

SECO 2014-V ([1, 2, 3, 4])

Félix Monasterio-Huelin y Álvaro Gutiérrez

2 de mayo de 2014

Índice

Índice	109
Índice de Figuras	109
Índice de Tablas	110
26.Lugar de Raíces: Introducción	111
26.1. Ejemplo de semiasíntotas y de centro asintótico	117
27.Lugar de Raíces en el eje real	117
28.Lugar de Raíces: Intervalos de estabilidad	122
J. Lugar de Raíces: Puntos de ruptura reales	124
Bibliografía	131

Índice de Figuras

35. Esquema general para la representación del Lugar de Raíces . . .	111
36. Lugar de Raíces de 26.6	112
37. Lugar de Raíces de 26.6 señalando las tres ramas y sus puntos notables.	113
38. Lugar de Raíces para $K = 36,08$	114
39. Lugar de Raíces para $K = 131,65$	114
40. Lugar de Raíces para $K = 300,64$	115
41. Lugar de Raíces: semiasíntotas y centro asintótico	116
42. Lugar de Raíces: semiasíntotas	117
43. Lugar de Raíces de 27.1	118
44. Lugar de Raíces de 27.2	119
45. Lugar de Raíces de 27.3	120

46.	Lugar de Raíces de 27.3	122
47.	Lugar de Raíces cercana al círculo unidad de 28.2	123
48.	Puntos de ruptura doble para $K = 0$	124
49.	Punto de ruptura doble para $K = 0$	125
50.	Punto de ruptura doble para $K = 0$	126
51.	Puntos de ruptura: doble para $K = 0$ y triple para $K = 243$	127
52.	Puntos de ruptura: dobles para $K = 0$, $K = 182,25$ y $K = 216$	128
53.	Puntos de ruptura dobles para $K = 0$ y $K = 159,33$	129

Índice de Tablas

26. Lugar de Raíces: Introducción

El Lugar de Raíces representa en el plano complejo s el lugar geométrico de los polos de lazo cerrado del sistema de control realimentado, en función de los diferentes valores de la ganancia $K \in [0, \infty]$ de un controlador situado en el lazo directo, como se muestra en la Figura 35. Es decir es la representación de las raíces de la ecuación característica para los infinitos valores de K positivos,

$$1 + KG(s) = 0 \quad (26.1)$$

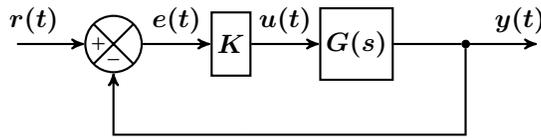


Figura 35: Esquema general para la representación del Lugar de Raíces

Nuestro objetivo en esta Sección es explicar cómo debe interpretarse la representación gráfica del Lugar de Raíces a través de un ejemplo numérico. Para ello conviene representar la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ en la forma racional de dos polinomios en s , $N(s)$ y $D(s)$,

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (26.2)$$

Entonces la ecuación característica del sistema realimentado tendrá la forma

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad (26.3)$$

Consideremos la función de transferencia de lazo abierto siguiente:

$$G(s) = \frac{s + c}{(s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (26.4)$$

En la Figura 36 se muestra el Lugar de Raíces para la función de transferencia dada por 26.4 con los siguientes valores:

$$c = \frac{3}{2} \quad (26.5a)$$

$$p = 25 \quad (26.5b)$$

$$\omega_n = 2 \quad (26.5c)$$

$$\zeta = \frac{3}{4} \quad (26.5d)$$

La función de transferencia simulada es:

$$G(s) = \frac{s + 1,5}{s^3 + 28s^2 + 79s + 100} \quad (26.6)$$

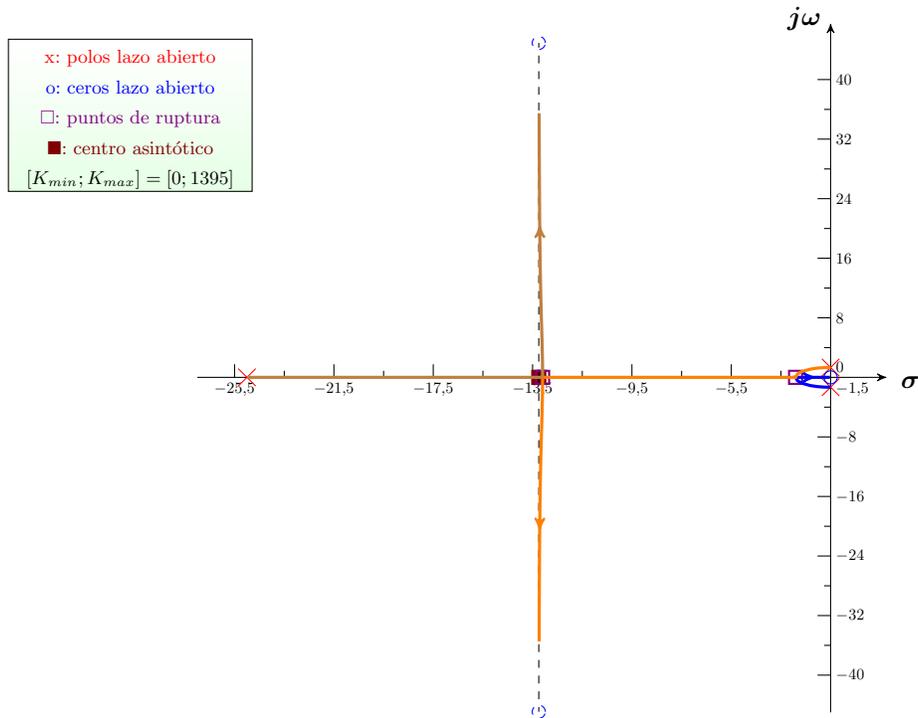


Figura 36: Lugar de Raíces de 26.6

Podemos apreciar que hay una simetría del Lugar de Raíces con respecto al eje real. Esto se debe a que los polos complejos aparecen en pares conjugados.

El lugar de raíces se construye a partir de los polos y ceros en lazo abierto, que en este ejemplo numérico son:

$$cero = -c = -\frac{3}{2} \quad (26.7a)$$

$$polo_1 = -p = -25 \quad (26.7b)$$

$$polo_2 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (26.7c)$$

$$polo_3 = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (26.7d)$$

Hay además dos ceros en lazo abierto en el infinito ya que el orden relativo (nº polos-nº de ceros) de $G(s)$ es 2.

Puede apreciarse en la Figura 36 que los polos de lazo abierto así como los ceros de lazo abierto y los ceros del infinito son terminales. Es sencillo comprender que esto siempre debe ser así debido a la ecuación característica 26.3. Cuando $K = \infty$ entonces $N(s) = 0$ lo que indica que los ceros en lazo abierto son a su vez polos en lazo cerrado para $K = \infty$. Y cuando $K = 0$ se cumple que

$D(s) = 0$, lo que indica que los polos en lazo abierto son a su vez polos en lazo cerrado para $K = 0$.

