2(s) = s^2 - 4$. Puesto que las raíces de $P_2(s) = 0$ son reales, podemos concluir que hay una raíz real inestable que es radial.

1.iii) Sea el polinomio

$$P(s) = s^3 - s^2 - s + 1 = (s - 1)^2(s + 1) \quad (18.20)$$

Vemos que la ecuación $P(s) = 0$ tiene una raíz inestable de orden de multiplicidad 2.

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0; -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} P_2(s) = -s^2 + 1 \\ P_1(s) = 0; P_1'(s) = -2s \end{array} \quad (18.21)$$

Vemos que la fila que se ha anulado se debe a las raíces radiales de $P_2(s) = -s^2 + 1 = 0$, es decir $s = \pm 1$, y nada tiene que ver con el hecho de que $P(s)$ tenga una raíz doble. Vemos que hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. No debe sacarse la conclusión de que si el orden de multiplicidad es mayor que la unidad se anulará una fila.

2. Filas cuyo primer coeficiente es nulo y los restantes no son nulos.

Puede darse otro caso especial que es cuando el primer coeficiente de una fila se hace nulo y los restantes son distintos de cero. Se trata de

una reducción de grado del polinomio auxiliar. Hay diversas formas de construir la tabla de Routh en estas circunstancias. Una de ellas es sustituir el valor nulo por una variable positiva $\epsilon > 0$ y seguir construyendo la Tabla normalmente. Una vez hecho esto los restantes coeficientes de la Tabla dependerán, en general, de ϵ y bastará con calcular el $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{j1}$, $\forall j$ para conocer el signo de los coeficientes de la primera columna.

2.i) Sea el polinomio

$$P(s) = s^4 + 4 = ((s+1)^2 + 1)((s-1)^2 + 1) = (s^2 + 2j)(s^2 - 2j) \quad (18.22)$$

La ecuación $P(s) = 0$ tiene cuatro raíces complejas radiales pero que no son imaginarias puras.

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^4 : \\ s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 0; 4 & 0 & 0 \\ 0 \approx \epsilon & 4 & 0 \\ -\frac{16}{\epsilon} & 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{4} & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} P_4(s) = s^4 + 4 \\ P_3(s) = 0; P'_3(s) = 4s^3 \\ \\ \\ \end{array} \quad (18.23)$$

En este caso ha habido una fila nula $P_3(s) = 0$, que ha sido sustituida por $P'_3(s) = 4s^3$. También ha habido una fila s^2 con el primer coeficiente nulo y el siguiente distinto de cero. El coeficiente nulo se ha sustituido por $\epsilon > 0$ de tal manera que se ha permitido terminar de construir la Tabla. Podemos ver que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{11} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{16}{\epsilon} = -\infty < 0 \quad (18.24)$$

En consecuencia vemos dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna y por lo tanto hay dos raíces con parte real positiva.

18.2. Transformación w para el análisis de la estabilidad de polinomios en el sentido de Schur

La estabilidad en sentido de Schur puede probarse directamente con el test de Jury, pero resulta más sencillo realizar un cambio de variables en el dominio complejo mediante la transformación conforme de Möbius o transformación w del interior del círculo unidad del plano complejo z en el semiplano izquierdo del plano complejo s , y en consecuencia el polinomio resultante deberá ser estable en el sentido de Hurwitz.

La transformación w se define de la siguiente forma:

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad (18.25)$$

donde $z = \sigma_D + j\omega_D$ y $w = \sigma_w + j\omega_w$.

Al sustituir esta relación en el polinomio $P(z)$ dado por 18.3 se obtiene la expresión

$$Q'(w) = \frac{w^n + b_1 w^{n-1} + b_2 w^{n-2} + \dots + b_n}{(w-1)^n} \quad (18.26)$$

Definimos el polinomio $Q(w)$ como

$$Q(w) = Q'(w)(w-1)^n \quad (18.27)$$

Puede demostrarse que la ecuación $Q(w) = 0$ tiene raíces cuya parte real es negativa si y solamente si la ecuación $P(z) = 0$ tiene raíces dentro del círculo unidad, es decir $|z| < 1$ si y solamente si $\text{Re}\{w\} < 0$. Esto indica que podrá ser utilizada la Tabla de Routh explicada en la Subsección 18.1 para analizar la estabilidad de $P(w)$. En la Figura 14 se muestra la transformación entre los planos complejos z y w , que no debe confundirse con la del plano complejo s donde $z = e^{sT}$ representada en la Figura 7 de la Sección 12 de la Parte II [2]. La transformación w no es periódica sino que realiza una transformación de cada punto del semiplano izquierdo del plano complejo w en un único punto del interior del círculo unidad del plano complejo z .

