

# Sistemas de control de dos grados de libertad. Controladores de tipo PID-D y D|PID. Supresión de perturbación

Félix Monasterio-Huelin

20 de abril de 2016

## Índice

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>2</b>
<b>1. Sistemas de control realimentado de dos grados de libertad: introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Estructuras de control realimentado</b>	<b>4</b>
2.1. Polos comunes de $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$ . . . . .	7
<b>3. Condiciones para la supresión de una señal de perturbación constante</b>	<b>8</b>
<b>4. Sistema de control realimentado con PID-D</b>	<b>9</b>
<b>5. Sistema de control realimentado con D PID</b>	<b>13</b>
<b>6. Salida parcial <math>y_w(t)</math> a la señal de entrada de perturbación constante</b>	<b>15</b>
<b>A. Lema de los polinomios coprimos o identidad de Bézout</b>	<b>19</b>
<b>B. Estructuras de un grado de libertad</b>	<b>19</b>
<b>C. Respuesta a la señal de entrada de perturbación constante</b>	<b>22</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>23</b>

## Índice de Figuras

1.1. Sistema de dos entradas: $w(t)$ y $u(t)$ . . . . .	3
2.1. Estructura general del Sistema de Control Realimentado . . . . .	4
2.2. Principio de superposición de la estructura de la Figura 2.1: (a) Con $w(t) = 0$ (b) Con $r(t) = 0$ . . . . .	5
2.3. Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo Directo: $F_1 = F_2 = G_c(s)$ (b) Lazo Realimentado: $F_1 = 1$ y $F_2(s) = G_c(s)$ . . . . .	6
2.4. Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad: (a) Estructura Paralela (b) Estructura Prealimentada . . . . .	7
3.1. Sistema de dos entradas . . . . .	8
4.1. Esquema de control realimentado con PID-D . . . . .	9
4.2. Salida PID-D con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$ . . . . .	12
4.3. Salida PID-D con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$ . . . . .	12
5.1. Esquema de control realimentado con D PID . . . . .	13

6.1. Esquema de bloques del sistema de dos grados de libertad con entrada de perturbación	15
6.2. Salida Perturbacion con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$	17
6.3. Salida Perturbacion con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$	17
B.1. Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo directo, (b) Lazo realimentado	21

## Índice de Tablas

2.1. Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad, donde $F_3(s) = F_1(s) - F_2(s)$	6
--	---

# 1. Sistemas de control realimentado de dos grados de libertad: introducción

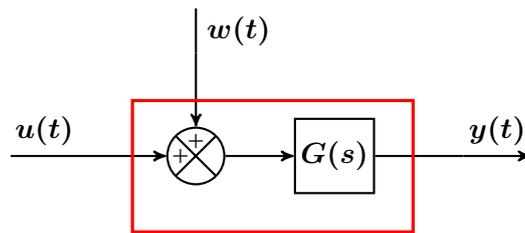


Figura 1.1: Sistema de dos entradas:  $w(t)$  y  $u(t)$

En las siguientes secciones abordamos conjuntamente los problemas de supresión de la señal de perturbación de entrada  $w(t)$  y de seguimiento de un conjunto de señales de referencia  $r(t)$  del sistema de dos entradas, una de control  $u(t)$  y otra de perturbación  $w(t)$ , que se muestra en la Figura 1.1.

En primer lugar, se introduce el concepto de Sistema de Control Realimentado de dos grados de libertad, y se definen dos estructuras distintas, que llamaremos Prealimentada y Paralela.

En segundo lugar, se estudia un ejemplo en el que el sistema a controlar  $G(s)$  tiene la forma

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (1.1)$$

donde  $K > 0$  y  $p > 0$ .

Se resolverá el problema de supresión de una señal de perturbación constante y de seguimiento de señales de referencia hasta la parábola incluida:  $r(t) \in \{A_0, A_1 t, \frac{A_2}{2} t^2\}$ , seleccionando, de todas las soluciones posibles, los controladores más simples.

## 2. Estructuras de control realimentado

En la Figura 2.1 se muestra el esquema de bloques de la estructura general del Sistema de Control Realimentado que vamos a estudiar en esta Sección y las siguientes.

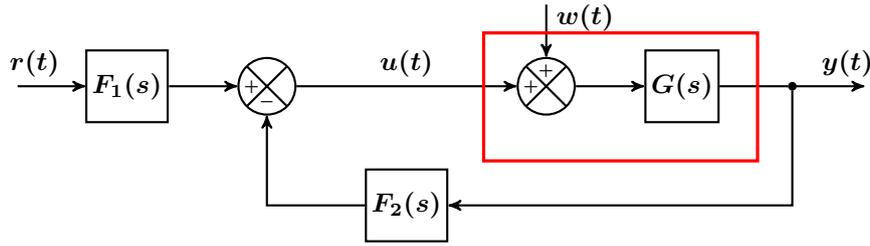


Figura 2.1: Estructura general del Sistema de Control Realimentado

La estructura de la Figura 2.1 satisface las siguientes relaciones,

$$U(s) = F_1(s)R(s) - F_2(s)Y(s) \quad (2.1a)$$

$$Y(s) = (U(s) + W(s))G(s) \quad (2.1b)$$

donde  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  representan los controladores.

En lo que sigue supondremos que el polinomio del numerador y el polinomio del denominador de cada una de las funciones de transferencia  $G(s)$ ,  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  son coprimos, es decir que no tienen factores comunes.

Sustituyendo 2.1a en 2.1b, y despejando  $Y(s)$  se obtiene la relación

$$Y(s) = \frac{F_1(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + F_2(s)G(s)}W(s) \quad (2.2)$$

Denominaremos funciones de transferencia de lazo cerrado a  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  donde

$$H_{yr}(s) = \frac{F_1(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (2.3a)$$

$$H_{yw}(s) = \frac{G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (2.3b)$$

De esta manera se cumple el principio de superposición de los sistemas lineales, es decir

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_w(s) \quad (2.4)$$

donde

$$H_{yr} = \frac{Y_r(s)}{R(s)} \quad (2.5a)$$

$$H_{yw} = \frac{Y_w(s)}{W(s)} \quad (2.5b)$$

Podemos observar que se cumple la siguiente relación entre las funciones de transferencia de lazo cerrado,

$$H_{yr}(s) = F_1(s)H_{yw}(s) \quad (2.6)$$

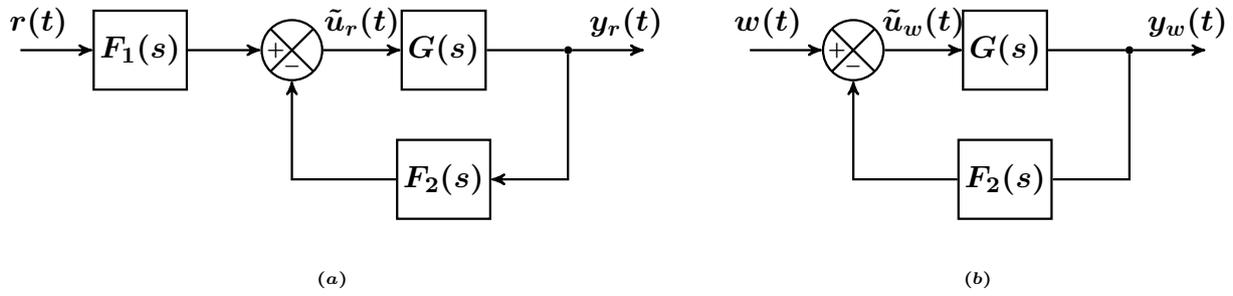


Figura 2.2: Principio de superposición de la estructura de la Figura 2.1: (a) Con  $w(t) = 0$  (b) Con  $r(t) = 0$

