SECO 2014-IV ([1, 2, 3])

Félix Monasterio-Huelin y Álvaro Gutiérrez

25 de marzo de 2014

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tablas

20. Planteamiento de diseño de sistemas de control realimentado para el problema de seguimiento de señales de referencia. Características del régimen permanente

El problema de seguimiento de una señal de referencia consiste en el estudio del comportamiento del sistema realimentado en el régimen permanente, es decir el estudio cuando $t \to \infty$ de la señal de error $e(t)$ ante diferentes señales de referencia.

Para analizar este problema suele ser suficiente con utilizar el teorema del valor final (ver Tablas 1 y 2 de la Sección 4 de la Parte I[1]) para obtener el error de régimen permanente $e(\infty)$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} s\mathcal{L}_{-}\left\{e(t)\right\} \\ \lim_{k\to\infty} e(k) &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{e(k)\right\} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(20.1a) \\ &(20.1b) \end{aligned}$$

Estos teoremas son solo válidos cuando las señales $e(t)$ y $e(kT)$ son estables. En caso contrario no pueden ser aplicados.

La señal de error se define como $e(t) = r(t) - y(t)$ por lo que su función de transferencia es

$$E(s) = (1 - H(s))\, R(s) \tag{20.2a}$$

$$E(z) = (1 - H(z))\, R(z) \tag{20.2b}$$

donde $H(s)$ y $H(z)$ son las funciones de transferencia de lazo cerrado continuo y discreto respectivamente.

Podemos observar que el tipo de sistema de $H(s)$, es decir el número de polos en $s = 0$ que tenga $H(s)$ tendrá mucha importancia para el problema de seguimiento. Por ejemplo si $H(s) = \dfrac{K}{s(s+p)}$ entonces

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{s^2 + sp - K}{s(s+p)}R(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-K}{p}R(s) \tag{20.3}$$

Si la señal de referencia es un escalón unidad $R(s) = \dfrac{1}{s}$, entonces el error de régimen permanente será infinito.

Si el sistema de control realimentado es de tipo cero $H(s) = \dfrac{K}{s+p}$ entonces

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{s + p - K}{s+p}R(s) = \lim_{s\to 0} \frac{(p-K)s}{p}R(s) \tag{20.4}$$

Si la señal de referencia es un escalón unidad $R(s) = \dfrac{1}{s}$, entonces el error de régimen permanente será finito, $e(\infty) = \dfrac{p-K}{p}$.

Supongamos ahora que el sistema realimentado es $H(s) = \dfrac{2\alpha s + \omega_n^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2}$, entonces

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{s^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} R(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^3}{\omega_n^2} R(s) \tag{20.5}$$

Si la señal de referencia es una escalón o una rampa el error de régimen permanente será nulo, pero si es una parábola será finito $e(\infty) = \dfrac{1}{\omega_n^2}$.

Estos ejemplos muestran que es imposible resolver el problema de seguimiento con error de régimen permanente nulo para cualquier señal de referencia.

El objetivo de diseño del controlador para la resolución del problema de seguimiento de un conjunto de señales de referncia concretos, consiste por lo tanto en la obtención de una función de transferencia de lazo cerrado adecuada. En el último ejemplo se ha visto que la selección de los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado puede ser suficiente para resolver el problema de seguimiento.

Cuando el error de régimen permanente no es nulo sino finito se plantea un problema de diseño de la tolerancia ν de la salida en el régimen permanente, definida como un tanto por ciento por encima y por debajo del valor de la señal de referencia. Cuando la salida se encuentra en el intervalo de tolerancia se considera que se ha pasado del régimen transitorio al régimen permanente, y el instante de tiempo en el cual sucede se denomina tiempo de establecimiento t_s.

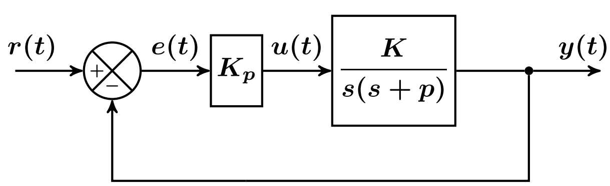

Figura 20: Controlador P para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

Consideremos el sistema de control de la Figura 20 que tiene un controlador Proporcional, entonces

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{s(s+p)}{s(s+p) + K_p K} R(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 p}{K_p K} R(s) \tag{20.6}$$

Vemos que el error de régimen permanente para una señal de referencia escalón es nulo, mientras que es finito para la señal de referencia rampa $e(\infty) = \dfrac{p}{K_p K}$.

Analicemos la tolerancia ν del 2 %. Esto significa que el intervalo de tolerancia es $I(t) = t \pm 0{,}02$ para la señal de referencia rampa. Puesto que $e(t) = t - y(t)$, entonces $|I_e| \leq 0{,}02$. En el ejemplo anterior se cumple que $e(\infty) = \dfrac{p}{K_p K}$, por lo que en principio puede obtenerse la tolerancia deseada diseñando adecuadamente el parámetro del controlador K_p. Cuando el error $e(t)$ alcance el valor $\pm 0{,}02$ y no tome valores mayores a éste podrá conocerse el tiempo de establecimiento t_s. El cálculo de t_s se considera parte del análisis del comportamiento del sistema de control en el régimen transitorio.

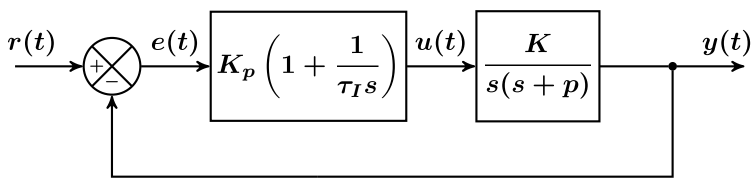

Figura 21: Controlador PI para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

Si sustituimos el controlador P por uno Proporcional-Integral (PI) como se muestra en la Figura 21 entonces

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \frac{\tau_I s^2(s+p)}{\tau_I s^2(s+p) + K_p K(\tau_I s+1)} R(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\tau_I p s^3}{K_p K} R(s) \qquad (20.7)$$

Vemos que el error de régimen permanente para señales de referencia escalón y rampa son nulos, mientras que para una señal de referencia parabólica es finito $e(\infty) = \dfrac{\tau_I p}{K_p K}$.

Con estos dos ejemplos vemos de nuevo, que la selección de los ceros de lazo cerrado son los responsables de la resolución del problema de seguimiento. Con el controlador P no hay ceros pero el término $K_p K$ coincide con el término independiente del polinomio característico. Con el controlador PI ocurre algo similar. En este caso el numerador de $H(s)$ es $K_p K(\tau_I s + 1)$, la parte de grado uno del polinomio característico.

El análisis del caso discreto es idéntico, pero conviene analizar el caso híbrido realizando una discretización del controlador PI.

El controlador PI continuo tiene la forma integral

$$u(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{\tau_I}\int_0^t e(\tau)d\tau\right) \qquad (20.8)$$

En el Apéndice E se demuestra que la función de transferencia del Controlador PI discretizado utilizando el método de discretización de Euler en atraso es

$$G_{PI,D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p\left(1 + \frac{T}{\tau_I}\frac{z}{z-1}\right) \qquad (20.9)$$

En la Figura 22 se representa el esquema de bloques de un sistema control realimentado híbrido con un controlador PI discretizado.

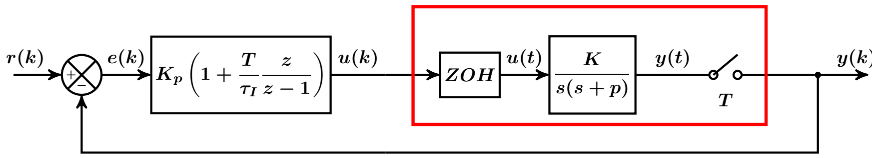

Figura 22: Controlador PI discreto para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 23 se muestra el sistema discretizado del sistema híbrido de la Figura 22 (ver el Apéndice C de la Parte III[3])

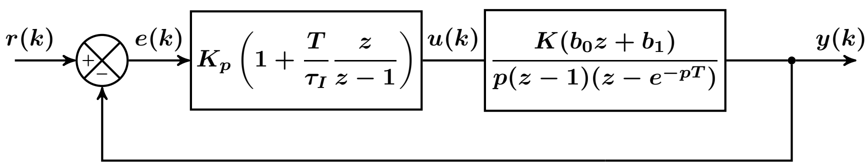

Figura 23: Controlador PI discreto para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno discretizado donde $b_0 = \dfrac{e^{-pT}-1+pT}{p}$ y $b_1 = \dfrac{1-(1+pT)e^{-pT}}{p}$

Obteniendo la función de transferencia de lazo cerrado $H_D(z)$, puede verse que

$$1 - H_D(z) = \frac{\tau_I p(z-1)^2(z-e^{-pT})}{\tau_I p(z-1)^2(z-e^{-pT}) + K_pK(\tau_I(z-1)+Tz)(b_0z+b_1)} \quad (20.10)$$

Por lo tanto el error de régimen permanente $e(\infty)$ es

$$e(\infty) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{\tau_I p(z-1)^2(1-e^{-pT})}{K_pKT(b_0+b_1)}R(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\tau_I p(z-1)^3(1-e^{-pT})}{K_pKT(b_0+b_1)}R(z) \quad (20.11)$$

Teniendo en cuenta que $b_0 + b_1 = T(1-e^{-pT})$ esta expresión se puede simplificar a

$$e(\infty) = \lim_{z\to 1}\frac{\tau_I p(z-1)^3}{K_pKT^2}R(z) \quad (20.12)$$

Podemos comprobar que cuando la señal de referencia es un escalón o una rampa se obtiene un error de régimen permanente nulo, pero para una señal de referencia parabólica el error de régimen permanente es finito, como en el caso continuo.