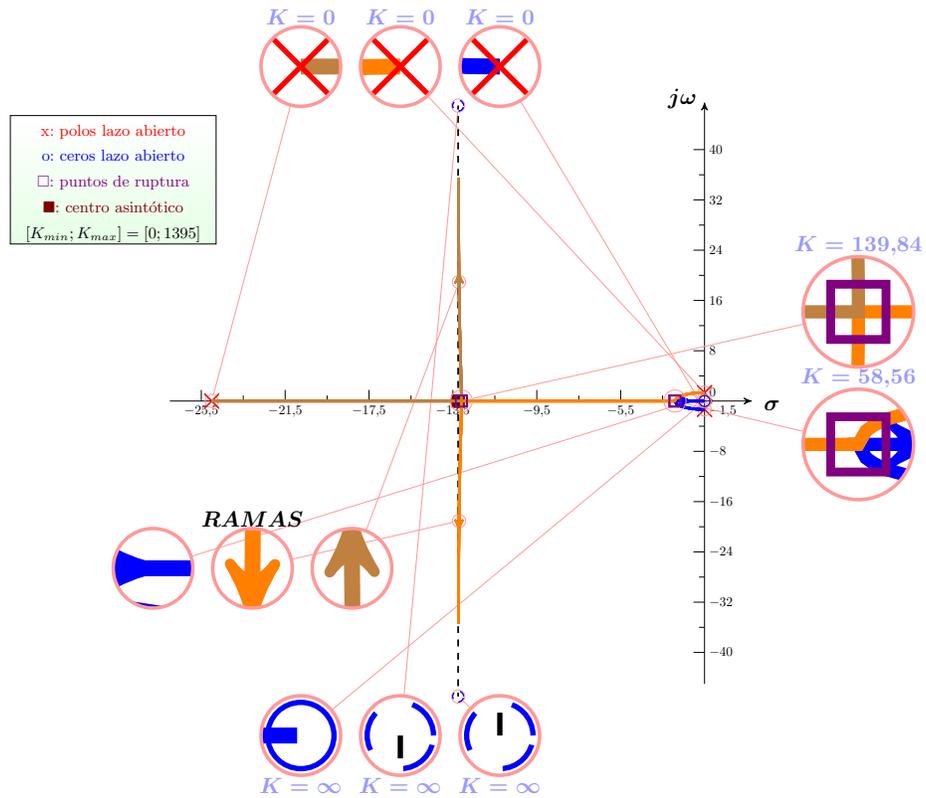


Figura 37: Lugar de Raíces de 26.6 señalando las tres ramas y sus puntos notables.

El Lugar de Raíces está formado por un conjunto de ramas obtenidas para distintos valores de $K \in [0, \infty]$, por lo que son ramas salientes de los polos de lazo abierto y ramas entrantes en los ceros de lazo abierto incluyendo los ceros del infinito. En la Figura 37 se vuelve a representar el Lugar de Raíces del ejemplo resaltando los puntos más notables.

Hay tantas ramas como polos en lazo cerrado. En consecuencia, puesto que el sistema de control de lazo cerrado del ejemplo es de orden 3 el lugar de raíces constará de tres ramas distintas (azul, naranja y marrón en la Figura 37). Cada punto de cada rama representa un único polo de lazo cerrado para un valor concreto de la ganancia K . Para cada valor de K habrá tantos polos como sea el orden del sistema de lazo cerrado, y cada uno de ellos caerá en una rama distinta.

A continuación explicamos las Figuras 38, 39 y 40 en las que se marcan las

ramas para diferentes valores de K .

Supongamos que partimos de los valores de $K = 0$, es decir de los polos en lazo abierto, y aumentamos el valor de K hasta $K = 36,08$. En la Figura 38 se estarían recorriendo tres ramas desde los polos de lazo abierto hasta los polos de lazo cerrado $(-23,34; -2,31 + j1,1; -2,31 - j1,1)$.

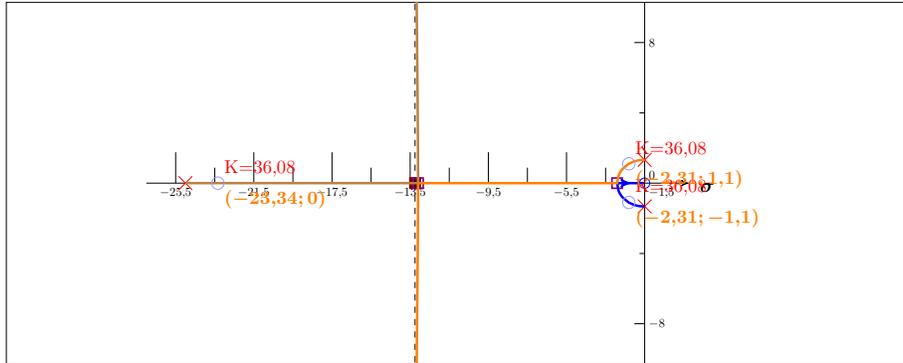


Figura 38: Lugar de Raíces para $K = 36,08$

Al aumentar el valor de K hasta $K = 131,65$ como se muestra en la Figura 39 los polos complejos conjugados de lazo cerrado anteriores se bifurcan en dos polos reales de lazo cerrado, alejándose de los polos de lazo abierto, pero acercándose a los ceros de lazo abierto. Sigue habiendo tres ramas pero ahora los polos de lazo cerrado son reales $(-15,99; -10,17; -1,83)$.

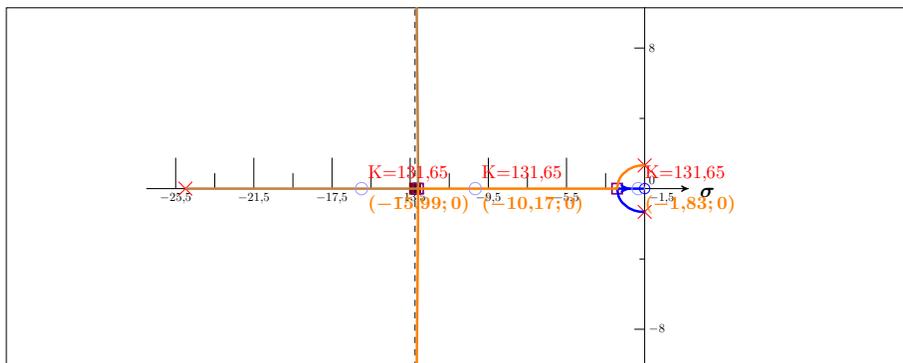


Figura 39: Lugar de Raíces para $K = 131,65$

Por último, al seguir aumentando K hasta $K = 300,64$, dos de los polos reales de lazo cerrado anteriores se bifurcan en dos polos complejos conjugados aproximándose a los dos ceros de lazo abierto en el infinito, como se muestra

en la Figura 40. Los polos en lazo cerrado para este valor de la ganancia K son $(-13,7 + j12,8; -13,7 - j12,8; -1,65)$