En la Figura 2.2 se muestran los esquemas de bloques que explican el principio de superposición. Debe prestarse atención al hecho de que  $u(t) \neq \tilde{u}_w(t) + \tilde{u}_r(t)$ , ya que si no fuese así  $Y(s) = U(s)G(s)$ , lo cual es falso debido a la relación 2.1b,  $Y(s) = (U(s) + W(s))G(s)$ .

No obstante, es posible aplicar el principio de superposición a la señal de control  $U(s)$  de tal manera que

$$U(s) = U_r(s) + U_w(s) \quad (2.7)$$

Utilizando la relación 2.1b,  $Y(s) = (U(s) + W(s))G(s)$ , se cumplirá que

$$Y_r(s) = U_r(s)G(s) \quad (2.8a)$$

$$Y_w(s) = (U_w(s) + W(s))G(s) \quad (2.8b)$$

Sustituyendo las expresiones 2.3 y despejando  $U_r(s)$  y  $U_w(s)$  se obtienen las funciones transferencia de lazo cerrado de las señales de control

$$H_{ur}(s) = \frac{U_r(s)}{R(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (2.9a)$$

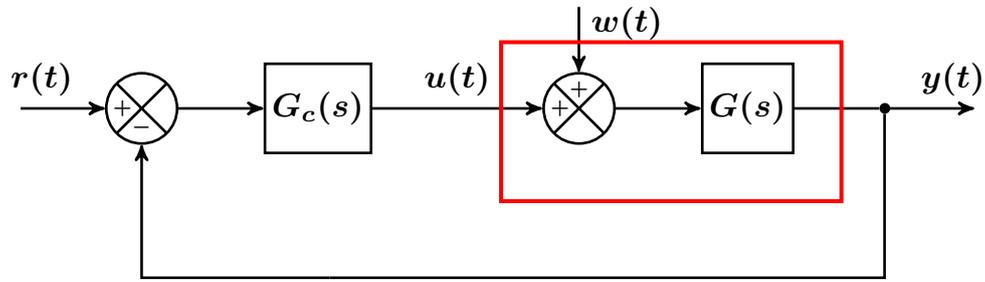
$$H_{uw}(s) = \frac{U_w(s)}{W(s)} = -\frac{F_2(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (2.9b)$$

Diremos que el Sistema de Control Realimentado dado por las relaciones 2.3 es de dos grados de libertad si  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  son funciones de transferencia independientes, en el sentido de que puedan ser sintonizadas de manera independiente.

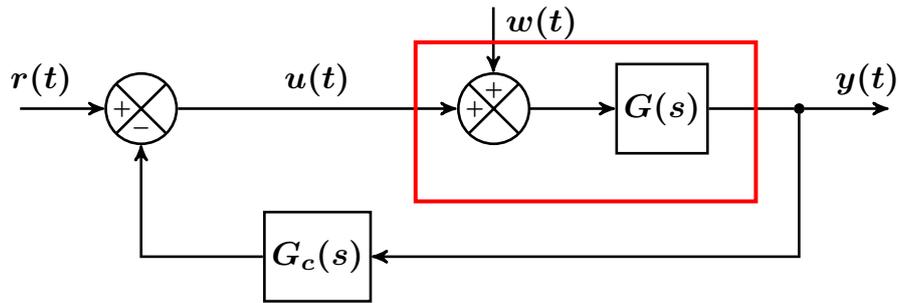
En el Apéndice B se demuestra que  $F_2(s)$  es una función de transferencia de un grado de libertad, por lo que si  $F_1(s)$  es también una función de transferencia de un grado de libertad pero independiente de  $F_2(s)$ , entonces el Sistema de Control Realimentado será de dos grados de libertad. Esto es así porque  $H_{yw}(s)$  solo depende de  $F_2(s)$ , mientras que  $H_{yr}(s)$  depende de  $F_1(s)$  y de  $F_2(s)$ . Si  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  no son independientes tampoco lo serán  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$ .

Si el Sistema de Control Realimentado es de dos grados de libertad será posible obtener funciones de transferencia de lazo cerrado  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  que satisfagan especificaciones de diseño independientes, y en consecuencia sea posible resolver conjuntamente los problemas de régimen permanente de supresión de la señal de perturbación y de seguimiento de un conjunto de señales de referencia.

En la Figura 2.3 se muestran los esquemas de bloques de dos sistemas de control realimentado de un grado de libertad obtenidos a partir de la estructura general, imponiendo restricciones a  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$ . Se obtiene una estructura con un controlador en el lazo directo haciendo  $F_1(s) = F_2(s) = G_c(s)$ , y una estructura con un controlador en el lazo realimentado haciendo  $F_1(s) = 1$  y  $F_2(s) = G_c(s)$ . Esto puede comprobarse sin más que sustituir estos valores en la ecuación 2.1a.



(a)



(b)

Figura 2.3: Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo Directo:  $F_1 = F_2 = G_c(s)$  (b) Lazo Realimentado:  $F_1 = 1$  y  $F_2(s) = G_c(s)$

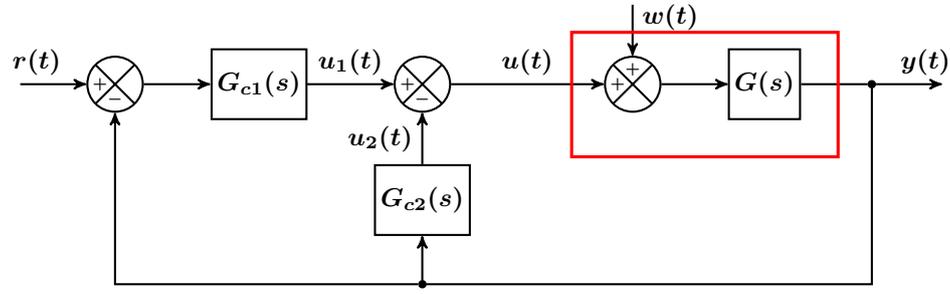
Haciendo

$$F_3(s) = F_1(s) - F_2(s) \quad (2.10)$$

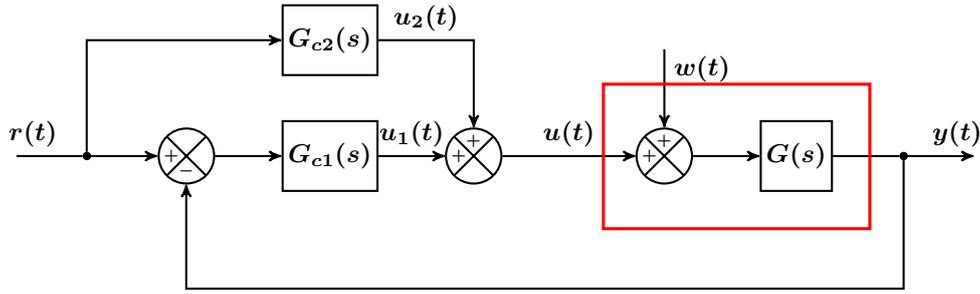
se obtienen las estructuras de Control Realimentado Preamentada y Paralela de dos grados de libertad recogidas en la Tabla 2.1 y en la Figura 2.4.