La señal de referencia rampa se define como kT y la parabólica como $\frac{1}{2}(kT)^2$.

Sus transformadas $\mathcal{Z}$ se describieron en la Sección 4 de la Parte-I[1],

$$\mathcal{Z}\left\{kT\right\} = \frac{Tz}{(z-1)^2} \tag{20.13a}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}(kT)^2\right\} = \frac{T^2 z(1+z)}{2(z-1)^3} \tag{20.13b}$$

Por lo tanto el error de régimen permanente a la señal de referencia parabólica es $e(\infty) = \dfrac{\tau_I p}{K_p K}$ que coincide con la del caso continuo.

21. Sistemas de segundo orden amortiguados

En el Apéndice D.1 se estudia el sistema continuo dado por la ecuación diferencial

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0} \tag{21.1}$$

donde $\omega_n \in \mathbb{R}^+$ es la frecuencia natural, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el coeficiente de atenuación e $y(t) \in \mathbb{R}$ la salida del sistema continuo.

Para el análisis de los sistemas de segundo orden conviene introducir el coeficiente de amortiguamiento $\zeta \in \mathbb{R}^+$ definido como

$$\alpha = \zeta\omega_n \tag{21.2}$$

La solución de la ecuación diferencial 21.1 es

$$y(t) = e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{\omega_d}\sin\omega_d t + y(0^-)\cos\omega_d t\right) \qquad \zeta < 1 \tag{21.3a}$$

$$y(t) = \left(\frac{\alpha_1 y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{2\tilde{\omega}_d}\right)e^{-\alpha_2 t} - \left(\frac{\alpha_2 y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{2\tilde{\omega}_d}\right)e^{-\alpha_1 t} \qquad \zeta > 1 \tag{21.3b}$$

$$y(t) = y(0^-)e^{-\omega_n t} + \left(\frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n} + y(0^-)\right)\omega_n t e^{-\omega_n t} \qquad \zeta = 1 \tag{21.3c}$$

donde

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) \tag{21.4a}$$

$$\tilde{\omega}_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = \omega_n\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{21.4b}$$

$$\alpha_1 = \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{21.4c}$$

$$\alpha_2 = \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{21.4d}$$

Al parámetro ω_d se le denomina frecuencia natural amortiguada.

Podemos observar que la solución 21.3a representa una salida con un comportamiento oscilatorio amortiguado, y por esta razón se la denomina respuesta subamortiguada. La solución 21.3b sin embargo es similar a la de dos sistemas de primer orden en serie por lo que se la denomina respuesta sobreamortiguada y a la solución 21.3c respuesta críticamente amortiguada.

Puede comprobarse que en la respuesta críticamente amortiguada el factor $te^{-\alpha t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, por lo que es estable como todos los demás casos, ya que tienden al punto de equilibrio $y(t) = 0$ cuando $t \to \infty$.

Un caso interesante, que ya ha sido estudiado en la Sección 17 de la Parte III[3] es el que tiene un comportamiento oscilatorio sin amortiguación. Esto ocurre cuando $\alpha = 0$ o $\zeta = 0$, y el sistema es, como ya se vió, críticamente estable.

En la Figura 24 se muestran algunas curvas solución de la ecuación 21.1 para diferentes valores de ζ.

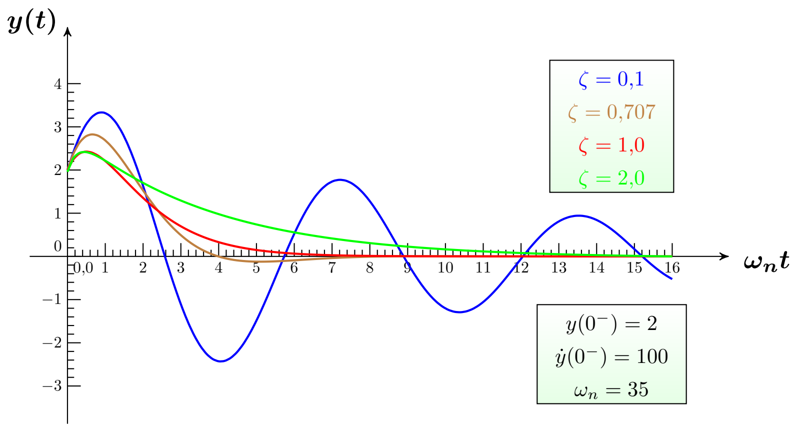

Figura 24: Salida $y(t)$ de un sistema de orden amortiguado

Otra manera de ver que se pueden dar todas estas situaciones es obteniendo las raíces de la ecuación característica de 21.1,

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2 = 0 \tag{21.5}$$

La raíces son

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \tag{21.6}$$

Por lo tanto el comportamiento oscilatorio amortiguado o respuesta subamortiguada ($\zeta < 1$) se produce cuando los polos de este sistema son complejos conjugados, mientras que el comportamiento sobreamortiguado ($\zeta > 1$) y críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) se producen cuando los polos son reales y distintos o reales e iguales (orden de multiplicidad dos) respectivamente.

La ecuación diferencial 21.1 tiene una discretización exacta como se demuestra en el Apéndice D.2, que conviene expresar de tres formas distintas, según que se trate del caso subamortiguado, $\alpha < \omega_n$, sobreamortiguado, $\alpha > \omega_n$ o críticamente amortiguado, $\alpha = \omega_n$. Se obtienen las representaciones discretas

$$\boxed{\begin{aligned} y(k+2) - 2e^{-\alpha T}cos(\omega_d T)y(k+1) + e^{-2\alpha T}y(k) &= 0 \qquad \zeta < 1 \\ y(k+2) - 2e^{-\alpha T}cosh(\tilde{\omega}_d T)y(k+1) + e^{-2\alpha T}y(k) &= 0 \qquad \zeta > 1 \\ y(k+2) - 2e^{-\omega_n T}y(k+1) + e^{-2\omega_n T}y(k) &= 0 \qquad \zeta = 1 \end{aligned}} \begin{aligned} &(21.7a) \\ &(21.7b) \\ &(21.7c) \end{aligned}$$

donde $T \in \mathbb{R}^+$ es el periodo de muestreo, $\omega_d \in \mathbb{R}^+$ la frecuencia natural amortiguada (dada por 21.4a), $\tilde{\omega}_d \in \mathbb{R}^+$ (dada por 21.4b) e $y(kT) \in \mathbb{R}$ la salida del sistema discreto.

En el Apéndice D.2 se demuestra que las soluciones de las ecuaciones 21.7 se obtienen haciendo $t = kT$ en las expresiones 21.3. Haciendo $t = T$ en 21.3a se cumple la relación

$$\dot{y}(0^-) = \frac{y(T)\omega_d e^{\alpha T} - y(0^-)(\omega_d \cos\omega_d T + \alpha \sin\omega_d T)}{\sin\omega_d T} \tag{21.8}$$

Cuando el periodo de muestreo es muy pequeño puede hacerse la aproximación $\cos\omega_d T \approx 1$, $\sin\omega_d T \approx \omega_d T$ y $e^{\alpha T} \approx 1+\alpha T$, resultando la relación

$$\dot{y}(0^-) \approx \frac{(y(T)-y(0^-))(1+\alpha T)}{T} \approx \frac{y(T)-y(0^-)}{T} \tag{21.9}$$

Como vemos, esta situación satisface la aproximación de Euler de la derivada.