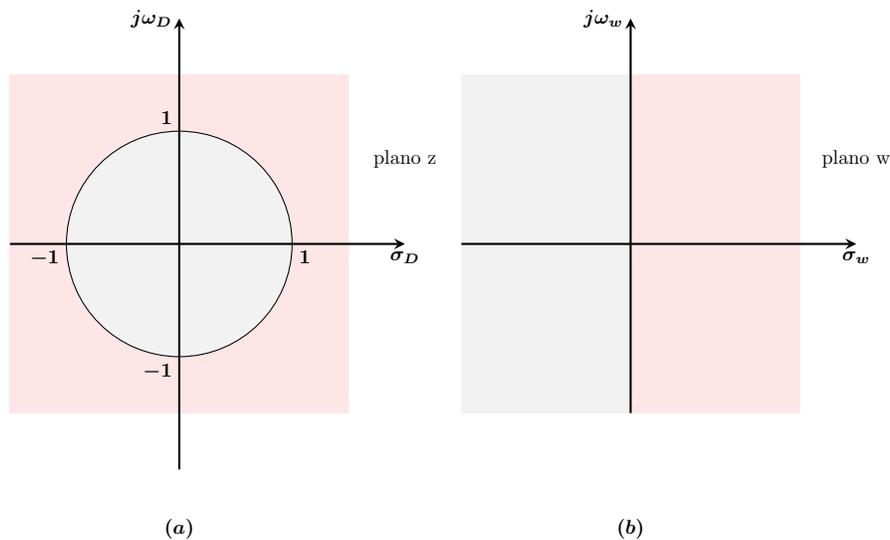


Figura 14: Características de la transformación $z = \frac{w+1}{w-1}$. (a) Plano z (b) Plano w

Por ejemplo, consideremos el siguiente polinomio,

$$P(z) = z^2 + 2z - 5 \quad (18.28)$$

Las raíces de $P(z) = 0$ son $z = -1 \pm \sqrt{6}$, y como $|z| \geq 1$ el polinomio no es estable en el sentido de Schur.

Aplicando la transformación w dada por 18.25 se obtiene

$$Q'(w) = \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 5 \quad (18.29)$$

y de aquí que el polinomio $Q(w) = Q'(w)(w-1)^2$ quede en la forma

$$Q(w) = (w+1)^2 + 2(w+1)(w-1) - 5(w-1)^2 \quad (18.30)$$

resultando

$$Q(w) = w^2 - 6w + 3 \quad (18.31)$$

Este polinomio es inestable en el sentido de Hurwitz ya que las raíces son $3 \pm \sqrt{6}$, que son positivas. En consecuencia el polinomio $P(z)$ del cual deriva será inestable en el sentido de Schur.

La tabla de Routh para $Q(w)$ es:

$$\begin{array}{l} w^2 : \\ w^1 : \\ w^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ -6 & 0 \\ 3 & \end{array} \right. \quad (18.32)$$

Vemos que hay dos cambios de signo en la primera columna (de números) por lo que la ecuación $Q(w) = 0$ tiene dos raíces inestables en el sentido de Hurwitz. En consecuencia la ecuación $P(z) = 0$ tendrá dos raíces fuera del círculo unidad por lo que será inestable en el sentido de Schur.

19. Intervalo de estabilidad de la constante K_p de un controlador Proporcional de un sistema de control realimentado. Selección del periodo de muestreo

En la Figura 15 se muestra un sistema de control realimentado continuo con un controlador Proporcional en el lazo directo. El sistema a controlar es un sistema de segundo orden cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (19.1)$$

donde $K, p \in \mathbb{R}$.