	Preamentada	Paralela
$U(s)$	$F_2(s)E(s) + F_3(s)R(s)$	$F_1(s)E(s) + F_3(s)Y(s)$
$U(s)$	$G_{c1}(s)E(s) + G_{c2}(s)R(s)$	$G_{c1}(s)E(s) - G_{c2}(s)Y(s)$
$F_1(s)$	$G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$	$G_{c1}(s)$
$F_2(s)$	$G_{c1}(s)$	$G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$

Tabla 2.1: Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad, donde  $F_3(s) = F_1(s) - F_2(s)$



(a)



(b)

Figura 2.4: Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad: (a) Estructura Paralela (b) Estructura Prefalimentada

## 2.1. Polos comunes de $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$

En este estudio consideraremos que los polinomios de los denominadores de  $F_1(s)$  y de  $F_2(s)$  no son coprimos sino que satisfacen la relación

$$D_{F_2}(s) = D_{F_1}(s)D'_{F_2}(s) \quad (2.11)$$

donde  $D'_{F_2}(s)$  es un polinomio.

De esta manera logramos que los polinomios característicos de  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  sean iguales, es decir que ambas funciones de transferencia tengan los mismos polos de lazo cerrado:

$$P(s) = D_{F_2}(s)D(s) + N_{F_2}(s)N(s) \quad (2.12)$$

Vamos a demostrar a continuación que en el caso Prefalimentado esto implica que el polinomio del denominador del controlador  $G_{c2}(s)$  sea la unidad, es decir que  $G_{c2}(s)$  no tenga polos:

$$D_{c2}(s) = 1 \quad (2.13)$$

Puesto que en el caso Prefalimentado  $F_2(s) = G_{c1}(s)$  entonces  $D_{F_2}(s) = D_{c1}(s)$ . Y como  $F_1(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$  entonces  $D_{F_1}(s) = D_{c1}(s)D_{c2}(s)$ . Teniendo en cuenta la relación 2.11,  $D_{F_2}(s) = D_{F_1}(s)D'_{F_2}(s)$ ,

$$D_{F_2}(s) = D_{c1}(s)D_{c2}(s)D'_{F_2}(s) = D_{c1}(s) \quad (2.14)$$

De aquí que

$$D_{c2}(s)D'_{F_2}(s) = 1 \quad (2.15)$$

Esto solo puede cumplirse si

$$D_{c2}(s) = D'_{F_2}(s) = 1 \quad (2.16)$$

como queríamos demostrar.

Puede comprobarse que en el caso Paralelo la igualdad 2.11 solo conduce a que  $D'_{F_2}(s) = D_{c2}(s)$ , por lo que en este caso el controlador  $G_{c2}(s)$  puede tener, en general, polos y ceros para que los polinomios característicos de  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  sean iguales.

### 3. Condiciones para la supresión de una señal de perturbación constante

Consideremos el sistema de dos entradas, una de control  $u(t)$  y otra de perturbación  $w(t)$  que se muestra en la Figura 3.1 donde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (3.1)$$

con  $K > 0$  y  $p > 0$ .

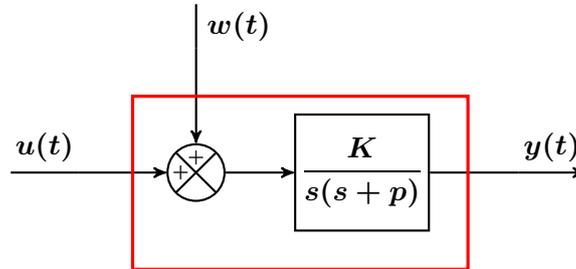


Figura 3.1: Sistema de dos entradas

En esta Sección estudiaremos las condiciones que se deben cumplir para resolver el problema de supresión de una señal de perturbación constante,  $w(t) = W$ , cuando la estructura de control es un sistema de dos grados de libertad Prealimentado o Paralelo.

Admitiendo que la salida parcial debida a la señal de perturbación,  $y_w(t)$ , es una señal estable, puede utilizarse el teorema del valor final,

$$y_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{yw}(s) W(s) \quad (3.2)$$

donde  $H_{yw}(s)$  viene dado por la expresión 2.3b,

$$H_{yw}(s) = \frac{G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (3.3)$$

La resolución del problema de supresión de  $w(t)$  constante supone analizar las condiciones bajo las cuales se satisface la relación

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} H_{yw}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K D_{F_2}(s)}{s(s+p) D_{F_2}(s) + K N_{F_2}(s)} \quad (3.4)$$

donde  $N_{F_2}(s)$  y  $D_{F_2}(s)$  son los polinomios del numerador y denominador de  $F_2(s)$  dado en la Tabla 2.1 según que la estructura sea Prealimentada o Paralela.

Para la **estructura Prealimentada** la relación 3.4 puede escribirse como

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K D_{c1}(s)}{s(s+p) D_{c1}(s) + K N_{c1}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_{c1}(s)}{N_{c1}(s)} \quad (3.5)$$

Como consecuencia se deberá cumplir que

$$D_{c1}(s) = s D'_{c1}(s) \quad (3.6a)$$

$$N_{c1}(0) \neq 0 \quad (3.6b)$$

donde  $D'_{c1}(s)$  es un polinomio cualquiera.

Eligiendo el controlador más simple se deberá cumplir que  $D'_{c1}(s) = 1$ .

Para la **estructura Paralela** la relación 3.4 puede escribirse como

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K D_{c1}(s) D_{c2}(s)}{s(s+p) D_{c1}(s) D_{c2}(s) + K (N_{c1}(s) D_{c2}(s) + N_{c2}(s) D_{c1}(s))} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_{c1}(s) D_{c2}(s)}{N_{c1}(s) D_{c2}(s) + N_{c2}(s) D_{c1}(s)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para esta estructura se pueden dar dos soluciones:

a)

$$D_{c1}(s) = sD'_{c1}(s) \quad (3.8a)$$

$$N_{c1}(0) \neq 0 \quad (3.8b)$$

donde  $D'_{c1}(s)$  es un polinomio cualquiera.