En la Tabla 6 se recogen las Transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$ de los tres casos estudiados, que han sido demostradas en los Apéndices

Transformada $\mathcal{L}$	Función causal ($t=kT$)	Transformada $\mathcal{Z}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{Te^{-\alpha T}z}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{\left(z-(1+\alpha T)e^{-\alpha T}\right)z}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$	$e^{-\alpha_1 t}-e^{-\alpha_2 t}$	$\frac{\left(e^{-\alpha_1 T}-e^{-\alpha_2 T}\right)z}{\left(z-e^{-\alpha_1 T}\right)\left(z-e^{-\alpha_2 T}\right)}$
$\frac{(\alpha_2-\alpha_1)s}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$	$\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}-\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}$	$\frac{\left[z(\alpha_2-\alpha_1)-\left(\alpha_2 e^{-\alpha_1 T}-\alpha_1 e^{-\alpha_2 T}\right)\right]z}{\left(z-e^{-\alpha_1 T}\right)\left(z-e^{-\alpha_2 T}\right)}$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega_d t$	$\frac{\left(z-e^{-\alpha T}\cos\omega_d T\right)z}{z^2-2e^{-\alpha T}\cos(\omega_d T)z+e^{-2\alpha T}}$
$\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$	$e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$	$\frac{e^{-\alpha T}\sin(\omega_d T)z}{z^2-2e^{-\alpha T}\cos(\omega_d T)z+e^{-2\alpha T}}$

Tabla 6: Transformadas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{Z}$ de las funciones de segundo orden amortiguadas

22. Respuesta de los sistemas continuos de segundo orden a una entrada escalón. Características del régimen transitorio

Para el estudio de la respuesta de un sistema de segundo orden a la entrada escalón unidad obtendremos la función de transferencia de los sistemas de segundo orden en la primera forma canónica, a partir de la ecuación diferencial,

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t)} \tag{22.1}$$

donde $\omega_n \in \mathbb{R}^+$ es la frecuencia natural, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el coeficiente de atenuación, $u(t) \in \mathbb{R}$ la entrada e $y(t) \in \mathbb{R}$ la salida del sistema continuo.

Aplicando la Transformada de Laplace se obtiene la función de transferencia $\mathcal{G}_1(s)$ que llamaremos primera forma canónica de los sistemas de segundo orden,

$$\boxed{\mathcal{G}_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2}} \tag{22.2}$$

Cuando $u(t)$ es un escalón unidad $r_0(t)$ se obtiene la salida

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)} \tag{22.3}$$

Descomponiendo en fracciones simples, $Y(s)$ queda en la forma

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\alpha}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \tag{22.4}$$

La expresión del segundo miembro de la derecha fue estudiada en el Apéndice D.1, ecuaciones D.6 y D.10, lo que permite obtener la respuesta (causal) al escalón unidad de un sistema de segundo orden $\mathcal{L}_-^{-1}\left\{Y(s)\right\}$,

$$y(t) = \left(1 - e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right) r_0(t) \tag{22.5}$$

donde $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$ cuando la respuesta es subamortiguada, $\omega_d = -j\tilde{\omega}_d$ con $\tilde{\omega}_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$ cuando la respuesta es sobreamortiguada, y $\omega_d = 0$ cuando la respuesta es cricamente amortiguada.

Es habitual representar la respuesta al escalón en función del coeficiente de amortiguamiento ζ definido como $\alpha = \zeta\omega_n$ como se muestra en las Figuras 25 y 26.

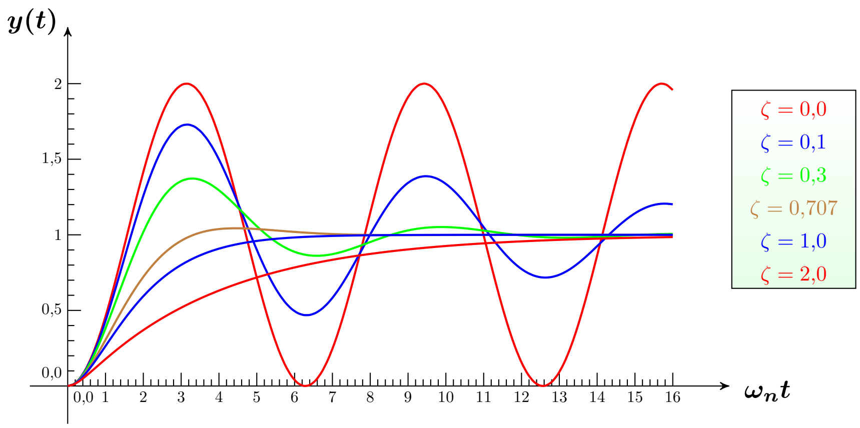

Figura 25: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos con entrada escalón unidad

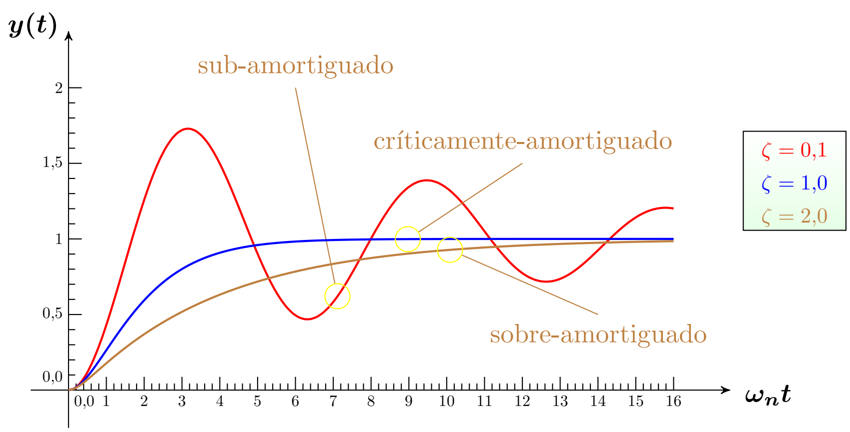

Figura 26: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos con entrada escalón unidad: clases de respuesta

La expresión 22.5 puede escribirse en la forma

$$y(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi)\right) r_0(t) \tag{22.6}$$

donde

$$\cos\phi = \sqrt{1-\zeta^2} \tag{22.7a}$$
$$\sin\phi = \zeta \tag{22.7b}$$

En el caso sobreamortiguado conviene escribir la respuesta al escalón 22.5 en la forma de exponenciales

$$y(t) = \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\tilde{\omega}_d} e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_2}{2\tilde{\omega}_d} e^{-\alpha_1 t}\right) r_0(t) \tag{22.8}$$

donde

$$\alpha_1 = \alpha + \tilde{\omega}_d \tag{22.9a}$$
$$\alpha_2 = \alpha - \tilde{\omega}_d \tag{22.9b}$$

El caso críticamente amortiguado puede obtenerse calculando el límite cuando $\omega_d \to 0$ en la expresión 22.5

$$y(t) = \left(1 - (1 + \omega_n t)\, e^{-\omega_n t}\right) r_0(t) \tag{22.10}$$

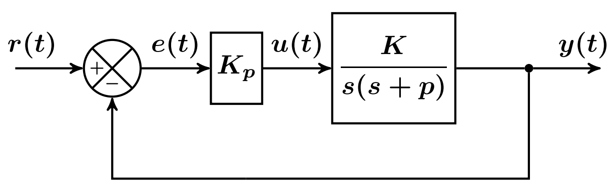

Figura 27: Controlador P para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 27 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional donde el sistema a controlar es de segundo orden y de tipo uno. La función de transferencia de lazo cerrado $H(s)$ coincide con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden dada por 22.2

$$H(s) = \frac{K_p K}{s^2 + ps + K_p K} \tag{22.11}$$

Por lo tanto, la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_n = \sqrt{K_p K} \tag{22.12a}$$
$$\zeta = \frac{p}{2\sqrt{K_p K}} \tag{22.12b}$$

Puesto que K_p es un parámetro de diseño es posible lograr una respuesta de régimen transitorio típica de los sistemas de segundo orden, aunque con un solo parámetro de diseño hay una dependencia entre la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento $\zeta\omega_n = \dfrac{p}{2}$.

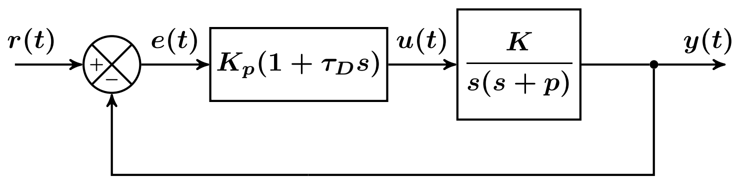

Figura 28: Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 28 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional-Derivativo (PD) ideal. La función de transferencia de lazo cerrado $H(s)$ tiene la forma

$$H(s) = \frac{K_p K(1+\tau_D s)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \tag{22.13}$$

Podemos ver que en este caso es posible elegir independientemente la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento ya que se dispone de dos parámetros de diseño (K_p, τ_D). Sin embargo el sistema de lazo cerrado no coincide con la primera forma canónica $\mathcal{G}_1(s)$ de los sistemas de segundo orden porque tiene un cero en $s = -\dfrac{1}{\tau_D}$.

La segunda forma canónica de los sistemas de segundo orden deriva de la ecuación diferencial,

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \dot{u}(t)} \tag{22.14}$$

Su función de transferencia es $\mathcal{G}_2(s)$,

$$\boxed{\mathcal{G}_2(s) = \frac{s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2}} \tag{22.15}$$

Cuando $u(t)$ es un escalón unidad $r_0(t)$ se obtiene la salida

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \tag{22.16}$$

por lo que la respuesta al escalón unidad es

$$y(t) = \left(\frac{1}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t\right) r_0(t) \tag{22.17}$$

Podemos ver que la función de transferencia de lazo cerrado 22.13 del sistema de control de la Figura 28 con un PD en el lazo directo, es una combinación lineal de las dos formas canónicas de los sistemas de segundo orden,

$$y(t) = 1 - e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha - K_p K \tau_D}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t\right) \quad t > 0^- \tag{22.18}$$

donde

$$\alpha = \frac{p + K_p K \tau_D}{2} \tag{22.19a}$$

$$\omega_d^2 = K_p K - \alpha^2 \qquad \text{Subamortiguado} \tag{22.19b}$$

Aunque no lo escribamos, también se producen respuestas sobreamortiguadas y críticamente amortiguadas.