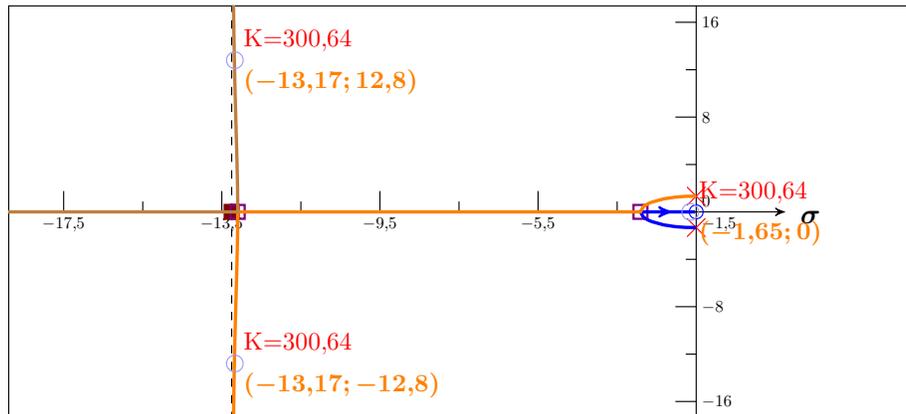


Figura 40: Lugar de Raíces para $K = 300,64$

Los puntos de bifurcación se denominan **puntos de ruptura**, y representan polos de lazo cerrado con un orden de multiplicidad superior al primero. En el ejemplo los dos puntos de ruptura son polos de lazo cerrado reales de multiplicidad 2. En la Figura 37 se muestran estos polos de lazo cerrado dobles. Uno de ellos se produce para los valores aproximados de $K = 139,84$ y de polo de lazo cerrado $-13,097$, y el otro para los valores aproximados de $K = 58,564$ y de polo de lazo cerrado $-2,9102$.

La posible existencia de puntos de ruptura del ejemplo es evidente ya que un sistema de orden tres tiene tres polos, por lo que puede haber tres polos reales distintos o tres reales con dos de ellos dobles, o dos polos complejos conjugados y uno real. No obstante para algunos valores de los parámetros de la función de transferencia genérica dada por 26.4 puede no haber puntos de ruptura para valores de $K \in [0, \infty]$, en cuyo caso deberá haberlos para valores de $K \in [-\infty, 0]$, es decir para valores de K negativos. El Lugar de Raíces obtenido para valores de K negativos se denomina Lugar de Raíces Complementario.

Para terminar esta introducción podemos observar en la Figura 41 que existe una asíntota vertical cuyos extremos son los ceros de lazo abierto en el infinito. En realidad son semiasíntotas, cuyo número coincide con el orden relativo de $G(s)$, que en el ejemplo es dos.

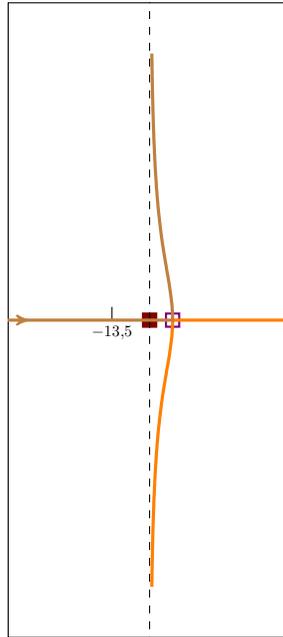


Figura 41: Lugar de Raíces: semiasíntotas y centro asintótico

Una particularidad de las semiasíntotas es que siempre se cortan en un único punto llamado centro asintótico o centro de gravedad σ_A que puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$\sigma_A = -\frac{a_1 - b_1}{n - m} \quad (26.8)$$

donde n es el orden de $G(s)$ (número de polos), m es el número de ceros de $G(s)$, a_1 y b_1 son los coeficientes del monomio de grado $n - 1$ y $m - 1$ de los polinomios del denominador y del numerador de $G(s)$ respectivamente.

En la Figura 41 se muestra el centro asintótico, cuyo valor exacto obtenido aplicando la fórmula 26.8 al ejemplo ($n = 3$, $m = 1$, $b_1 = 1,5$, $a_1 = 28$) es $\sigma_A = -13,25$.

También es posible calcular de manera exacta las pendientes ϕ_A de las semiasíntotas con respecto al eje real positivo utilizando la siguiente fórmula:

$$\phi_A = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m} \quad (26.9)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

En el ejemplo hay dos semiasíntotas. Dando valores a $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ se obtienen las pendientes de las semiasíntotas $\phi_A \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

26.1. Ejemplo de semiasíntotas y de centro asintótico

Consideremos la función de transferencia en lazo abierto (estudiada en [5])

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2(s^2 + 5)(s^2 + 6s + 8)(s^2 + 2s + 9)} \quad (26.10)$$

Podemos escribirla en la forma

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^8 + 8s^7 + 34s^6 + 110s^5 + 217s^4 + 350s^3 + 360s^2} \quad (26.11)$$

En la Figura 42 se muestra el Lugar de Raíces de esta función de transferencia.

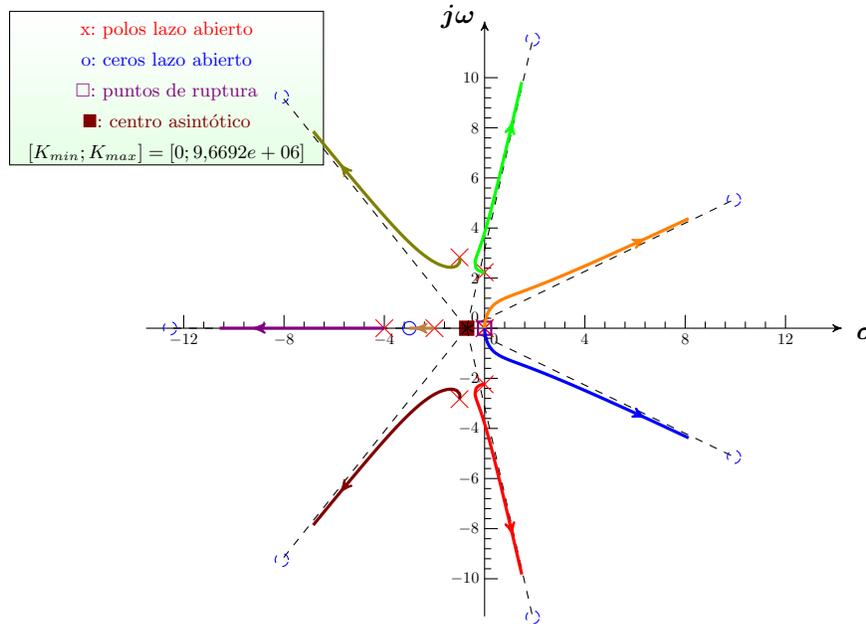


Figura 42: Lugar de Raíces: semiasíntotas

Utilizando las fórmulas 26.8 y 26.9 se obtienen los valores exactos del centro asintótico y de las pendientes de las 7 semiasíntotas:

$$\sigma_A = -\frac{5}{7} \approx -0,7143 \quad (26.12a)$$

$$\phi_A \in \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\} \quad (26.12b)$$