Eligiendo el controlador más simple se deberá cumplir que  $D'_{c1}(s) = 1$ .

b)

$$D_{c2}(s) = sD'_{c2}(s) \quad (3.9a)$$

$$N_{c2}(0) \neq 0 \quad (3.9b)$$

donde  $D'_{c2}(s)$  es un polinomio cualquiera.

Eligiendo el controlador más simple se deberá cumplir que  $D'_{c2}(s) = 1$ .

Debe observarse que las condiciones  $D_{c1}(s) = sD'_{c1}(s)$  y  $D_{c2}(s) = sD'_{c2}(s)$  no pueden darse simultáneamente, ya que esto supone que los polinomios del numerador y denominador de  $H_{yw}(s)$  no sean coprimos, en contra de lo que estamos imponiendo, sino que tendrían el factor común  $s$ .

En conclusión, uno de los controladores del sistema de dos grados de libertad debe tener un factor integral. En el caso Preamentado debe ser necesariamente  $G_{c1}(s)$ .

Como consecuencia, el polinomio característico  $P(s)$  común de  $H_{yw}(s)$  y de  $H_{yr}(s)$  cumplirá necesariamente que

$$P(0) \neq 0 \quad (3.10)$$

Veremos en la Sección 4 la estructura Paralela con controlador PID-D, y se resolverá el problema de seguimiento a la señal de referencia parabólica, teniendo en cuenta las condiciones de supresión de una señal de perturbación constante deducidas en esta Sección. Se verá que la única solución posible es que sea el controlador  $G_{c1}(s)$  el que deba tener un factor integral.

En la Sección 5 se estudia la estructura Preamentada con controlador  $D|PID$  llegando a conclusiones idénticas.

## 4. Sistema de control realimentado con PID-D

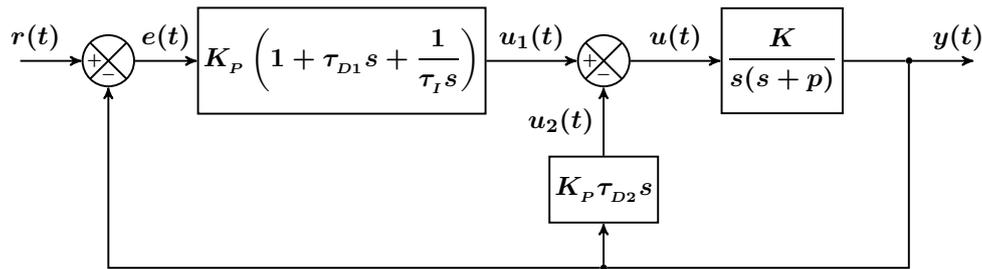


Figura 4.1: Esquema de control realimentado con PID-D

En la Figura 4.1 se muestra el esquema de control realimentado con un controlador PID-D, el cual generaliza los sistemas de tercer orden con controladores PID y PI-D estudiados en [1]. Para  $\tau_{D1} = 0$  se obtiene el sistema con controlador PI-D, y para  $\tau_{D2} = 0$  se obtiene el sistema con controlador PID.

La función de transferencia de lazo cerrado, con el PID-D ideal, tiene la forma

$$H_{PID-D}(s) = \frac{KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tilde{\tau}_D \left( s^2 + \frac{s}{\tilde{\tau}_D} + \frac{1}{\tilde{\tau}_D\tau_I} \right)} \quad (4.1)$$

donde

$$\tilde{\tau}_D = \tau_{D1} + \tau_{D2} \quad (4.2)$$

En [1] se demostró que el sistema de control realimentado con controladores PID y PI-D solo resuelve el problema de seguimiento para las señales de referencia escalón y rampa. Vamos a ver, a continuación, que es posible resolver el problema de seguimiento a la parábola con el controlador PID-D.

La función de transferencia del error,  $H_e(s) = 1 - H(s)$ , tiene la forma

$$H_{e,PID-D}(s) = \frac{s^2(s+p + KK_P\tau_{D2})}{s^2(s+p) + KK_P\tilde{\tau}_D \left( s^2 + \frac{s}{\tilde{\tau}_D} + \frac{1}{\tilde{\tau}_D\tau_I} \right)} \quad (4.3)$$

Podemos ver que si se cumple la condición siguiente

$$KK_P\tau_{D2} = -\frac{p}{K} \quad (4.4)$$

se resuelve el problema de seguimiento a la señal de referencia parabólica.

En este caso, las funciones de transferencia de lazo cerrado  $H_{PID-D}(s)$  y  $H_{e,PID-D}(s)$  quedarán en la forma,

$$H_{PID-D}(s) = \frac{KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)}{s^3 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.5a)$$

$$H_{e,PID-D}(s) = \frac{s^3}{s^3 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.5b)$$

Se ha supuesto que el polinomio característico cumple que  $P(0) \neq 0$ , es decir, que el controlador del lazo directo debe tener necesariamente un factor integral, ya que es una condición necesaria para resolver el problema de supresión de una señal de perturbación constante estudiada en la Sección 3.

Conviene observar que, la condición 4.4 resuelve el problema de satisfacción de especificaciones de diseño de régimen permanente mediante la técnica de asignación de ceros a la función de transferencia de lazo cerrado  $H_{PID-D}(s)$ . Es decir que, llamando  $P(s)$  al polinomio característico, se cumple que

$$H_{PID-D}(s) = \frac{P_1(s)}{P(s)} = \frac{P_1(s)}{s^3 + P_1(s)} \quad (4.6)$$

donde  $P_1(s) = KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)$ .

De esta manera la función de transferencia del error quedará en la forma dada por 4.5b, y como consecuencia, al aplicar el teorema del valor final con una señal de referencia parabólica, se cumple que

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{e,PID-D}(s) \frac{1}{s^3} = 0 \quad (4.7)$$

En esta situación el controlador PI-D no puede ser un caso particular del controlador PID-D, ya que el sistema de control de lazo cerrado sería inestable. La inestabilidad del PI-D con la condición 4.4 puede comprobarse construyendo la Tabla de Routh del polinomio característico que se obtiene haciendo  $\tau_{D1} = 0$ ,

$$P(s) = s^3 + KK_Ps + \frac{KK_P}{\tau_I} \quad (4.8)$$

$$\begin{array}{l}
s^3 : \\
s^2 : \\
s^1 : \\
s^0 :
\end{array}
\left\| \begin{array}{l}
1 \\
\epsilon \\
KK_P \left(1 - \frac{1}{\epsilon\tau_I}\right) \\
\frac{KK_P}{\tau_I}
\end{array} \right.
\begin{array}{l}
KK_P \\
\frac{KK_P}{\tau_I} \\
\\
\end{array}
\quad (4.9)$$

donde  $\epsilon > 0$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Puesto que  $\epsilon > 0$  y  $\epsilon \rightarrow 0$  hay dos cambios de signo en la primera columna, por lo que la ecuación característica  $P(s) = 0$  tiene dos raíces en el semiplano derecho.