Por lo tanto, la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_n = \sqrt{K_p K} \tag{22.20a}$$

$$\zeta = \frac{p + K_p K \tau_D}{2\sqrt{K_p K}} \tag{22.20b}$$

La introducción del factor derivativo (22.13) aumenta el coeficiente de amortiguamiento frente al caso de introducir un único factor proporcional (22.11), aunque la frecuencia natural sea la misma. Como consecuencia la atenuación aumenta haciendo disminuir la frecuencia natural amortiguada.

La conclusión más importante que debe extraerse es que son los polos del sistema los que condicionan el comportamiento de la salida de un sistema en régimen transitorio. El diseño de controladores en los sistemas de control realimentados, que modifiquen los polos de alguna forma, provocarán cambios en la respuesta transitoria. En la Figura 29 se muestran dos características fundamentales del régimen transitorio que deben utilizarse como especificaciones de diseño de los controladores: el tiempo de establecimiento t_s y la sobreelongación máxima M_p.

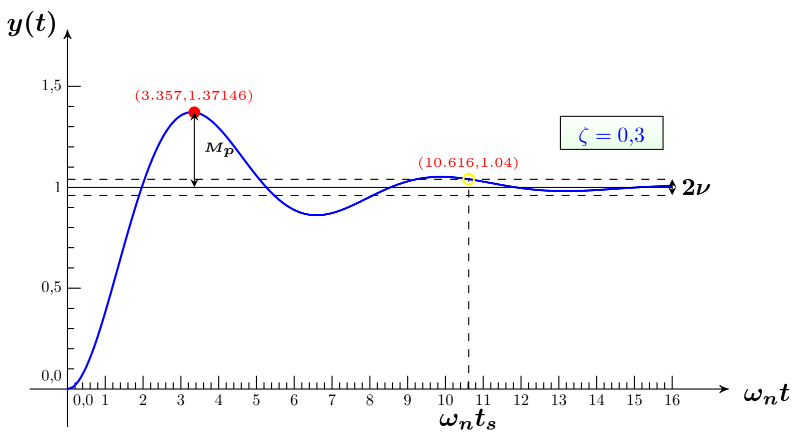

Figura 29: Características del régimen transitorio, con intervalo de tolerancia del 4 %

El tiempo de establecimiento t_s marca una frontera entre el régimen permanente práctico y el régimen transitorio. Se define en relación a un factor de tolerancia ν con respecto a la señal de referencia, como se explicó en la Sección 20. Dota de sentido práctico a la calidad del problema de seguimiento de una señal de referencia.

La sobreelongación máxima M_p solo se define para respuestas subamortiguadas, y es muy importante para evitar la saturación de la señal de control (salida del controlador) además de que es una medida del consumo de la energía de pico que se utiliza en el sistema de control realimentado. Por lo tanto debe ser seleccionado cuidadosamente.

En los Apéndices H y I se demuestra que para el caso de sistemas de segundo orden con una entrada escalón unidad, los valores de estas especificaciones de diseño satisfacen las siguientes relaciones:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \tag{22.21a}$$

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\zeta\omega_n} \tag{22.21b}$$

donde ν es la tolerancia.

23. Respuesta de los sistemas discretos de segundo orden a una entrada escalón. Relación entre polos del plano s y z

Consideremos el sistema discreto dado por la ecuación en diferencias

$$\boxed{y(k+2) - 2e^{-\alpha T}cos(\omega_d T)y(k+1) + e^{-2\alpha T}y(k) = B_0u(k+1) + B_1u(k)} \tag{23.1}$$

donde

$$B_0 = 1 - e^{-\alpha T}\cos\omega_d T - \frac{\alpha}{\omega_d}e^{-\alpha T}\sin\omega_d T \tag{23.2a}$$

$$B_1 = e^{-2\alpha T} - e^{-\alpha T}\cos\omega_d T + \frac{\alpha}{\omega_d}e^{-\alpha T}\sin\omega_d T \tag{23.2b}$$

La función de transferencia de esta ecuación en diferencias es la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden discretos $\mathcal{G}_1^D(z)$,

$$\boxed{\mathcal{G}_1^D(z) = \frac{B_0z + B_1}{z^2 - 2e^{-\alpha T}cos(\omega_d T)z + e^{-2\alpha T}}} \tag{23.3}$$

Por comodidad de notación escribremos $\mathcal{G}_1^D(z)$ en la forma

$$\boxed{\mathcal{G}_1^D(z) = \frac{B_0z + B_1}{z^2 - 2A_1z + A_2}} \tag{23.4}$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= e^{-\alpha T} cos(\omega_d T) \quad (23.5a)\\ A_2 &= e^{-2\alpha T} \quad (23.5b)\end{aligned}}$$

Cuando $u(k)$ es un escalón unidad $r_0(k)$ se obtiene la salida

$$Y(z) = \frac{z(B_0 z + B_1)}{(z-1)(z^2 - 2A_1 z + A_2)} \tag{23.6}$$

Descomponiendo en fracciones simples, $Y(s)$ queda en la forma

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{(z - e^{-\alpha T}\cos\omega_d T + \frac{\alpha}{\omega_d} e^{-\alpha T}\sin\omega_d T)z}{z^2 - 2A_1 z + A_2} \tag{23.7}$$

La transformada $\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ es la discretización exacta de la solución de la respuesta al escalón de los sistemas de segundo orden continuos expresados en la primera forma canónica, dada por 22.5

$$y(k) = \left(1 - e^{-\alpha kT}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d kT + \cos\omega_d kT\right)\right) r_0(k) \tag{23.8}$$

La segunda forma canónica de los sistemas de segundo orden discretos $\mathcal{G}_2^D(z)$ es

$$\boxed{\mathcal{G}_2^D(z) = \frac{C_0(z-1)}{z^2 - 2e^{-\alpha T}cos(\omega_d T)z + e^{-2\alpha T}}} \tag{23.9}$$

donde

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{\omega_d} e^{-\alpha T}\sin\omega_d T} \tag{23.10}$$

Esta segunda forma canónica deriva de la ecuación en diferencias siguiente

$$\boxed{y(k+2) - 2e^{-\alpha T}cos(\omega_d T)y(k+1) + e^{-2\alpha T}y(k) = C_0(u(k+1) - u(k))} \tag{23.11}$$

Cuando la entrada es un escalón unidad se obtiene la salida

$$Y(z) = \frac{C_0 z}{z^2 - 2e^{-\alpha T}cos(\omega_d T)z + e^{-2\alpha T}} \tag{23.12}$$

cuya Transformada $\mathcal{Z}$ inversa es la discretización exacta de la solución de la respuesta al escalón de los sistemas de segundo orden continuos expresados en la segunda forma canónica, dada por 22.17

$$y(k) = \left(\frac{1}{\omega_d} e^{-\alpha kT}\sin\omega_d kT\right) r_0(k) \tag{23.13}$$

Podemos observar que las formas canónicas discretas no resultan de calcular la transformada $\mathcal{Z}$ de las formas canónicas continuas. Sin embargo sí son la transformada $\mathcal{Z}$ cuando se introduce un ZOH a su entrada, como se estudió en la Sección 15.1 de la Parte II[2]. Por esta razón al definirlas de esta manera se obtienen discretizaciones exactas de la salida para una entrada escalón. Esto significa que tanto el coeficiente de amortiguamiento ζ como la frecuencia natural ω_n coinciden en los casos continuo y discreto.

Dada una función de transferencia discreta de segundo orden pueden obtenerse los parámetros de régimen transitorio (ζ, ω_n) teniendo en cuenta las relaciones obtenidas anteriormente. Es decir, dado el polinomio característico discreto $P(z) = z^2 - 2k_1z + k_2$ se deberán cumplir las relaciones

$$k_1 = e^{-\alpha T}cos(\omega_d T) \tag{23.14a}$$

$$k_2 = e^{-2\alpha T} \tag{23.14b}$$

Despejando α y ω_d se calcularía (ζ, ω_n) del sistema discreto.

Puede comprobarse que las raíces del polinomio característico discreto $P(z) = z^2 - 2k_1z + k_2$ con las relaciones 23.14 son $z_{1,2} = e^{(-\alpha \pm j\omega_d)T}$, es decir que satisfacen la relación $z = e^{sT}$. En la Figura 30 se muestra la relación entre polos en los planos complejos s y z. Cada rectángulo del plano s situado en la franja principal se transforma en un sector circular del plano z centrado en el origen.