27. Lugar de Raíces en el eje real

No todas las funciones de transferencia de lazo abierto dan lugar a polos de lazo cerrado reales para $K \geq 0$. Un ejemplo es la función de transferencia

siguiente y cuyo Lugar de Raíces se representa en la Figura 43,

$$G(z) = \frac{2z^2 - 3,4z + 1,5}{z^2 - 1,6z + 0,8} \quad (27.1)$$

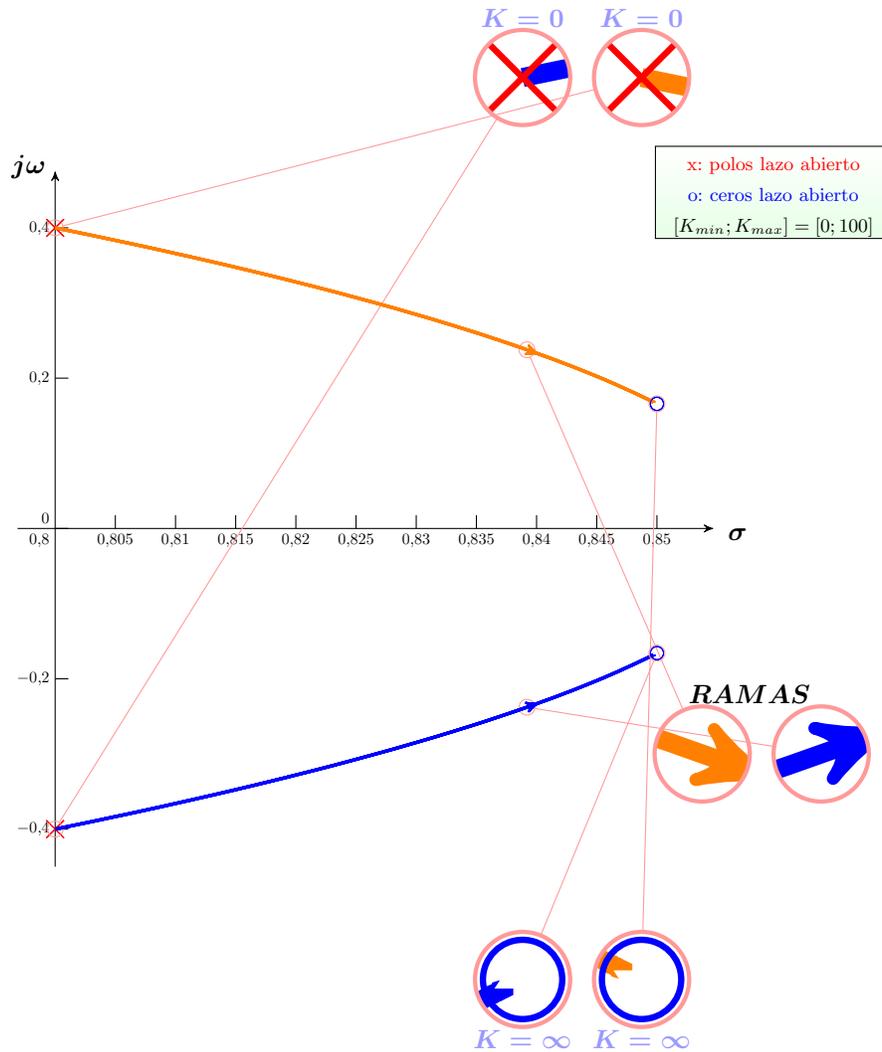


Figura 43: Lugar de Raíces de 27.1

El Lugar de Raíces de la Figura 44 tiene un único punto en el eje real que es un polo de lazo cerrado doble. Se corresponde con el doble integrador,

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad (27.2)$$

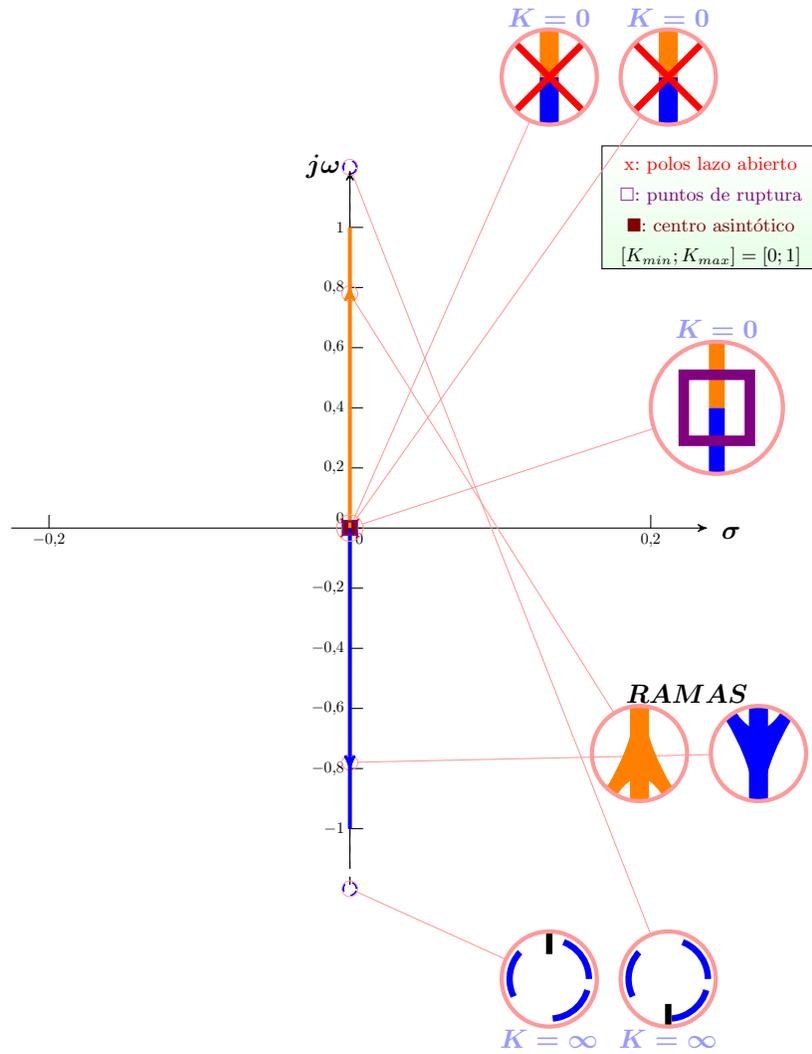


Figura 44: Lugar de Raíces de 27.2

El Lugar de Raíces del doble integrador también tiene un punto de ruptura en el origen.