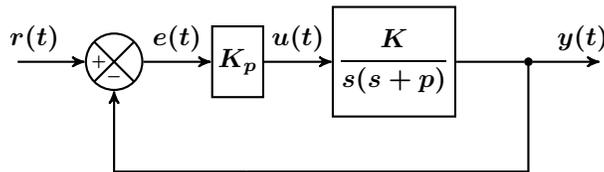


Figura 15: Controlador Proporcional en una estructura de Control de Lazo Directo Continuo

La función de transferencia de lazo cerrado es

$$H(s) = \frac{K_p K}{s^2 + ps + K K_p} \quad (19.2)$$

El intervalo de estabilidad de K_p puede calcularse utilizando la Tabla de Routh,

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & K K_p \\ p & 0 \\ K K_p & 0 \end{array} \right. \quad (19.3)$$

Analizando los cambios de signo de la primera columna sacamos la conclusión de que para que el sistema de lazo cerrado sea estable deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$p > 0 \quad (19.4a)$$

$$K K_p > 0 \quad (19.4b)$$

Por ejemplo si $p > 0$ y $K < 0$ entonces K_p debe ser menor que cero.

La ecuación característica del sistema de control de lazo cerrado es

$$s^2 + ps + K K_p = 0 \quad (19.5)$$

En consecuencia los polos son

$$s = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4K K_p}}{2} \quad (19.6)$$

Cuando $p^2 < 4K K_p$ los polos serán complejos conjugados; en caso contrario serán reales y distintos. El caso de polos complejos no puede darse si $K K_p < 0$. En el caso de polos reales, si $K K_p < 0$ habrá un polo positivo.

Con este análisis podemos comprobar que es más sencillo obtener los intervalos de estabilidad utilizando la Tabla de Routh que obteniendo los polos del sistema, incluso en este sencillo ejemplo de un sistema de orden dos.

Consideremos ahora que este controlador se implementa en una estructura híbrida como la de la Figura 16 en la que se ha sustituido K_p por K_{pD} .

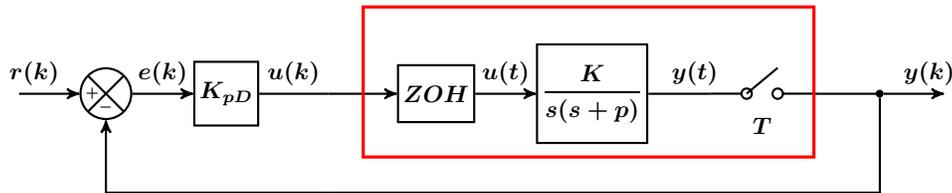


Figura 16: Controlador Proporcional en una estructura de Control de Lazo Directo Híbrido

En este caso el estudio de los intervalos de estabilidad debe servir también para la elección del periodo de muestreo T , ya que como veremos, el sistema de control híbrido se hace inestable para un cierto rango de valores de T dependientes de los parámetros K, p, K_{pD} .

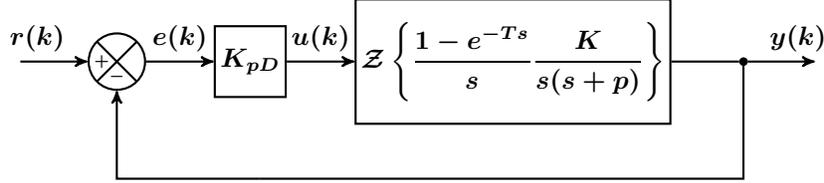


Figura 17: Controlador Proporcional en una estructura de Control de Lazo Directo Discreto

En primer lugar obtendremos la función de transferencia de lazo cerrado discreta $H_D(z)$ según el esquema de la Figura 17,

$$H_D(z) = \frac{K_{pD} \mathcal{Z} \{G_{ZOH}(s)G(s)\}}{1 + K_{pD} \mathcal{Z} \{G_{ZOH}(s)G(s)\}} \quad (19.7)$$

En la Sección 14 de la Parte II[2] se demostró que

$$\mathcal{Z} \{G_{ZOH}(s)G(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{K}{s^2(s+p)} \right\} \quad (19.8)$$