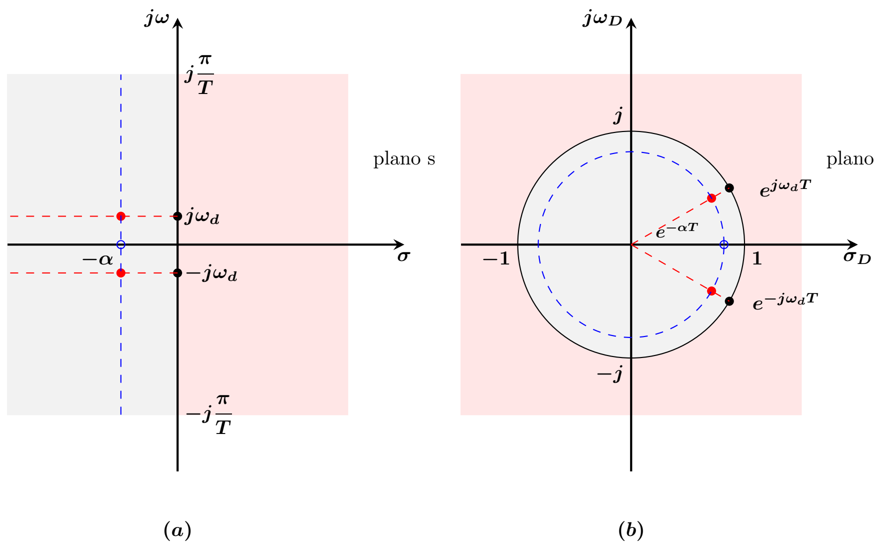

Figura 30: Polos en los planos complejos s y z

24. Modificación de las características de régimen transitorio en los sistemas de control realimentado híbridos

En la Sección 22 se vió que al introducir un controlador PD ideal en el lazo directo de un sistema realimentado para controlar un sistema de segundo orden y tipo uno, se producía un aumento del coeficiente de amortiguamiento. Sin embargo el sistema de lazo cerrado era de segundo orden, aunque de tipo cero. De hecho la función de transferencia de lazo cerrado resultó ser una combinación lineal de las funciones de transferencia canónicas de los sistemas de segundo orden continuos.

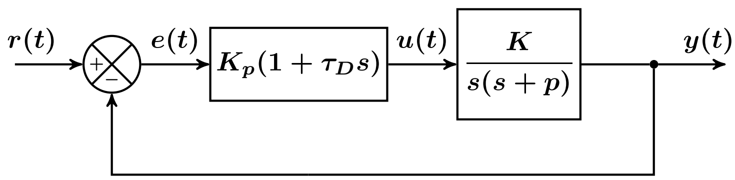

Figura 31: Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

La Figura 31 muestra este sistema continuo, y la Figura 32 un esquema que garantiza que la discretización da lugar a una función de transferencia de lazo cerrado discreta, que también es combinación lineal de las formas canónicas de los sistemas de segundo orden discretos, como se explicó en la Sección 23. Pero esto es cierto cuando la entrada es un escalón, $r(t) = r_0(t)$. Entonces $\tilde{r}(t) = r_0(t)$ en la Figura.

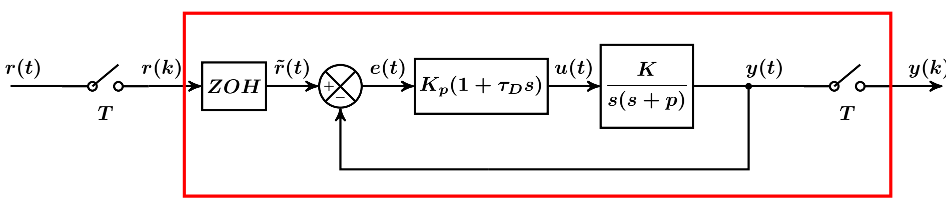

Figura 32: Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno muestreado

Pero este esquema de la Figura 32 es completamente distinto del sistema de control realimentado híbrido que resulta de discretizar el controlador PD, como vamos a ver a continuación.

El controlador PD ideal continuo tiene la forma diferencial

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \tau_D \dot{e}(t) \right) \tag{24.1}$$

En el Apéndice F se demuestra que la función de transferencia del Controlador PD ideal discretizado utilizando el método de discretización de Euler en atraso es

$$G_{PD,D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p\left(1 + \frac{\tau_D}{T}\frac{z-1}{z}\right) \tag{24.2}$$

En la Figura 33 se representa el esquema de bloques de un sistema control realimentado híbrido con un controlador PD discretizado.

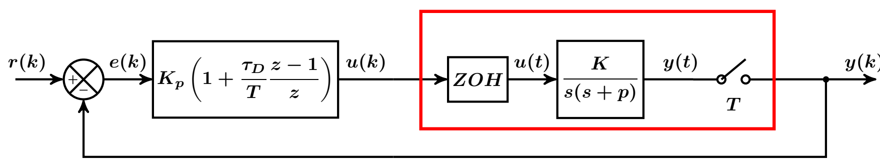

Figura 33: Controlador PD discreto para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 34 se muestra el sistema discretizado del sistema híbrido de la Figura 33 (ver el Apéndice C de la Parte III[3])

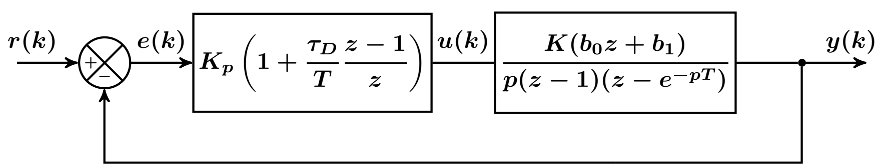

Figura 34: Controlador PD discreto para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno discretizado donde $b_0 = \frac{e^{-pT} - 1 + pT}{p}$ y $b_1 = \frac{1-(1+pT)e^{-pT}}{p}$

La función de transferencia de lazo cerrado $H_D(z)$ del sistema de control de la Figura 34 es

$$H_D(z) = \frac{K_pK(\tau_D(z-1)+Tz)(b_0z+b_1)}{Tpz(z-1)(z-e^{-pT}) + K_pK(\tau_D(z-1)+Tz)(b_0z+b_1)} \tag{24.3}$$

Por lo tanto, la salida $Y(z)$ para una entrada escalón unidad es

$$Y(z) = \frac{K_pK(\tau_D(z-1)+Tz)(b_0z+b_1)z}{(z-1)(Tpz(z-1)(z-e^{-pT}) + K_pK(\tau_D(z-1)+Tz)(b_0z+b_1))} \tag{24.4}$$

Podemos ver que se trata de un sistema discreto de tercer orden por lo que los valores de las características de régimen transitorio serán distintas del sistema continuo de la Figura 31.

No obstante puede comprobarse, aplicando el teorema del valor final como se estudia en la Sección 20, que las propiedades de régimen permanente se convervan: el error de régimen permanente a la señal de referencia escalón es nulo en ambos y para la señal de referencia rampa es constante en ambos y de valor $e(\infty) = \dfrac{p}{K_p K}$.

25. Ejemplo de diseño de controladores con especificaciones de régimen permanente, régimen transitorio y estabilidad de un sistema de control realimentado

Ejemplo 25.1. *Deseamos diseñar un controlador continuo para el sistema continuo*

$$\boxed{G(s) = \frac{K}{s(s+p)}} \tag{25.1}$$

donde $K, p \in \mathbb{R}^+$, que satisfaga las siguientes especificaciones, además de que el sistema en lazo cerrado sea estable:

1. *Que el error en régimen permanente a la señal de referencia parabólica $r(t) = \frac{1}{2}t^2 < K_e^H$ con $K_e^H \in (0, \infty)$.*

2. *Que tenga un polo dominante en lazo cerrado $p^H = -\sigma^H + j\omega^H$ (y su complejo conjugado si $\omega^H \neq 0$).*

La especificación de régimen permanente puede analizarse aplicando el teorema del valor final a la señal de error. Supondremos que $e(t)$ es estable,

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s(1 - H(s))R(s) \tag{25.2}$$

En primer lugar debe seleccionarse la estructura de control. Escogemos la estructura de lazo directo, es decir que pretendemos diseñar un controlador $G_c(s)$ que se encuentre en el lazo directo del sistema realimentado. Por lo tanto la función de transferencia de lazo cerrado $H(s)$ tiene la forma

$$H(s) = \frac{KN_c(s)}{s(s+p)D_c(s) + KN_c(s)} \tag{25.3}$$

donde

$$G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \tag{25.4}$$

Por lo tanto

$$1 - H(s) = \frac{s(s+p)D_c(s)}{s(s+p)D_c(s) + KN_c(s)} \tag{25.5}$$

De aquí que

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 pD_c(s)}{KN_c(s)} R(s) \tag{25.6}$$

En segundo lugar diseñaremos el controlador de tal manera que sea el más simple posible, pero que satisfaga la especificación de régimen permanente.