En la Figura 45 se representa el Lugar de Raíces de la función de transferencia,

$$G(z) = \frac{z - 5}{z(z + 1)} \quad (27.3)$$

En este caso todos los polos de lazo cerrado para $K \geq 0$ son reales.

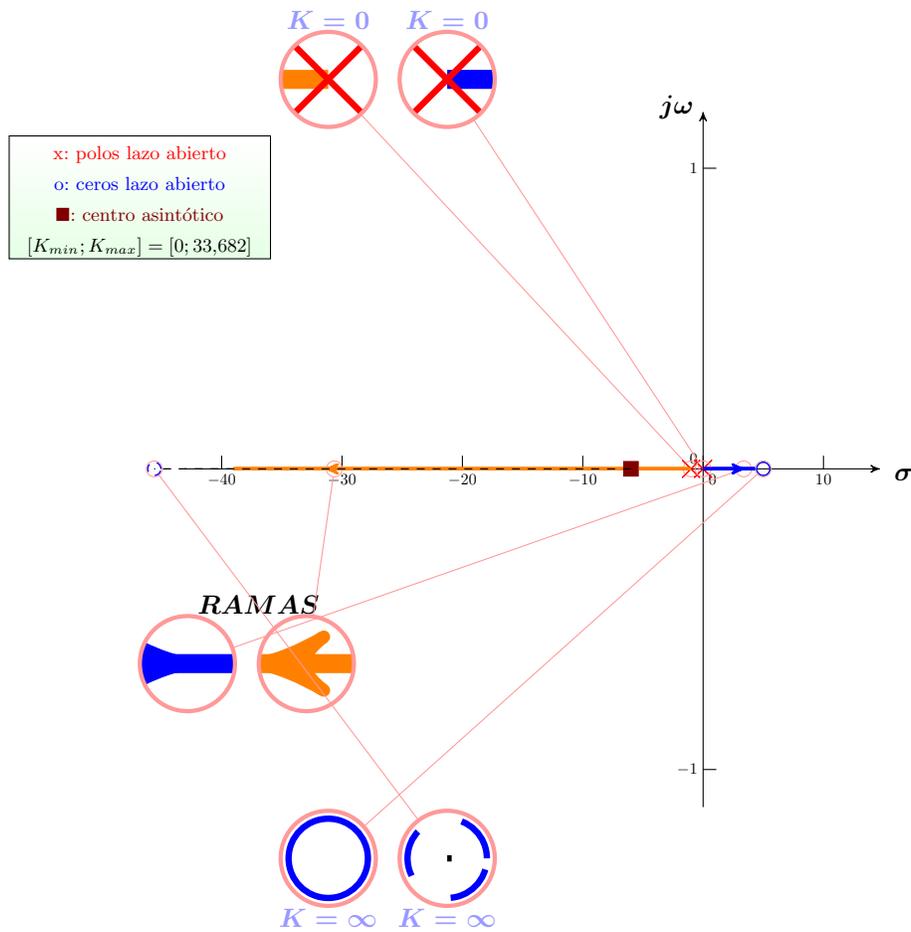


Figura 45: Lugar de Raíces de 27.3

Para comprender con claridad qué puntos del lugar de raíces pertenecen al eje real es necesario comprender la idea clave que permite trazar el Lugar de Raíces.

Por un lado la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ puede expresarse en la forma polar

$$G(s) = |G(s)|e^{j\phi_G(s)} \quad (27.4)$$

donde $|G(s)|$ es el módulo de $G(s)$ y $\phi_G(s)$ su fase.

Consideremos un punto cualquiera $s^* \in \mathbb{C}$ perteneciente al Lugar de Raíces. Deberá satisfacer la relación 26.1

$$KG(s^*) = -1 \quad (27.5)$$

Esta relación compleja puede expresarse como dos condiciones reales, que llamaremos condición de módulo o magnitud y condición de ángulo respectivamente:

$$|K| = \frac{1}{|G(s^*)|} \quad (27.6a)$$

$$\phi_G(s^*) = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (27.6b)$$

La condición de ángulo indica que el argumento de $G(s)$ debe ser un múltiplo impar de π para que un punto del plano complejo $s \in \mathbb{C}$ pertenezca al Lugar de Raíces.

Para el trazado del Lugar de Raíces es suficiente con utilizar la condición de ángulo. La condición de módulo puede utilizarse para calcular el valor de la ganancia K para valores concretos del Lugar de raíces como se hizo en la Sección 26 con las Figuras 38, 39 y 40.

La función de transferencia $G(s^*)$ también puede expresarse como

$$G(s^*) = \frac{N(s^*)}{D(s^*)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s^* - c_i)}{\prod_{i=1}^n (s^* - p_i)} \quad (27.7)$$

donde m es el número de ceros de lazo abierto, n el número de polos de lazo abierto, c_i la raíz i -ésima de $N(s^*) = 0$ y p_i la raíz i -ésima de $D(s^*) = 0$.

Expresando los ceros y los polos de lazo abierto en la forma polar,

$$s^* - c_i = r_{c_i} e^{j\psi_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (27.8a)$$

$$s^* - p_i = r_{p_i} e^{j\phi_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (27.8b)$$

y teniendo en cuenta que la fase $\phi_G(s^*)$ de $G(s)$ es la suma de fases de cada uno de estos factores, se obtiene la relación de ángulos

$$\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{i=1}^n \phi_i = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (27.9)$$

donde ϕ_i es la fase de $s^* - p_i$ y ψ_i es la fase de $s^* - c_i$.

La relación 27.9 permite comprender todo lo que se ha visto en la Sección 26, pero es especialmente sencilla de aplicar para el estudio de los puntos del Lugar de Raíces pertenecientes al eje real, es decir al estudio de los polos de lazo cerrado reales.

Para ello consideremos el ejemplo de la Figura 45, que reproducimos en la Figura 46.

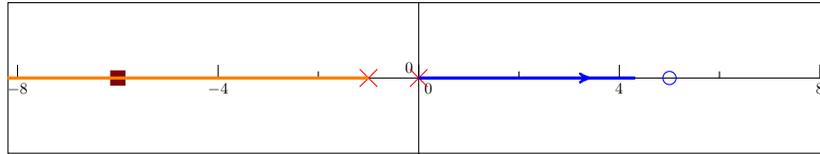


Figura 46: Lugar de Raíces de 27.3

Escogiendo un punto de prueba σ con el que recorremos de derecha a izquierda el eje real, observamos que la contribución de ángulos ϕ_i y ψ_i solo satisfacen la relación 27.9 si σ se encuentra en los intervalos de color de la Figura. Si σ se encuentra a la derecha del cero, las contribuciones del cero y de los dos polos de lazo abierto será de 0 radianes, por lo que no suman un múltiplo impar de π . Pero si σ se encuentra entre el cero y el polo del origen, la contribución del cero será de π radianes, y la de los dos polos de 0 radianes por lo que todos los puntos de ese intervalo deben pertenecer al Lugar de Raíces. Y así sucesivamente.