El sistema de control de lazo cerrado con controlador PID-D con la condición 4.4 es un sistema de tercer orden cuyo polinomio característico  $P(s)$  escribiremos en la forma

$$P(s) = s^3 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right) \quad (4.10)$$

El polinomio característico de grado tres 4.10 puede escribirse también en la forma,

$$P(s) = (s + c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (4.11)$$

donde  $c, \zeta, \omega_n \in \mathbb{R}^+$ .

Los parámetros del controlador del lazo directo  $\{K_P, \tau_{D1}, \tau_I\}$  pueden ser sustituidos por los parámetros  $\{c, \zeta, \omega_n\}$ , sin embargo nos interesará introducir los parámetros de diseño  $\beta$  y  $\beta_2$ , definidos de la siguiente forma:

$$p = \beta_2\zeta\omega_n \quad (4.12a)$$

$$c = \beta\zeta\omega_n \quad (4.12b)$$

Identificando los polinomios 4.10 y 4.11, y teniendo en cuenta las definiciones dadas por 4.12, puede comprobarse que los parámetros  $\{K_P, \tau_{D1}, \tau_I\}$  del controlador del lazo directo del PID-D, dependen de los parámetros  $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$  de la siguiente forma,

$$K_P = \frac{p^2 \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2}\right)}{\beta_2^2 K} \quad (4.13a)$$

$$\tau_{D1} = \frac{\beta_2 (\beta + 2)}{p \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2}\right)} \quad (4.13b)$$

$$\tau_I = \frac{\beta_2\zeta^2 \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2}\right)}{\beta p} \quad (4.13c)$$

La función de transferencia de lazo cerrado con controlador PID-D con la condición 4.4 puede expresarse, cuando no hay polos múltiples, en la forma de descomposición en fracciones simples siguiente,

$$H_{PID-D}(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (4.14)$$

donde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ , son funciones que dependen de  $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$  con  $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$ , y vienen dadas por

$$r_1 = \frac{\zeta\omega_n \left( \beta \left( \frac{1}{\zeta^2} - 4 \right) + \frac{2}{\zeta^2} \right)}{Q(\beta)} \quad (4.15a)$$

$$r_2 = \frac{\omega_n^2 \left( \frac{1}{\zeta^2} - 2\beta \right)}{Q(\beta)} \quad (4.15b)$$

$$r_3 = \frac{\beta^3 \zeta \omega_n}{Q(\beta)} \quad (4.15c)$$

donde  $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$ .

En [1] se demostró que si  $\frac{r_1}{\omega_n}$ ,  $\frac{r_2}{\omega_n^2}$  y  $\frac{r_3}{\omega_n}$  son independientes de  $\beta_2$ , entonces la sobreelongación máxima  $M_p$  para una entrada escalón, también será independiente de  $\beta_2$ . Como este es el caso del controlador PID-D con la condición 4.4, entonces, para el diseño de este sistema de control sujeto a especificaciones de régimen transitorio, puede seguirse el mismo procedimiento que el propuesto en [1] para el diseño del sistema de control realimentado con controlador PI-D.

Por último, puede demostrarse que el valor inicial de la derivada con respecto al tiempo de la salida a la entrada escalón viene dada por la expresión

$$\dot{y}(0^+) = \zeta\omega_n (\beta + 2) = \frac{\beta + 2}{\beta_2} p \quad (4.16)$$

Por lo tanto,  $\dot{y}(0^+) > 0$ .

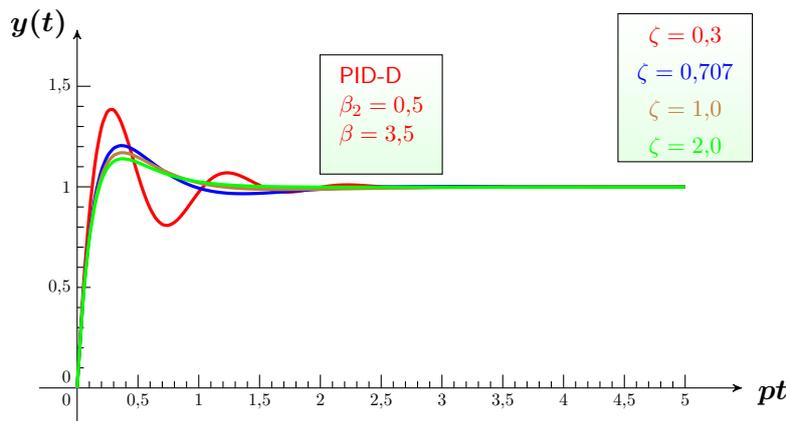


Figura 4.2: Salida PID-D con  $\beta_2 = 0,5$  y  $\beta = 3,5$

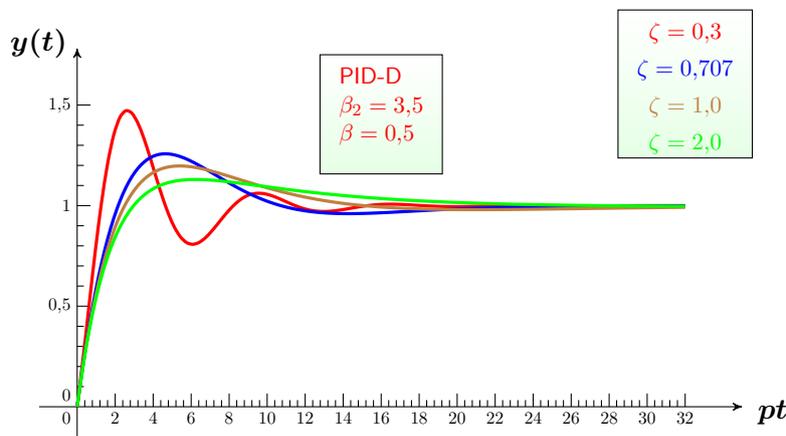


Figura 4.3: Salida PID-D con  $\beta_2 = 3,5$  y  $\beta = 0,5$

En las Figuras 4.2 y 4.3 se muestran las curvas de  $y(t)$  a la entrada escalón unidad, en función de  $pt$  para diferentes valores de  $\zeta, \beta$  y  $\beta_2$ .

## 5. Sistema de control realimentado con $D|PID$

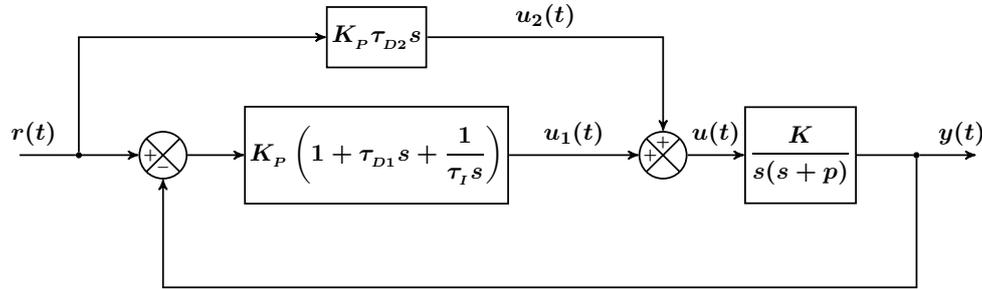


Figura 5.1: Esquema de control realimentado con  $D|PID$

Una estructura de control realimentado alternativa al PID-D es la que se muestra en la Figura 5.1, en la que hay un controlador de tipo PID en el lazo directo y un controlador de tipo D en el lazo prealimentado. Utilizaremos la notación  $D|PID$  para esta clase de estructuras.