Puesto que el error de régimen permanente debe ser nulo para las señales de referencia escalón y rampa, pero debe ser menor que una constante prefijada

K_e^H para la señal de referencia parabólica, la expresión de la derecha de 25.6 debe contener un término en s^3 en el numerador por lo que $D_c(s)$ deberá tener la forma $D_c(s) = sD'_c(s)$ donde $D'_c(0) \neq 0$. Por lo tanto, el controlador más simple es el caso en que $D_c(s) = s$. De aquí que

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^3 p}{KN_c(s)} R(s) \tag{25.7}$$

Por otro lado, puesto que $D_c(s) = s$, entonces el numerador del controlador $N_c(0) \neq 0$ o en caso contrario habría una cancelación de un cero y un polo $s = 0$ en el controlador. El caso más simple es que $N_c(s) = K_c$, por lo que

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^3 p}{KK_c} R(s) \tag{25.8}$$

De esta manera el controlador sería de tipo Integrador (Controlador I)

$$G_c(s) = \frac{K_c}{s} \tag{25.9}$$

y el error en régimen permanente para la señal de referencia parabólica será

$$e(\infty) = \frac{p}{KK_c} \tag{25.10}$$

En consecuencia, suponiendo que $K_c > 0$, dado K_e^H se deberá cumplir que

$$K_c > \frac{p}{KK_e^H} \tag{25.11}$$

Hemos dado por supuesto que la señal de error es estable pero debe analizarse la estabilidad en el sentido de Hurwitz del polinomio característico. Esto puede hacerse utilizando la Tabla de Routh para el polinomio $P(s) = s(s+p)D_c(s) + KN_c(s) = s^2(s+p) + KK_c = s^3 + ps^2 + KK_c$,

$$\begin{array}{r||cc} s^3: & 1 & 0 \\ s^2: & p & KK_c \\ s^1: & -\dfrac{KK_c}{p} & 0 \\ s^0: & KK_c & 0 \end{array} \tag{25.12}$$

Suponiendo que $K_c > 0$ hay dos cambios de signo en la primera columna. Si $K_c < 0$ habrá un cambio de signo por lo que en cualquier caso la elección de un controlador I no satisface la especificación de estabilidad, además de que no permite aplicar el teorema del valor final. Entonces se debe cambiar el controlador seleccionado y rehacer todos los cálculos. Elegiremos un Comtrolador PI. En este caso lo único que debemos cambiar es el numerador del controlador,

$$G_c(s) = \frac{K_p(\tau_I s + 1)}{\tau_I s} \tag{25.13}$$

La expresión 25.7 quedará en la misma forma

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s^3 p}{KK_c} R(s) \tag{25.14}$$

donde $K_c = \dfrac{K_p}{\tau_I}$.

La condición 25.11 seguirá siendo válida.

La Tabla de Routh para el Controlador PI se deberá construir para el polinomio característico $P(s) = s^2(s+p) + KK_c(\tau_I s+1) = s^3 + ps^2 + KK_c\tau_I s + KK_c$,

$$\begin{array}{r||cc} s^3: & 1 & KK_c\tau_I \\ s^2: & p & KK_c \\ s^1: & \dfrac{KK_c(p\tau_I - 1)}{p} & 0 \\ s^0: & KK_c & 0 \end{array} \tag{25.15}$$

Ahora ya es posible tener un sistema realimentado estable con $K_c > 0$, siempre que

$$\tau_I > \frac{1}{p} \tag{25.16}$$

Por el momento se ha logrado diseñar un controlador PI que satisface la especificación de régimen permanente, además de que el sistema de control realimentado sea estable. Nos queda por analizar la especificación de régimen transitorio.

Puesto que la especificación de régimen transitorio se ha enunciado como un problema de asignación de un polo de lazo cerrado dominante, se deberá cumplir que este polo sea raíz de la ecuación característica, además de que sea dominante. Supongamos que sea un polo complejo, entonces

$$P(s) = s^3 + ps^2 + KK_c\tau_I s + KK_c = (s+p_1)\left((s+\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2\right) \tag{25.17}$$

donde $-p_1$ es el polo real que no debe ser dominante, es decir $p_1 \gg \sigma^H$.

Identificando términos de la misma potencia en 25.17 se obtienen las ecuaciones

$$p = 2\sigma^H + p_1 \tag{25.18a}$$
$$KK_c\tau_I = (\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2 + 2\sigma^H p_1 \tag{25.18b}$$
$$KK_c = \left((\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2\right) p_1 \tag{25.18c}$$

Puesto que debe cumplirse que $p_1 \gg \sigma^H$, puede analizarse este problema suponiendo que el polo real no dominante es $p_1 \approx p$, entonces pueden obtenerse los parámetros del controlador PI, (K_p, τ_I) con facilidad. Concretamente, sustituyendo la relación 25.18c en 25.18b

$$\tau_I \approx \frac{(\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2 + 2\sigma^H p}{\left((\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2\right) p} = \frac{1}{p} + \frac{2\sigma^H}{(\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2} \tag{25.19}$$

Como vemos $\tau_I > \dfrac{1}{p}$, por lo que se satisface la condición de estabilidad dada por 25.16.

El valor de K_c deriva de la expresión 25.18c, y puesto que $K_c = \dfrac{K_p}{\tau_I}$ entonces

$$K_p \approx \frac{(\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2 + 2\sigma^H p}{K} \tag{25.20}$$

De acuerdo con la relación 25.18a el valor de $p_1 = p - 2\sigma^H$, que siempre será menor que p. El problema que puede surgir es que el polo complejo de lazo cerrado no sea suficientemente dominante o que el polo real p_1 sea inestable. Si este fuese el caso debería cambiarse el controlador PI por otro rehaciendo todos los cálculos. No obstante dejaremos este ejemplo resuelto en este punto, ya que de esta manera ha quedado planteada una metodología de diseño.

No obstante conviene observar que la especificación de régimen permanente viene dada por la desigualdad 25.11 $K_c > \dfrac{p}{KK_e^H}$, que de acuerdo con 25.18c implica que

$$\left((\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2\right) p_1 > \frac{p}{K_e^H} \tag{25.21}$$

Si se escogiese el valor $p_1 \approx p$ se debería cumplir que $\left((\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2\right) K_e^H > 1$, por lo que la elección del Controlador PI puede, en algunos casos, no resultar adecuada.

El siguiente controlador que podría diseñarse es un PID con un cero doble, y si este controlador tampoco permitiese resolver el problema de satisfacción de las especificaciones de diseño se elegiría un PID.

25.1. Comentarios al ejemplo: elección del polo dominante

Un problema práctico consiste en cómo asignar valores al polo dominante $-\sigma^H \pm j\omega^H$ del ejemplo de la sección anterior 25.

Una idea es considerar que al elegir un único polo dominante complejo lo que se está haciendo es suponer que dominará la respuesta de régimen transitorio de un sistema de segundo orden, aunque el sistema de lazo cerrado del ejemplo con un controlador PI sea de tercer orden.

El polinomio característico de un sistema de segundo orden en su forma canónica estudiado en la Sección 22 tiene la forma

$$P_2(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 \tag{25.22}$$

El polinomio característico del ejemplo con el controlador PI está dado por 25.17

$$P(s) = (s + p_1)\left((s + \sigma^H)^2 + (\omega^H)^2\right) \tag{25.23}$$

La idea de diseño es que el sistema de lazo cerrado tendrá un comportamiento de régimen transitorio a la señal de referencia escalón similar al de la forma canónica, es decir

$$s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = (s + \sigma^H)^2 + (\omega^H)^2 \tag{25.24}$$

Identificando términos

$$\omega_n^2 = (\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2 \tag{25.25a}$$

$$\zeta\omega_n = \sigma^H \tag{25.25b}$$

De aquí que $\omega^H = \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ represente la frecuencia natural amortiguada, y σ^H la atenuación de un sistema de segundo orden.

Podemos también suponer que al ser dominante el polo complejo se obtendrá una sobreelongación máxima M_p y un tiempo de establecimiento t_s a la señal de referencia escalón unidad similar al de los sistemas de segundo orden, es decir que satisfarán las expresiones 22.21

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \tag{25.26a}$$

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\zeta\omega_n} \tag{25.26b}$$

donde ν es la tolerancia.

Podemos expresar M_p y t_s en función de la parte real e imaginaria del polo complejo, que para $\nu = 0{,}02$ serían

$$M_p = e^{-\frac{\sigma^H}{\omega^H}\pi} \tag{25.27a}$$

$$t_s \approx \frac{4}{\sigma^H} \tag{25.27b}$$

Con estos comentarios parece razonable admitir que la elección del polo dominante es equivalente, aproximadamente a la elección de los valores de M_p y t_s, aunque esto solo sea aproximadamente cierto si el polo real $p_1 \approx p$. En caso contrario se observará el efecto de este polo en el comportamiento del sistema de control realimentado del ejemplo anterior.

Supongamos que $p = 40$ y que se desea un tiempo de establecimiento $t_s = 0{,}1$ segundos. Entonces $\sigma^H = 40$. De aquí que $p_1 = -40$, por lo que el sistema realimentado sería inestable. Pero si $p = 120$, entonces $p_1 = 40 = \sigma^H$, por lo que el polo complejo no sería dominante. En ambos casos conviene rehacer todo el cálculo del ejemplo anterior estudiando otro tipo de controlador, como por ejemplo un PID.