Podemos concluir que en el momento en que se descubra un intervalo del eje real que pertenezca al Lugar de Raíces, pueden deducirse inmediatamente los restantes ya que los intervalos deben estar alternados.

28. Lugar de Raíces: Intervalos de estabilidad

Normalmente interesa conocer los intervalos de valores de K para los cuales el polinomio característico $P(s) = D(s) + KN(s)$ es estable en el sentido de Hurwitz para el caso continuo o estable en el sentido de Schur para el caso discreto. Es evidente que los valores de K para los cuales el Lugar de Raíces corta al eje imaginario $j\omega$ representan extremos de estos intervalos para el caso continuo, mientras que aquellos que cortan el círculo unidad lo son para el caso discreto.

El cálculo de estos valores de K puede hacerse utilizando la Tabla de Routh explicada en la Sección 18.1 de la Parte III [3] para el caso continuo, o utilizando la transformación w para el caso discreto explicado en la Sección 18.2 de la Parte III [3].

Para el cálculo de los puntos del Lugar de Raíces ω^* que cortan al eje imaginario (caso continuo) bastará con sustituir los valores de K que hacen críticamente estable a $P(s)$ y satisfacen la ecuación

$$D(j\omega^*) + KN(j\omega^*) = 0 \quad (28.1)$$

Obviamente solo serán válidas las soluciones reales $\omega^* \in \mathbb{R}$.

El trazado del Lugar de Raíces es una buena herramienta gráfica para resolver numéricamente este problema tanto en el caso continuo como discreto.

Consideremos la función de transferencia de lazo abierto discreta dada por 27.3 cuyo Lugar de Raíces se representó en la Figura 45:

$$G(z) = \frac{z - 5}{z(z + 1)} \quad (28.2)$$

En la Figura 47 se representa la zona del Lugar de Raíces cercana al círculo unidad. Podemos observar que el sistema de lazo cerrado será inestable para cualquier valor de $K > 0$, debido a la rama de color naranja del Lugar de Raíces.

Aplicando la condición de magnitud dada por la relación 27.6a es posible calcular analíticamente los valores de K que intersecan con el círculo unidad. En este ejemplo las intersecciones se dan en $z^* = -1$ y $z^* = 1$. De aquí que

$$K(z^* = -1) = \frac{1}{|G(-1)|} = 0 \quad (28.3a)$$

$$K(z^* = 1) = \frac{1}{|G(1)|} = 0,5 \quad (28.3b)$$

Para $K = 0$ el sistema de lazo abierto presenta oscilaciones alternadas por lo que es críticamente estable. En consecuencia ningún controlador Proporcional puede estabilizar el sistema $G(z)$.

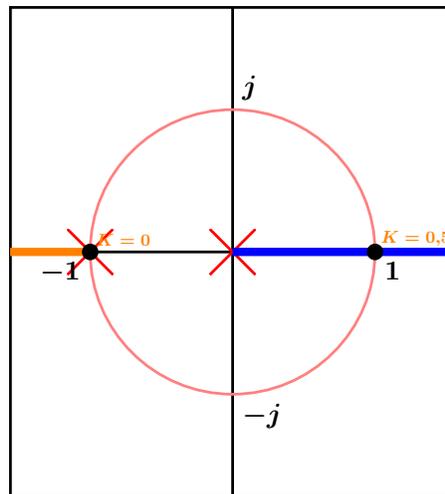


Figura 47: Lugar de Raíces cercana al círculo unidad de 28.2

J. Lugar de Raíces: Puntos de ruptura reales

Consideremos la función de transferencia continua de lazo abierto siguiente,

$$G(s) = \frac{s + c}{s^2(s + p)} \quad (\text{J.1})$$

En las Figuras 48 a 53 se muestran los lugares de raíces de una secuencia de casos variando el parámetro c con $p = 27$: $c \in \{30, 10, 4, 3, 2, -2\}$.

Esta función de transferencia tiene la particularidad de que produce un punto de ruptura triple cuando se da la relación $p = 9c$ con un valor de ganancia $K = 27c^2$. El punto de ruptura es $s_r = -3c$. (Figura 51).