La función de transferencia de lazo cerrado, con el  $D|PID$  ideal, tiene la forma

$$H_{D|PID}(s) = \frac{KK_P\tilde{\tau}_D \left( s^2 + \frac{s}{\tilde{\tau}_D} + \frac{1}{\tilde{\tau}_D\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (5.1)$$

donde

$$\tilde{\tau}_D = \tau_{D1} + \tau_{D2} \quad (5.2)$$

Con el controlador  $D|PID$  es posible resolver el problema de seguimiento a la señal de referencia parabólica, como ocurre con el controlador PID-D.

La función de transferencia del error,  $H_e(s) = 1 - H(s)$ , tiene la forma

$$H_{e,D|PID}(s) = \frac{s^2(s+p - KK_P\tau_{D2})}{s^2(s+p) + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (5.3)$$

Haciendo

$$KK_P\tau_{D2} = \frac{p}{K} \quad (5.4)$$

las funciones de transferencia de lazo cerrado  $H_{D|PID}(s)$  y  $H_{e,D|PID}(s)$  quedarán en la forma,

$$H_{D|PID}(s) = \frac{ps^2 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (5.5a)$$

$$H_{e,D|PID}(s) = \frac{s^3}{s^2(s+p) + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (5.5b)$$

Se ha supuesto que el polinomio característico cumple que  $P(0) \neq 0$ , es decir, que el controlador del lazo directo debe tener necesariamente un factor integral, ya que es una condición necesaria para resolver el problema de supresión de una señal de perturbación constante estudiada en la Sección 3.

El sistema de control de lazo cerrado con controlador  $D|PID$  con la condición 5.4 es un sistema de tercer orden cuyo polinomio característico  $P(s)$  escribiremos en la forma

$$P(s) = s^3 + (p + KK_P\tau_{D1})s^2 + KK_P\left(s + \frac{1}{\tau_I}\right) \quad (5.6)$$

El polinomio característico de grado tres 5.6 puede escribirse también en la forma,

$$P(s) = (s + c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (5.7)$$

donde  $c, \zeta, \omega_n \in \mathbb{R}^+$ .

Los parámetros del controlador del lazo directo  $\{K_P, \tau_{D1}, \tau_I\}$  pueden ser sustituidos por los parámetros  $\{c, \zeta, \omega_n\}$ , sin embargo nos interesará introducir los parámetros de diseño  $\beta$  y  $\beta_2$ , definidos de la siguiente forma:

$$p = \beta_2\zeta\omega_n \quad (5.8a)$$

$$c = \beta\zeta\omega_n \quad (5.8b)$$

Identificando los polinomios 5.6 y 5.7, y teniendo en cuenta las definiciones dadas por 5.8, puede comprobarse que los parámetros  $\{K_P, \tau_{D1}, \tau_I\}$  del controlador del lazo directo del  $D|PID$ , dependen de los parámetros  $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$  de la siguiente forma,

$$K_P = \frac{p^2 \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2}\right)}{\beta_2^2 K} \quad (5.9a)$$

$$\tau_{D1} = \frac{\beta_2(\beta - \beta_2 + 2)}{p \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2}\right)} \quad (5.9b)$$

$$\tau_I = \frac{\beta_2\zeta^2 \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2}\right)}{\beta p} \quad (5.9c)$$

La función de transferencia de lazo cerrado con controlador  $D|PID$  con la condición 5.4 puede expresarse, cuando no hay polos múltiples, en la forma de descomposición en fracciones simples siguiente,

$$H_{D|PID}(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (5.10)$$

donde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ , son funciones que dependen de  $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$  con  $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$ , y vienen dadas por

$$r_1 = \frac{\zeta\omega_n \left(\beta \left(\frac{1}{\zeta^2} - 4\right) + \frac{2}{\zeta^2}\right)}{Q(\beta)} \quad (5.11a)$$

$$r_2 = \frac{\omega_n^2 \left(\frac{1}{\zeta^2} - 2\beta\right)}{Q(\beta)} \quad (5.11b)$$

$$r_3 = \frac{\beta^3\zeta\omega_n}{Q(\beta)} \quad (5.11c)$$

donde  $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$ .

Las relaciones 5.11 son exactamente las mismas que las del sistema con PID-D dadas por 4.15, por lo que la sobreelongación máxima  $M_p$  para una entrada escalón, también será independiente de  $\beta_2$ . Por lo tanto, para el diseño sujeto a especificaciones de régimen transitorio, del controlador del lazo directo del  $D|PID$  con la condición 5.4, se puede utilizar el mismo procedimiento que el propuesto en [1] para el diseño del sistema de control realimentado con controlador PI-D.

También se cumple que el valor inicial de la derivada con respecto al tiempo de la salida a la entrada escalón, sigue la misma expresión que con el controlador PID-D,

$$\dot{y}(0^+) = \zeta\omega_n(\beta + 2) = \frac{\beta + 2}{\beta_2} p \quad (5.12)$$

Por lo tanto,  $\dot{y}(0^+) > 0$ .

Puede comprobarse que  $p + KK_P\tau_{D1} = \dot{y}(0^+)$ .

Por último, vamos a demostrar que el controlador  $D|PI$  puede ser un caso particular del controlador  $D|PID$  si se cumple la condición de que  $p\tau_I > 1$ . Para ello se analizan las condiciones de estabilidad del  $D|PI$  con la condición 5.4 construyendo la Tabla de Routh del polinomio característico que se obtiene haciendo  $\tau_{D1} = 0$ ,

$$P(s) = s^3 + ps^2 + KK_Ps + \frac{KK_P}{\tau_I} \quad (5.13)$$

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & KK_P \\ p & \frac{KK_P}{\tau_I} \\ KK_P \left(1 - \frac{1}{p\tau_I}\right) & \\ \frac{KK_P}{\tau_I} & \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Si  $p\tau_I < 1$  y  $K_P > 0$  se producen dos cambios de signo en la primera columna, por lo que la ecuación característica  $P(s) = 0$  tendrá dos raíces en el semiplano derecho.

El caso  $p\tau_I = 1$  es estable si  $K_P > 0$ , ya que en la Tabla de Routh no hay cambios de signo en la primera columna,

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & KK_P \\ p & pKK_P \\ \epsilon & \\ pKK_P & \end{array} \right. \quad (5.15)$$

donde  $\epsilon > 0$ .

Sin embargo  $p\tau_I = 1$  no puede darse, ya que de acuerdo con la relación 5.9b el controlador  $D|PI$  se obtiene como un caso particular del  $D|PID$  haciendo  $\beta_2 = \beta + 2$ . Haciendo  $p\tau_I = 1$  en 5.9c se cumple la relación  $\beta^2 + 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} = 0$ , que tiene soluciones de  $\beta < 0$ . Puede verse también, de la relación 5.9a que  $K_P = -\frac{p^2}{K} < 0$ , por lo que el sistema con controlador  $D|PI$  y  $p\tau_I = 1$  sería inestable.