D. Sistemas de segundo orden amortiguados continuos y discretos

D.1. Sistema de segundo orden amortiguado continuo

Consideremos el sistema de segundo orden continuo libre dado por la ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0 \tag{D.1}$$

con las condiciones iniciales $[y(0^-), \dot{y}(0^-)]$ y $\alpha, \omega_n \in \mathbb{R}^+$.

Aplicando la Transformada de Laplace se obtiene

$$(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)Y(s) = y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + 2\alpha y(0^-) \tag{D.2}$$

que puede escribirse en la forma

$$Y(s) = \frac{y(0^-)(s + 2\alpha)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} + \frac{\dot{y}(0^-)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \tag{D.3}$$

donde

$$\alpha_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} \tag{D.4}$$

Podemos distinguir tres casos según que $\alpha < \omega_n$, $\alpha > \omega_n$ o $\alpha = \omega_n$ que analizamos a continuación por separado. Para caracterizarlos utilizaremos el coeficiente de amortiguamiento ζ donde $\alpha = \zeta\omega_n$.

D.1.1. Sistema de segundo orden subamortiguado: $\zeta < 1$

Cuando $\zeta < 1$ podemos hacer

$$\alpha_1 = \alpha + j\omega_d \tag{D.5a}$$

$$\alpha_2 = \alpha - j\omega_d \tag{D.5b}$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$.

De la relación D.3 extraemos los factores de la derecha.

El primero puede escribirse en la forma de fracciones simples

$$\frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{1}{2j\omega_d}\left[\frac{\alpha_1}{s + \alpha_2} - \frac{\alpha_2}{s + \alpha_1}\right] \tag{D.6}$$

El segundo puede escribirse en la forma de fracciones simples

$$\frac{1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{1}{2j\omega_d}\left[\frac{1}{s + \alpha_2} - \frac{1}{s + \alpha_1}\right] \tag{D.7}$$

Por lo tanto calculando $\mathcal{L}_-^{-1}\{Y(s)\}$, se obtiene

$$y(t) = \frac{y(0^-)}{2j\omega_d}\left[\alpha_1 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{-\alpha_1 t}\right] + \frac{\dot{y}(0^-)}{2j\omega_d}\left[e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right] \tag{D.8}$$

que puede escribirse en la forma

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t}\frac{\alpha_1 e^{j\omega_d t} - \alpha_2 e^{-j\omega_d t}}{2j\omega_d} + \dot{y}(0^-)e^{-\alpha t}\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j\omega_d} \tag{D.9}$$

Por fin puede escribirse en la forma trigonométrica

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \tag{D.10}$$

Podemos escribir la solución D.10 en las componentes trigonométricas.

$$y(t) = \left(\frac{y(0^-)\alpha + \dot{y}(0^-)}{\omega_d}\right)e^{-\alpha t}\sin\omega_d t + y(0^-)e^{-\alpha t}\cos\omega_d t \tag{D.11}$$

Teniendo en cuenta la independencia de $y(0^-)$ y de $\dot{y}(0^-)$ puede hacerse $y(0^-) = 0$ en las relaciones D.10 y D.3 y después $\dot{y}(0^-) = 0$ obteniendo

$$\mathcal{L}_-\left\{e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\right\} = \frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} \tag{D.12a}$$

$$\mathcal{L}_-\left\{e^{-\alpha t}\cos\omega_d t\right\} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2} \tag{D.12b}$$

D.1.2. Sistema de segundo orden sobreamortiguado: $\zeta > 1$

Cuando $\zeta > 1$

$$\alpha_1 = \alpha + \tilde{\omega}_d \tag{D.13a}$$

$$\alpha_2 = \alpha - \tilde{\omega}_d \tag{D.13b}$$

donde $\tilde{\omega}_d = \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Observando que

$$\omega_d = -j\tilde{\omega}_d \tag{D.14}$$

podemos utilizar las relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas:

$$\sin jx = j\sinh x \tag{D.15a}$$

$$\cos jx = \cosh x \tag{D.15b}$$

Sustituyendo estas relaciones en D.10 se obtiene

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\tilde{\omega}_d}\sinh\tilde{\omega}_d t + \cosh\tilde{\omega}_d t\right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\tilde{\omega}_d}e^{-\alpha t}\sinh\tilde{\omega}_d t \tag{D.16}$$

Este resultado conviene expresarlo en la forma de exponenciales, obteniéndolo fácilmente de las expresiones D.6 y D.7, junto con D.3

$$y(t) = \left(\frac{\alpha_1 y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{2\tilde{\omega}_d}\right)e^{-\alpha_2 t} - \left(\frac{\alpha_2 y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{2\tilde{\omega}_d}\right)e^{-\alpha_1 t} \tag{D.17}$$

D.1.3. Sistema de segundo orden críticamente amortiguado: $\zeta = 1$

Cuando $\zeta = 1$ se cumple que $\alpha = \omega_n$ y que $\omega_d = 0$.
Calculando el límite cuando $\omega_d \to 0$ en la ecuación D.10

$$y(t) = \lim_{\omega_d \to 0} \left\{ y(0^-)e^{-\omega_n t} \left(\frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_d} e^{-\omega_n t} \sin \omega_d t \right\} \tag{D.18}$$

resulta

$$y(t) = y(0^-)e^{-\omega_n t} \left(\omega_n \lim_{\omega_d \to 0} \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} + 1 \right) + \dot{y}(0^-)e^{-\omega_n t} \lim_{\omega_d \to 0} \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} \tag{D.19}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$y(t) = y(0^-) \left(\omega_n t + 1 \right) e^{-\omega_n t} + \dot{y}(0^-)te^{-\omega_n t} \tag{D.20}$$

En este caso, la ecuación diferencial dada por D.1 puede escribirse en la forma

$$\ddot{y}(t) + 2\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0 \tag{D.21}$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$(s + \omega_n)^2 Y(s) = y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + 2\omega_n y(0^-) \tag{D.22}$$

La ecuación D.20 puede escribirse en la forma

$$y(t) = \left(y(0^-)\omega_n + \dot{y}(0^-) \right) te^{-\omega_n t} + y(0^-)e^{-\omega_n t} \tag{D.23}$$

Aplicando ahora la Transformada de Laplace a la ecuación D.23 se obtiene

$$Y(s) = \left(y(0^-)\omega_n + \dot{y}(0^-) \right) \mathcal{L}_- \left\{ te^{-\omega_n t} \right\} + y(0^-) \frac{1}{s + \omega_n} \tag{D.24}$$

Comparando las expresiones D.22 y D.24 se obtiene

$$\boxed{\mathcal{L}_- \left\{ te^{-\omega_n t} \right\} = \frac{1}{(s + \omega_n)^2}} \tag{D.25}$$

D.2. Sistema de segundo orden amortiguado discreto

Consideremos el sistema de segundo orden discreto libre dado por la ecuación en diferencias

$$y(k + 2) - 2e^{-\alpha T} cos(\omega_d T) y(k + 1) + e^{-2\alpha T} y(k) = 0 \tag{D.26}$$

con las condiciones iniciales $[y(0), y(T)]$ y $\alpha, T \in \mathbb{R}^+$ y $\omega_d \in \mathbb{C}$.
Estudiraemos los casos en que $\omega_d \in \mathbb{R}^+$ y $\omega_d = -j\tilde{\omega}_d$ con $\tilde{\omega}_d \in \mathbb{R}^+$.

Cuando $\omega_d = -j\tilde{\omega}_d$ y teniendo en cuenta que $\cos(-j\tilde{\omega}_d T) = \cosh(\tilde{\omega}_d T)$, la ecuación en diferencias D.26 puede escribirse en la forma

$$y(k+2) - 2e^{-\alpha T} cosh(\tilde{\omega}_d T) y(k+1) + e^{-2\alpha T} y(k) = 0 \tag{D.27}$$

Aplicando la Transformada $\mathcal{Z}$ a la ecuación en diferencias D.26 se obtiene

$$(z^2 - 2e^{-\alpha T} cos(\omega_d T) z + e^{-2\alpha T}) Y(z) = \big(y(0)z + y(T) - 2e^{-\alpha T} cos(\omega_d T) y(0)\big) z \tag{D.28}$$

que puede escribirse en la forma

$$Y(z) = \frac{y(0)\left(z - 2e^{-\alpha T} cos(\omega_d T)\right) z}{\left(z - e^{-\alpha_1 T}\right)\left(z - e^{-\alpha_2 T}\right)} + \frac{y(T) z}{\left(z - e^{-\alpha_1 T}\right)\left(z - e^{-\alpha_2 T}\right)} \tag{D.29}$$

donde

$$\alpha_{1,2} = \alpha \pm j\omega_d = \alpha \pm \tilde{\omega}_d \tag{D.30}$$

Los factores de la derecha de la expresión D.29 pueden escribirse en la forma de fracciones simples,

$$\frac{z - 2e^{-\alpha T}\cos\omega_d T}{\left(z - e^{-\alpha_1 T}\right)\left(z - e^{-\alpha_2 T}\right)} = \frac{1}{2j\sin\omega_d T}\left[\frac{e^{j\omega_d T}}{z - e^{-\alpha_1 T}} - \frac{e^{-j\omega_d T}}{z - e^{-\alpha_2 T}}\right] \tag{D.31a}$$

$$\frac{1}{\left(z - e^{-\alpha_1 T}\right)\left(z - e^{-\alpha_2 T}\right)} = \frac{-1}{2je^{-\alpha T}\sin\omega_d T}\left[\frac{1}{z - e^{-\alpha_1 T}} - \frac{1}{z - e^{-\alpha_2 T}}\right] \tag{D.31b}$$

Las expresiones para el caso $\omega_d = -j\tilde{\omega}_d$ se obtienen de manera idéntica teniendo en cuenta que $\sin j\tilde{\omega}_d T = j\sinh\tilde{\omega}_d T$.