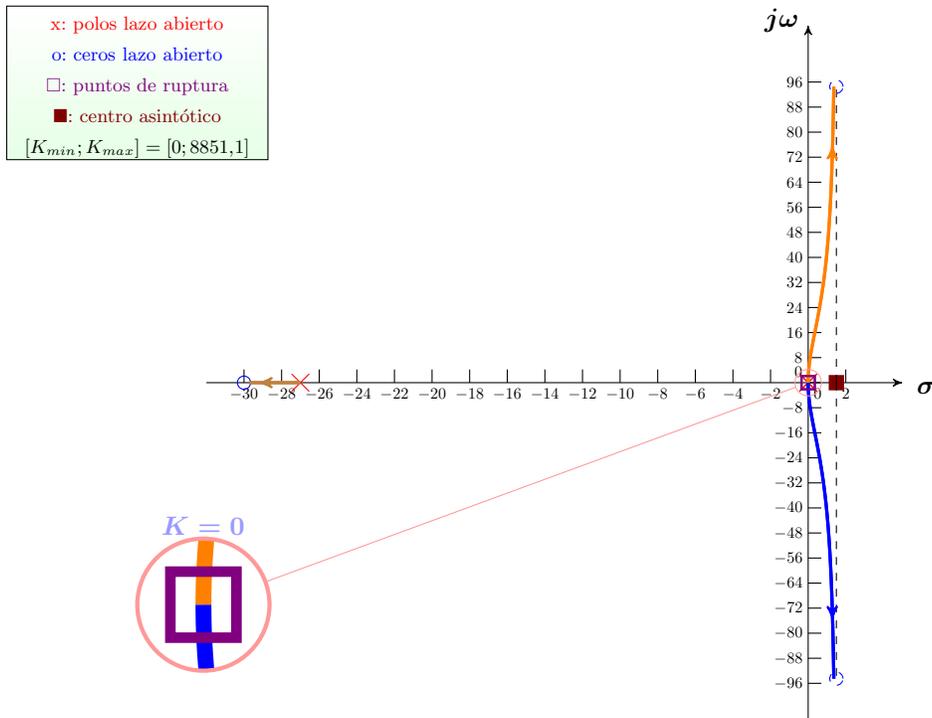


Figura 48: Puntos de ruptura doble para $K = 0$

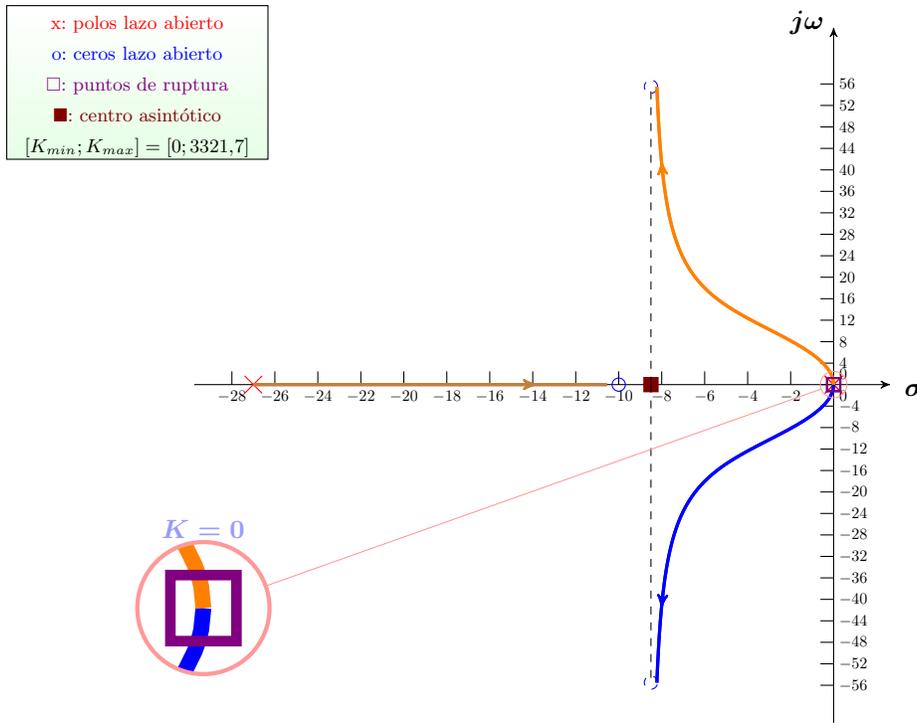


Figura 49: Punto de ruptura doble para $K = 0$

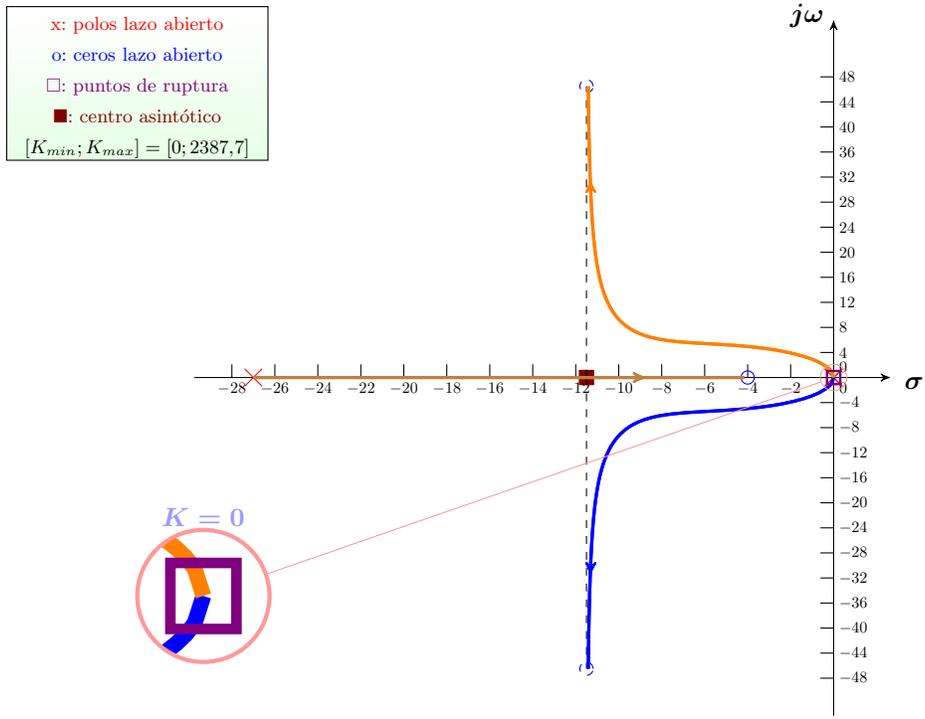


Figura 50: Punto de ruptura doble para $K = 0$

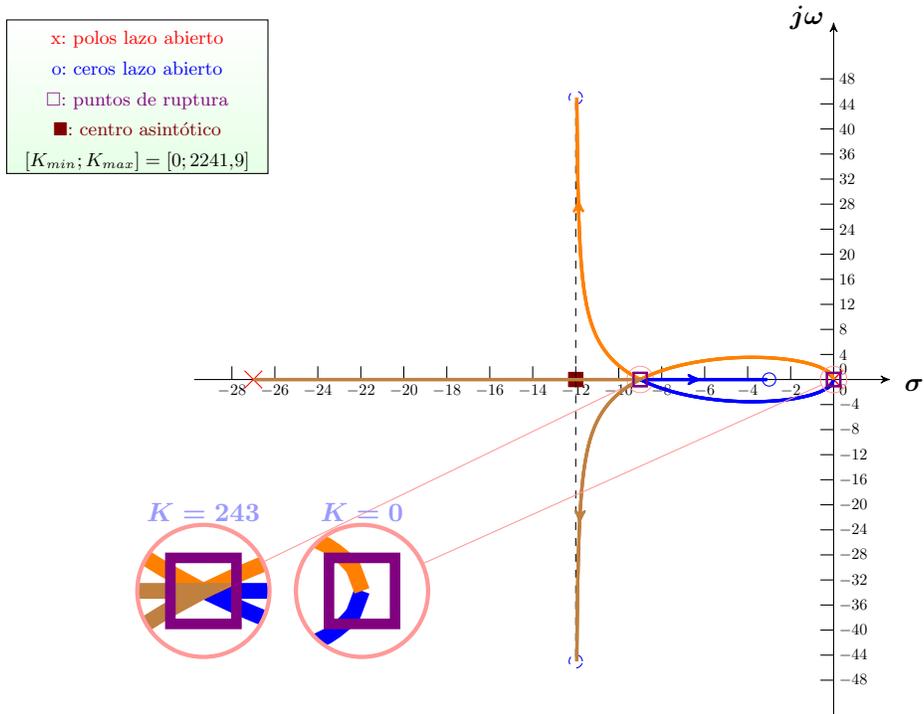


Figura 51: Puntos de ruptura: doble para $K = 0$ y triple para $K = 243$

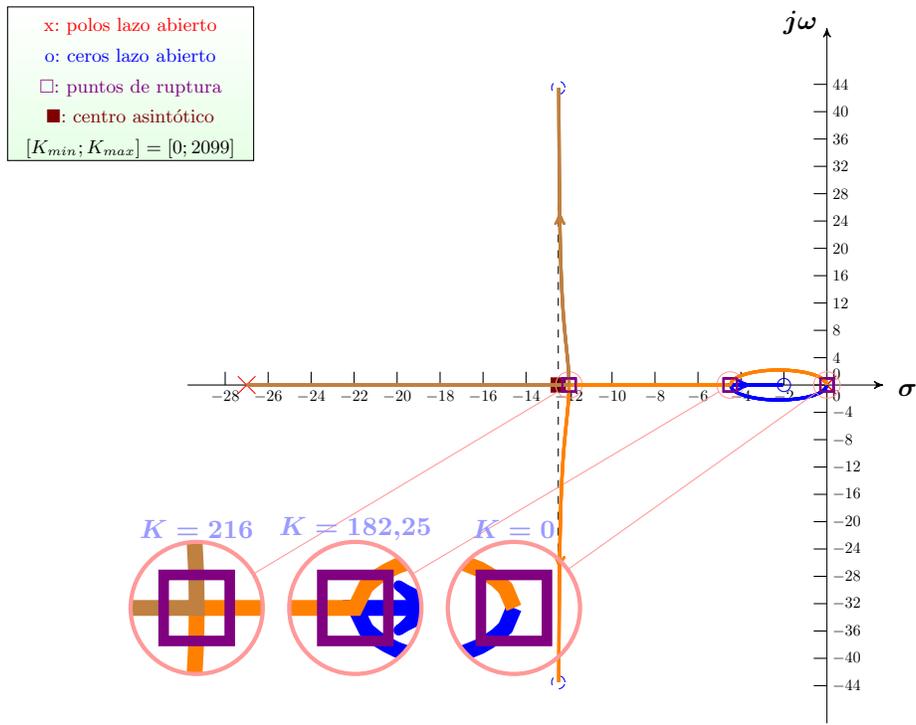


Figura 52: Puntos de ruptura: dobles para $K = 0$, $K = 182,25$ y $K = 216$

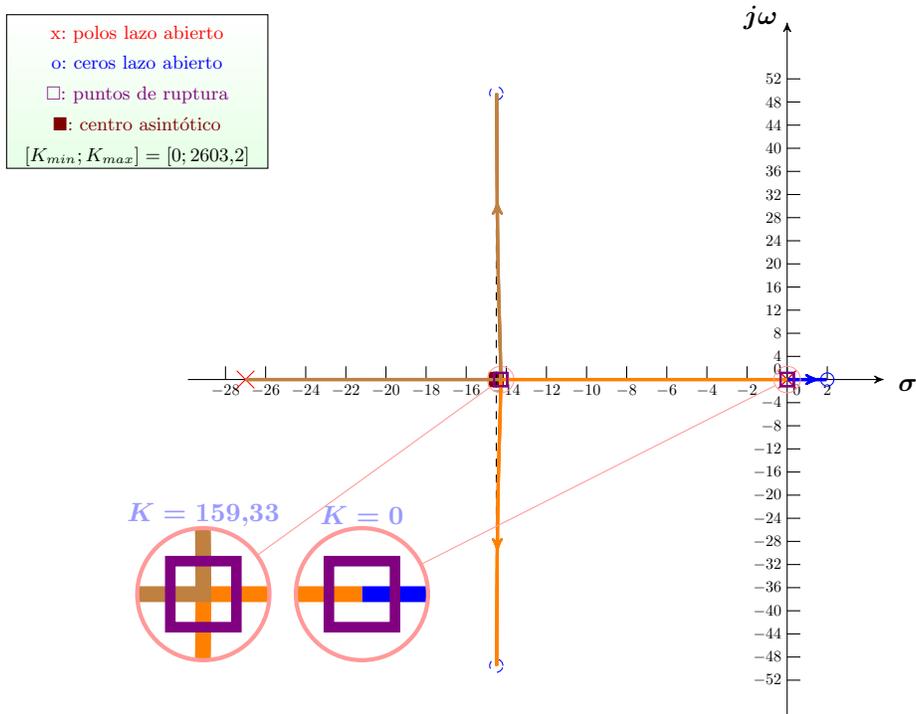


Figura 53: Puntos de ruptura dobles para $K = 0$ y $K = 159,33$

El siguiente teorema da una condición necesaria para la existencia de puntos de ruptura reales s_r . Una vez calculadas las posibles raíces múltiples de lazo cerrado utilizando el teorema, será una condición suficiente el hecho de que estos posibles puntos de ruptura satisfagan la condición de que $K_r \geq 0$ donde $1 + K_r G(s_r) = 0$.

Teorema de los puntos de ruptura del Lugar de Raíces

Se cumple lo siguiente:

1. Una condición necesaria para que haya puntos de ruptura s_r es que

$$\left. \frac{dK(s)}{ds} \right|_{s=s_r} = 0 \tag{J.2}$$

donde

$$K(s) = -\frac{1}{G(s)} \tag{J.3}$$

Si $N(s)$ no es constante, la condición necesaria puede expresarse en la

forma

$$G(s_r) = \frac{\left. \frac{dN(s)}{ds} \right|_{s=s_r}}{\left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_r}} \quad (\text{J.4})$$

Si $N(s)$ es constante entonces la condición necesaria queda en la forma