En el Apéndice C se demuestra que

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{p}{s^2(s+p)} \right\} = \frac{z(b_0z + b_1)}{(z-1)^2(z - e^{-pT})} \quad (19.9)$$

donde

$$b_0 = \frac{e^{-pT} - 1 + pT}{p} \quad (19.10a)$$

$$b_1 = \frac{1 - (1 + pT)e^{-pT}}{p} \quad (19.10b)$$

Por lo tanto

$$(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{p}{s^2(s+p)} \right\} = \frac{b_0z + b_1}{(z-1)(z - e^{-pT})} = \frac{b_0z + b_1}{z^2 - (1 + e^{-pT})z + e^{-pT}} \quad (19.11)$$

De aquí que

$$H_D(z) = \frac{K_{pD}K(b_0z + b_1)}{p(z^2 - d_1z + d_2)} \quad (19.12)$$

donde

$$d_1 = 1 + e^{-pT} - \frac{K_{pD}Kb_0}{p} \quad (19.13a)$$

$$d_2 = e^{-pT} + \frac{K_{pD}Kb_1}{p} \quad (19.13b)$$

Podemos comprobar que se satisface la restricción de ganancia a bajas frecuencias entre $H(s)$ dado por 19.3 y $H_D(z)$ dado por 19.12, por lo que si $K_{pD} = K_p$ la función de transferencia $H_D(z)$ sería una discretización de $G(s)$ a la entrada escalón explicada en la Sección 15.1 de la Parte II[2]. Sin embargo debe entenderse que se ha elegido esta forma de discretización debido a la implementación realizada en la Figura 16. Si la entrada al ZOH $u(k)$ fuese un escalón, la salida del sistema realimentado $y(k)$ coincidiría con la salida de $G(s)$ en los instantes de muestreo, pero en general la señal de control $u(k)$ del sistema de lazo cerrado híbrido no será un escalón, por lo que debe analizarse la estabilidad del sistema de control realimentado discreto en su totalidad. En general podría haberse escogido otra forma de discretización de la función de transferencia continua $G(s)$ pero el análisis completo de la estabilidad seguiría siendo necesario.

Para el análisis de los intervalos de estabilidad utilizaremos el método de la transformación w explicado en la Sección 18.2 para el análisis de la estabilidad de polinomios en el sentido de Schur, es decir haremos en la ecuación característica el cambio de variable $z = \frac{w+1}{w-1}$ y analizaremos la estabilidad en el sentido de Hurwitz de la ecuación resultante utilizando la Tabla de Routh.

La ecuación característica de $H_D(z)$ es

$$z^2 - d_1z + d_2 = 0 \quad (19.14)$$

por lo que haciendo el cambio de variable $z = \frac{w+1}{w-1}$

$$(w+1)^2 - d_1(w-1)(w+1) + d_2(w-1)^2 = 0 \quad (19.15)$$

Agrupando términos del mismo grado y dividiendo por el coeficiente de mayor grado c_0 se obtiene la ecuación característica en $w \in \mathbb{C}$

$$w^2 + c_1w + c_2 = 0 \quad (19.16)$$

donde

$$c_0 = 1 - d_1 + d_2 = \frac{K_{pD}K(b_0 + b_1)}{p} = \frac{K_{pD}KT(1 - e^{-pT})}{p} \quad (19.17a)$$

$$c_1 = \frac{2(1 - d_2)}{c_0} \quad (19.17b)$$

$$c_2 = \frac{1 + d_1 + d_2}{c_0} \quad (19.17c)$$

Podemos comprobar utilizando la Tabla de Routh que con la discretización elegida, el sistema híbrido es estable si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$c_1 > 0 \quad (19.18a)$$

$$c_2 > 0 \quad (19.18b)$$

Si $p, K, K_{pD} > 0$ entonces $c_0 > 0$ por lo que las condiciones de estabilidad se reducen a