Puede ahora obtenerse $\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ de la expresión D.29

$$y(k) = \frac{y(T)}{e^{-\alpha T}\sin\omega_d T}\left[e^{-k\alpha T}\sin k\omega_d T\right] - \frac{y(0)}{\sin\omega_d T}\left[e^{-k\alpha T}\sin{(k-1)}\omega_d T\right] \tag{D.32}$$

Sustituyendo el desarrollo $\sin{(k-1)}\omega_d T = \sin k\omega_d T\cos\omega_d T - \cos k\omega_d T\sin\omega_d T$,

$$y(k) = \left(\frac{y(T) - y(0)e^{-\alpha T}\cos\omega_d T}{e^{-\alpha T}\sin\omega_d T}\right) e^{-k\alpha T}\sin k\omega_d T + y(0)e^{-k\alpha T}\cos k\omega_d T \tag{D.33}$$

Comparando este resultado con la solución continua dada por D.11, puede comprobarse haciendo $t = T$ que

$$\dot{y}(0^-) = \frac{y(T)\omega_d e^{\alpha T} - y(0^-)(\omega_d\cos\omega_d T + \alpha\sin\omega_d T)}{\sin\omega_d T} \tag{D.34}$$

Cuando $\omega_d = -j\tilde{\omega}_d$ se obtiene

$$\dot{y}(0^-) = \frac{y(T)\tilde{\omega}_d e^{\alpha T} - y(0^-)(\tilde{\omega}_d\cosh\tilde{\omega}_d T + \alpha\sinh\tilde{\omega}_d T)}{\sinh\tilde{\omega}_d T} \tag{D.35}$$

Cuando $\omega_d = 0$ puede obtenerse la anterior relación calculando el límite cuando $\omega_d \to 0$ en la expresión D.34,

$$\dot{y}(0^-) = \frac{y(T)e^{\alpha T} - y(0^-)(1 + \alpha T)}{T} \tag{D.36}$$

E. Discretización de un Controlador PI por el método de Euler en atraso

El controlador PI continuo tiene la forma integral

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \tag{E.1}$$

Derivando esta ecuación se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

$$\dot{u}(t) = K_p \left(\dot{e}(t) + \frac{1}{\tau_I} e(t) \right) \tag{E.2}$$

Utilizando el método de discretización de Euler en atraso explicado en la Sección 15.2 de la Parte II[2], se obtiene la ecuación en diferencias

$$\frac{u(k) - u(k-1)}{T} = K_p \left(\frac{e(k) - e(k-1)}{T} + \frac{1}{\tau_I} e(k) \right) \tag{E.3}$$

que puede escribirse en la forma

$$u(k) = u(k-1) + K_p \left(\left(1 + \frac{T}{\tau_I} \right) e(k) - e(k-1) \right) \tag{E.4}$$

La función de transferencia del Controlador PI discretizado es,

$$G_{PI,D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{T}{\tau_I} \frac{z}{z-1} \right) \tag{E.5}$$

F. Discretización de un Controlador PD ideal por el método de Euler en atraso

El controlador PD continuo ideal tiene la forma diferencial

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \tau_D \dot{e}(t) \right) \tag{F.1}$$

Utilizando el método de discretización de Euler en atraso explicado en la Sección 15.2 de la Parte II[2], se obtiene la ecuación en diferencias

$$u(k) = K_p \left(e(k) + \frac{\tau_D}{T} \left(e(k) - e(k-1) \right) \right) \tag{F.2}$$

que puede escribirse en la forma

$$u(k) = K_p \left(\left(1 + \frac{\tau_D}{T} \right) e(k) - \frac{\tau_D}{T} e(k-1) \right) \tag{F.3}$$

La función de transferencia del Controlador PD ideal discretizado es,

$$G_{PD,D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{\tau_D}{T} \frac{z-1}{z} \right) \tag{F.4}$$

G. Discretización de un Controlador PID ideal por el método de Euler en atraso

El controlador PID continuo tiene la forma integral

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \tau_D \dot{e}(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \tag{G.1}$$

Derivando esta ecuación se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

$$\dot{u}(t) = K_p \left(\dot{e}(t) + \tau_D \ddot{e}(t) + \frac{1}{\tau_I} e(t) \right) \tag{G.2}$$

Teniendo en cuenta que $\ddot{e}(t)$ puede discretizarse por el método de Euler en atraso explicado en la Sección 15.2 de la Parte II[2] como

$$\ddot{e}(t) \approx \left(\frac{\frac{e(k) - e(k-1)}{T} - \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T}}{T} \right) \tag{G.3}$$

la discretización del PID resulta en la siguiente ecuación en diferencias

$$\frac{u(k) - u(k-1)}{T} = K_p \left(\frac{e(k) - e(k-1)}{T} + \tau_D \frac{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)}{T^2} + \frac{1}{\tau_I} e(k) \right) \tag{G.4}$$

que puede escribirse en la forma

$$u(k) = u(k-1) + K_p \left(\left(1 + \frac{\tau_D}{T} + \frac{T}{\tau_I} \right) e(k) - \left(1 + \frac{2\tau_D}{T} \right) e(k-1) + \frac{\tau_D}{T} e(k-2) \right) \tag{G.5}$$

La función de transferencia del Controlador PID discretizado es,

$$G_{PID,D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{\tau_D}{T} \frac{z-1}{z} + \frac{T}{\tau_I} \frac{z}{z-1} \right) \tag{G.6}$$

H. Cálculo de la sobreelongación M_p y tiempo de pico t_p de la respuesta subamortiguada al escalón unidad de los sistemas de segundo orden

La solución subamortiguada tiene la forma

$$y(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) \right) r_0(t) \tag{H.1}$$

donde

$$\alpha = \zeta \omega_n \tag{H.2a}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \tag{H.2b}$$

$$\cos\phi = \sqrt{1-\zeta^2} \tag{H.2c}$$

$$\sin\phi = \zeta \tag{H.2d}$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión H.1 e igualando a cero se obtienen los puntos de pendiente nula, y en particular el tiempo de pico t_p

$$\alpha\cos(\omega_d t^* - \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t^* - \phi) = 0 \tag{H.3}$$

De aquí que

$$\tan(\omega_d t^* - \phi) + \tan\phi = 0 \tag{H.4}$$

por lo que

$$\omega_d t^* = n\pi \tag{H.5}$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

El tiempo de pico t_p se producirá para $n = 1$, por lo cual

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{H.6}$$

Sustituyendo t_p en la ecuación H.1 se obtiene la sobreelongación $M_p = 1 - y(t_p)$,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \tag{H.7}$$

I. Cálculo del tiempo de establecimeiento t_s de la respuesta subamortiguada al escalón unidad de los sistemas de segundo orden

Las envolventes de la curva $y(t)$ son las curvas $\tilde{y}(t)$ tangentes a ella por el exterior,

$$\tilde{y}(t) = 1 \pm \frac{\alpha}{\omega_d} e^{-\alpha t} \tag{I.1}$$

La diferencia entre las dos envolventes en el instante de tiempo de establecimiento define aproximadamente el doble del margen de tolerancia ν, por lo que

$$(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t_s}) - (1 - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t_s}) \approx 2\nu \tag{I.2}$$

De aquí que

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{\zeta}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\zeta\omega_n} \tag{I.3}$$

De hecho t_s es menor o igual que el valor del término de la derecha ya que los puntos de la envolvente están en el exterior de la curva $y(t)$. El valor exacto cumple que $|1 - y(t_s)| = \nu$.

Para una tolerancia del 2 %, $\nu = 0{,}02$ suele definirse el tiempo de establecimiento como

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{I.4}$$

Este resultado sigue aproximadamente la fórmula

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\dfrac{1}{\nu}\right)}{\zeta\omega_n} \tag{I.5}$$

Bibliografía

[1] F. Monasterio-Huelin and A. Gutiérrez, *Apuntes de Teoría. Primera Parte.* SECO2014-I, 2014. [Online]. Available: http://robolabo.etsit.upm.es

[2] ——, *Apuntes de Teoría. Segunda Parte.* SECO2014-II, 2014. [Online]. Available: http://robolabo.etsit.upm.es

[3] ——, *Apuntes de Teoría. Tercera Parte.* SECO2014-III, 2014. [Online]. Available: http://robolabo.etsit.upm.es