## 6. Salida parcial $y_w(t)$ a la señal de entrada de perturbación constante

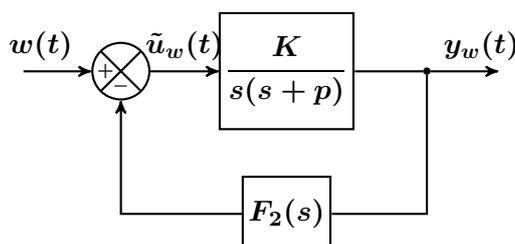


Figura 6.1: Esquema de bloques del sistema de dos grados de libertad con entrada de perturbación

En la Figura 6.1 se muestra el esquema de bloques del sistema de dos grados de libertad con la entrada de la señal de perturbación, obtenida siguiendo el principio de superposición que se muestra en la Figura 2.2.

La función de transferencia de lazo cerrado  $H_{yw}(s)$  tiene la forma

$$H_{yw}(s) = \frac{K}{s(s+p) + F_2(s)K} \quad (6.1)$$

donde  $F_2(s) = G_{c1}(s)$  para la estructura Prealimentada y  $F_2(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$  para la estructura Paralela.

Se estudia, en esta Sección, la salida parcial  $y_w(t)$  de las estructuras de Control Realimentado Prealimentada y Paralela de dos grados de libertad recogidas en la Tabla 2.1 cuando la señal de perturbación es constante, es decir, para  $w(t) = W$

Las funciones de transferencia de lazo cerrado con los controladores de tipo PID-D para la estructura Paralela y de tipo  $D|PID$  para la estructura Prealimentada, cuando se imponen las condiciones de supresión de la señal de perturbación constante estudiadas en la Sección 3, son las siguientes,

$$H_{yw,PID-D}(s) = \frac{Ks}{s^3 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (6.2a)$$

$$H_{yw,D|PID}(s) = \frac{Ks}{s^3 + ps^2 + KK_P\tau_{D1} \left( s^3 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (6.2b)$$

Por lo tanto,  $Y_w(s) = H_{yw}(s)W(s)$  cuando  $w(t) = W$ , tiene la forma,

$$Y_{w,PID-D}(s) = \frac{KW}{s^3 + KK_P\tau_{D1}s^2 + KK_P \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} \quad (6.3a)$$

$$Y_{w,D|PID}(s) = \frac{KW}{s^3 + (p + KK_P\tau_{D1})s^2 + KK_P \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} \quad (6.3b)$$

En el Apéndice C se demuestra que, para ambas estructuras, la salida debida a la señal de entrada de perturbación constante, satisface la relación siguiente:

$$y_w(t) = \begin{cases} \frac{KW\beta_2^2}{p^2Q(\beta)} \left( e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) + a \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \right) \right) & \zeta < 1 \quad (6.4a) \\ \frac{KW\beta_2^2}{p^2Q(\beta)} \left( e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cosh(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t) + a_1 \sinh(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t) \right) \right) & \zeta > 1 \quad (6.4b) \\ \frac{KW\beta_2^2}{p^2Q(\beta)} \left( e^{-\beta\omega_n t} - e^{-\omega_n t} (1 + (1-\beta)\omega_n t) \right) & \zeta = 1 \quad (6.4c) \end{cases}$$

donde

$$a = \frac{(1-\beta)\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6.5a)$$

$$a_1 = \frac{(1-\beta)\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \quad (6.5b)$$

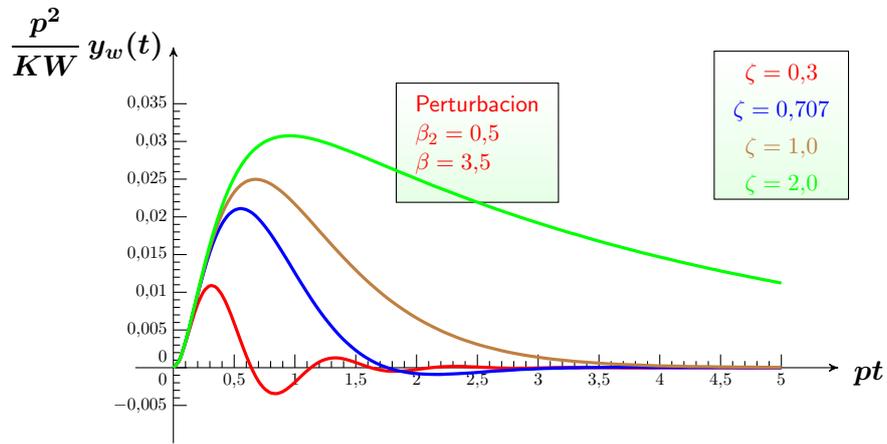


Figura 6.2: Salida Perturbacion con  $\beta_2 = 0,5$  y  $\beta = 3,5$

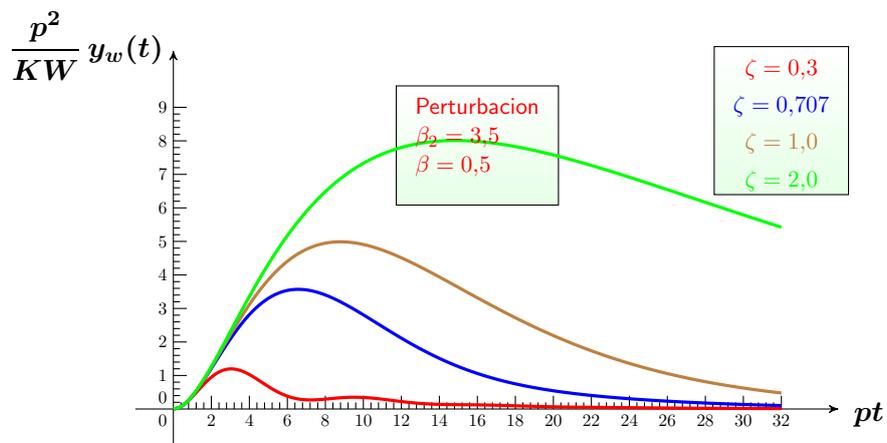


Figura 6.3: Salida Perturbacion con  $\beta_2 = 3,5$  y  $\beta = 0,5$

En las Figuras 6.2 y 6.3 se muestran las curvas de  $\frac{p^2}{KW} y_w(t)$  en función de  $pt$  para diferentes valores de  $\zeta$ ,  $\beta$  y  $\beta_2$ .

# Apéndices

## A. Lema de los polinomios coprimos o identidad de Bézout

La identidad de Bézout se refiere a números enteros, y dice que dados dos números enteros cualesquiera  $a$  y  $b$  cuyo máximo común divisor es  $d$ , entonces existen dos números enteros  $x$  e  $y$  coprimos (no tienen factores comunes), tales que  $ax + by = d$ . Si  $a$  y  $b$  son números primos entonces  $d = 1$ .