$$\left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_r} = 0 \quad (\text{J.5})$$

2. Si un punto real del lugar de raíces s_r es de orden de multiplicidad $p > 1$ entonces se deberá cumplir que

$$\left. \frac{dK(s)}{ds} \right|_{s=s_r} = \left. \frac{d^2K(s)}{ds^2} \right|_{s=s_r} = \dots = \left. \frac{d^{p-1}K(s)}{ds^{p-1}} \right|_{s=s_r} = 0 \quad (\text{J.6})$$

Si $\frac{d^{j-1}N(s)}{ds^{j-1}}$ no es constante, la condición necesaria puede expresarse en la forma

$$G(s_r) = \frac{\left. \frac{d^j N(s)}{ds^j} \right|_{s=s_r}}{\left. \frac{d^j D(s)}{ds^j} \right|_{s=s_r}}, \quad j = 1, \dots, p-1 \quad (\text{J.7})$$

Si $\frac{d^{j-1}N(s)}{ds^{j-1}}$ es constante entonces la condición necesaria queda en la forma

$$\left. \frac{d^j D(s)}{ds^j} \right|_{s=s_r} = 0, \quad j = 1, \dots, p-1 \quad (\text{J.8})$$

Bibliografía

- [1] F. Monasterio-Huelin and A. Gutiérrez, *Apuntes de Teoría. Primera Parte*. SECO2014-I, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [2] —, *Apuntes de Teoría. Segunda Parte*. SECO2014-II, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [3] —, *Apuntes de Teoría. Tercera Parte*. SECO2014-III, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [4] —, *Apuntes de Teoría. Cuarta Parte*. SECO2014-IV, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [5] G. Berman and R. G. Stanton, “The asymptotes of the root locus,” *SIAM Review*, vol. 5, no. 3, pp. pp. 209–218, 1963. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2027623>