$$d_2(T) < 1 \quad (19.19a)$$

$$c'_2(T) = 1 + d_1(T) + d_2(T) > 0 \quad (19.19b)$$

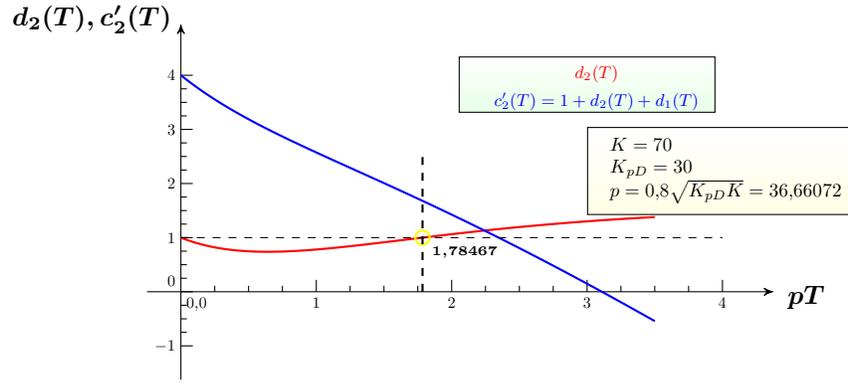


Figura 18: Curvas de los coeficientes de la ecuación característica $w^2 + c_1w + c_2 = 0$

En la Figura 18 se muestran las curvas de variación con respecto a pT de los parámetros $d_2(T)$ y $c'_2(T) = 1 + d_1(T) + d_2(T)$. Podemos apreciar que hay valores de pT que hacen que el sistema híbrido sea inestable. Se ha escogido

$p = \sqrt{\frac{K_{pD}K}{\alpha}}$ con $\alpha > 1$ de tal manera que

$$d_1 = 1 + e^{-pT} - \alpha pb_0 \quad (19.20a)$$

$$d_2 = e^{-pT} + \alpha pb_1 \quad (19.20b)$$

Puesto que $b_1(T) \rightarrow 1$ cuando $T \rightarrow \infty$ entonces habrá valores de $d_2(T) \rightarrow \alpha > 1$. Y puesto que $b_0(T) \rightarrow \infty$ cuando $T \rightarrow \infty$ entonces habrá valores de $c'_2(T) < 0$.

Para los valores de los parámetros escogidos en la Figura 18 puede apreciarse que el periodo de muestreo debe caer aproximadamente en el intervalo $[0, \frac{1,75}{p}]$.

Incluso escogiendo valores de $K_{pD} < \frac{p^2}{K}$, es decir $\alpha < 1$ que hacen $d_2 < 1$, siempre habrá algún valor de T para el cual $c'_2 < 0$ ya que

$$c'_2(T) = 2\alpha(1 - e^{-pT}) + (2 - \alpha pT)(1 + e^{-pT}) \quad (19.21)$$

No obstante una vez escogido T puede seleccionarse $\alpha < \frac{2}{pT}$ para el cálculo de $K_{pD} = \frac{\alpha p^2}{K}$ y se cumplirá que $c'_2 > 0$. En la Figura 19 se muestran las curvas de $c'_2(T)$ para diferentes valores de α de acuerdo con la expresión 19.21.

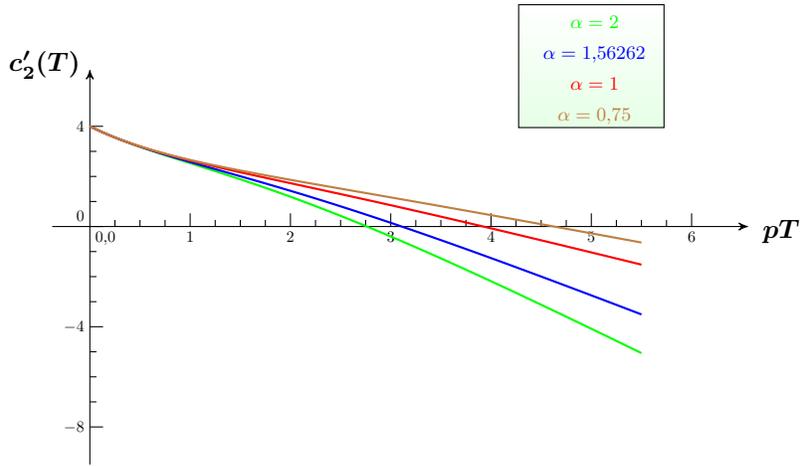


Figura 19: Curvas de $c'_2(T)$ para diferentes valores de α

Una conclusión que debe sacarse es que si se hubiese sintonizado el controlador Proporcional continuo, es decir seleccionado K_p , exclusivamente con criterios de estabilidad, podría ocurrir que haciendo $K_{pD} = K_p$ el sistema híbrido fuese inestable. Pero la estabilidad puede lograrse con $K_{pD} = K_p = \frac{\alpha p^2}{K}$ escogiendo $\alpha < \min(1, \alpha_{\text{crítica}})$ donde $\alpha_{\text{crítica}}$ se obtiene de hacer $c'_2 = 0$ en la expresión 19.21.

En resumen, escogiendo un valor cualquiera del periodo de muestreo T , el sistema híbrido es estable escogiendo un valor del parámetro K_{pD} del controlador Proporcional tal que

$$0 < K_{pD} = \frac{\alpha p^2}{K} \quad (19.22a)$$

$$0 < \alpha < \min(1, \alpha_{\text{crítica}}) \quad (19.22b)$$

$$\alpha_{\text{crítica}} = \frac{2(1 + e^{-pT})}{pT(1 + e^{-pT}) - 2(1 - e^{-pT})} \quad (19.22c)$$

Este estudio se completaría con el análisis del caso $K < 0$.

B. Sistemas oscilatorios continuos y discretos

B.1. Sistema de segundo orden oscilatorio continuo

Consideremos el sistema de segundo orden continuo con entrada nula dado por la ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

con las condiciones iniciales $[y(0^-), \dot{y}(0^-)]$ y $\omega_n \in \mathbb{R}$ una constante positiva.

Aplicando la Transformada de Laplace se obtiene la ecuación (ver la Tabla 2 de la Sección 4 de la Parte I[1]),

$$Y(s) = \frac{y(0^-)s + \dot{y}(0^-)}{s^2 + \omega_n^2} \quad (\text{B.2})$$

Esta relación puede escribirse en la forma

$$Y(s) = \frac{y(0^-)}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega_n} + \frac{1}{s + j\omega_n} \right] + \frac{\dot{y}(0^-)}{2j\omega_n} \left[\frac{1}{s - j\omega_n} - \frac{1}{s + j\omega_n} \right] \quad (\text{B.3})$$

Aplicando la Transformada inversa de Laplace,

$$y(t) = \frac{y(0^-)}{2} [e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t}] + \frac{\dot{y}(0^-)}{2j\omega_n} [e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}] \quad (\text{B.4})$$

que puede escribirse en la forma

$$y(t) = \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + y(0^-) \cos(\omega_n t) \quad (\text{B.5})$$

La salida dada por la ecuación B.5 es oscilatoria sin amortiguación por lo que el sistema dado por la ecuación diferencial B.1 es críticamente estable. Podemos observar que los polos son imaginarios puros $s = \pm j\omega_n$; están en el eje imaginario del plano complejo s .

Hemos demostrado también que

$$\mathcal{L}_- \{ \sin(\omega_n t) \} = \frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \quad (\text{B.6a})$$

$$\mathcal{L}_- \{ \cos(\omega_n t) \} = \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \quad (\text{B.6b})$$

B.2. Sistema de segundo orden oscilatorio discreto

Consideremos ahora el sistema de segundo orden discreto con entrada nula dado por la ecuación en diferencias

$$y(k+2) - 2\cos(\omega_n T)y(k+1) + y(k) = 0 \quad (\text{B.7})$$

con las condiciones iniciales $[y(0), y(T)]$ y $\omega_n, T \in \mathbb{R}$ constantes positivas.

Aplicando la Transformada \mathcal{Z} se obtiene la ecuación (ver la Tabla 1 de la Sección 4 de la Parte I[1]),

$$Y(z) = \frac{z(y(0)(z - 2\cos(\omega_n T)) + y(T))}{z^2 - 2\cos(\omega_n T)z + 1} \quad (\text{B.8})$$

El polinomio característico puede escribirse en la forma

$$z^2 - 2\cos(\omega_n T)z + 1 = (z - e^{j\omega_n T})(z - e^{-j\omega_n T}) \quad (\text{B.9})$$

Por lo tanto podemos escribir la relación B.8 en la forma

$$Y(z) = y(0) \left[\frac{az}{z - e^{j\omega_n T}} + \frac{(1-a)z}{z - e^{-j\omega_n T}} \right] + y(T) \left[\frac{bz}{z - e^{j\omega_n T}} - \frac{bz}{z - e^{-j\omega_n T}} \right] \quad (\text{B.10})$$

donde

$$a = \frac{-e^{-j\omega_n T}}{2j \sin(\omega_n T)} \quad (\text{B.11a})$$

$$b = \frac{1}{2j \sin(\omega_n T)} \quad (\text{B.11b})$$

Calculando $\mathcal{Z}^{-1} \{Y(z)\}$ se obtiene la salida

$$y(k) = y(0) [ae^{jk\omega_n T} + (1-a)e^{-jk\omega_n T}] + y(T)b [e^{jk\omega_n T} - e^{-jk\omega_n T}] \quad (\text{B.12})$$

Teniendo en cuenta que $1 - a = \frac{e^{j\omega_n T}}{2j \sin(\omega_n T)}$,

$$y(k) = \frac{y(0)}{2j \sin(\omega_n T)} [-e^{j(k-1)\omega_n T} + e^{-j(k-1)\omega_n T}] + \frac{y(T)}{2j \sin(\omega_n T)} [e^{jk\omega_n T} - e^{-jk\omega_n T}] \quad (\text{B.13})$$

que finalmente puede escribirse como

$$y(k) = \frac{y(T)}{\sin(\omega_n T)} \sin(k\omega_n T) - \frac{y(0)}{\sin(\omega_n T)} \sin((k-1)\omega_n T) \quad (\text{B.14})$$

Vemos que se obtiene una salida oscilatoria sin amortiguación por lo que el sistema discreto dado por la ecuación en diferencias B.7 es críticamente estable. Podemos observar que los polos $z = e^{\pm j\omega_n T}$ satisfacen la condición de que su módulo es la unidad, es decir que caen en la circunferencia unidad del plano complejo z .

A partir de estos resultados pueden obtenerse las Transformada \mathcal{Z} del seno y del coseno,

$$\mathcal{Z} \{ \sin(k\omega_n T) \} = \frac{z \sin(\omega_n T)}{z^2 - 2\cos(\omega_n T)z + 1} \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathcal{Z} \{ \cos(k\omega_n T) \} = \frac{z(z - \cos(\omega_n T))}{z^2 - 2\cos(\omega_n T)z + 1} \quad (\text{B.15b})$$

C. Cálculo de $\mathcal{Z} \left\{ \frac{p}{s^2(s+p)} \right\}$

Consideremos la función de transferencia

$$G(s) = \frac{p}{s^2(s+p)} \quad (\text{C.1})$$

Podemos comprobar que $G(s)$ puede escribirse en la forma

$$\frac{p}{s^2(s+p)} = -\frac{1}{ps} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{p(s+p)} \quad (\text{C.2})$$

por lo que su Transformada \mathcal{Z} es

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{p}{s^2(s+p)} \right\} = -\frac{z}{p(z-1)} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{p(z-e^{-pT})} \quad (\text{C.3})$$

Por lo tanto

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{p}{s^2(s+p)} \right\} = \frac{z(b_0z + b_1)}{(z-1)^2(z-e^{-pT})} \quad (\text{C.4})$$

donde

$$b_0 = \frac{e^{-pT} - 1 + pT}{p} \quad (\text{C.5a})$$

$$b_1 = \frac{1 - (1 + pT)e^{-pT}}{p} \quad (\text{C.5b})$$

Bibliografía

- [1] F. Monasterio-Huelin and A. Gutiérrez, *Apuntes de Teoría. Primera Parte*. SECO2014-I, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [2] —, *Apuntes de Teoría. Segunda Parte*. SECO2014-II, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>