El siguiente Lema es una generalización de esta identidad para polinomios.

**Lema de los polinomios coprimos:** Se cumple que los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  de grados  $m$  y  $n \geq m$  respectivamente son coprimos si existen los polinomios coprimos  $A(s)$  y  $B(s)$  de grados  $n_A < n$  y  $m_B < m$  respectivamente tales que

$$A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1 \quad (\text{A.1})$$

También se cumple que si  $N(s)$  y  $D(s)$  son polinomios coprimos, entonces los polinomios  $A(s)$  y  $B(s)$  son únicos.

Por ejemplo, como  $D(s) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$  y  $N(s) = s + 1$  no son coprimos, no se puede encontrar ningún polinomio  $A(s)$  y  $B(s)$  que cumpla la identidad de Bézout, ya que siempre se cumple que  $(s + 1)(A(s) + (s + 2)B(s)) \neq 1$ .

Pero si  $D(s) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$  y  $N(s) = s + 4$ , escogiendo los polinomios genéricos  $A(s)$  y  $B(s)$  de grados  $n_A < n$  y  $n_B < m$  entonces

$$B(s) = c \quad (\text{A.2a})$$

$$A(s) = as + b \quad (\text{A.2b})$$

$$1 = A(s)(s + 4) + B(s)(s^2 + 3s + 2) = (a + c)s^2 + (4a + b + 3c)s + (4b + 2c) \quad (\text{A.2c})$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$a + c = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$4a + b + 3c = 0 \quad (\text{A.3b})$$

$$4b + 2c = 1 \quad (\text{A.3c})$$

cuya solución es única y dada por

$$c = b = -a = \frac{1}{6} \quad (\text{A.4})$$

El Lema nos asegura que los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  son coprimos, ya que  $A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1$ , para los polinomios

$$A(s) = -\frac{1}{6}s + \frac{1}{6} \quad (\text{A.5a})$$

$$B(s) = \frac{1}{6} \quad (\text{A.5b})$$

También ha quedado demostrado en este ejemplo que  $A(s)$  y  $B(s)$  son únicos.

## B. Estructuras de un grado de libertad

Consideremos un sistema realimentado de un único controlador de función de transferencia  $G_c(s)$ ,

$$G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (\text{B.1})$$

donde los polinomios  $N_c(s)$  y  $D_c(s)$  son coprimos y de grados  $m_c$  y  $n_c$  respectivamente.

Consideremos el sistema a controlar de función de transferencia  $G(s)$ ,

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{B.2})$$

donde los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  son coprimos y de grados  $m$  y  $n \geq m$  respectivamente.

Sean  $A(s)$  y  $B(s)$  los polinomios de Bézout de  $N(s)$  y  $D(s)$  del Lema de polinomios coprimos enunciado en el Apéndice A, es decir

$$A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1 \quad (\text{B.3})$$

Independientemente de qué estructura de control se tenga (el controlador en el lazo directo o en el lazo realimentado), el polinomio característico  $P(s)$  tiene la forma

$$P(s) = D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s) \quad (\text{B.4})$$

Multipliquemos la identidad de Bézout por  $P(s)$ ,

$$P(s) = P(s)A(s)N(s) + P(s)B(s)D(s) \quad (\text{B.5})$$

Restando ambas expresiones,

$$0 = (P(s)A(s) - N_c(s))N(s) + (P(s)B(s) - D_c(s))D(s) \quad (\text{B.6})$$

Como consecuencia se cumplirá que para cualquier polinomio  $Q(s)$ ,

$$P(s)A(s) - N_c(s) = Q(s)D(s) \quad (\text{B.7a})$$

$$P(s)B(s) - D_c(s) = -Q(s)N(s) \quad (\text{B.7b})$$

De aquí se deduce que

$$N_c(s) = P(s)A(s) - Q(s)D(s) \quad (\text{B.8a})$$

$$D_c(s) = P(s)B(s) + Q(s)N(s) \quad (\text{B.8b})$$

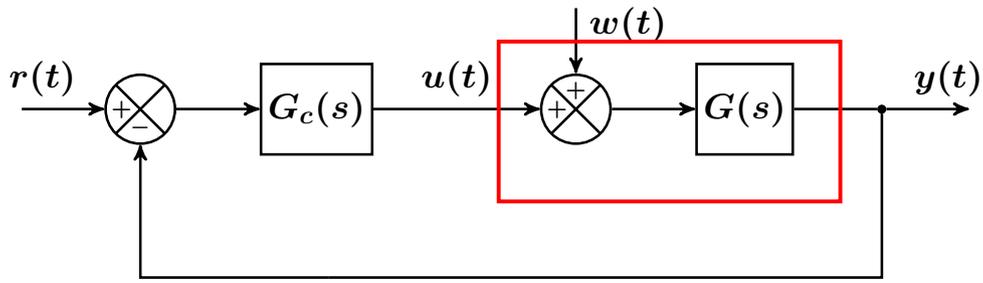
La función de transferencia del controlador podrá expresarse en función de  $P(s)$  y de  $Q(s)$  como

$$G_c(s) = \frac{A(s) - M(s)D(s)}{B(s) + M(s)N(s)} \quad (\text{B.9})$$

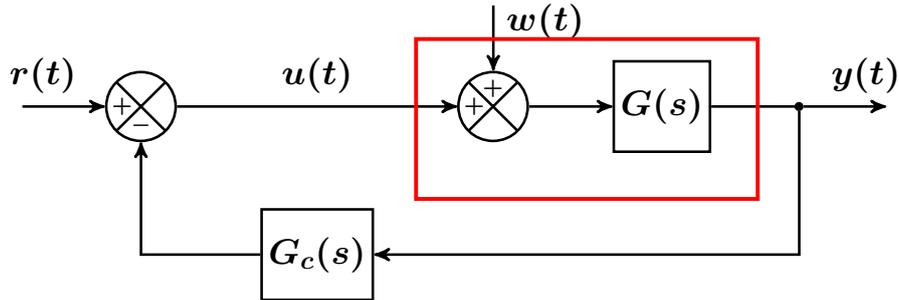
donde

$$M(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (\text{B.10})$$

Si consideramos que el polinomio característico  $P(s)$  es conocido (y estable en el sentido de Hurwitz), y puesto que también son conocidos los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$ , y  $A(s)$  y  $B(s)$  son polinomios únicos que se pueden obtener resolviendo la identidad de Bézout, la función de transferencia del controlador dependerá exclusivamente del polinomio  $Q(s)$ . El polinomio  $Q(s)$  puede ser cualquiera. Este es el sentido que daremos al concepto de grado de libertad de una función de transferencia.



(a)



(b)

Figura B.1: Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo directo, (b) Lazo realimentado

Podemos ver que las funciones de transferencia de lazo cerrado  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  de la Figura B.1 son de un grado de libertad dependientes del mismo polinomio  $Q(s)$ . En este sentido diremos que la estructura del sistema de control realimentado es de un grado de libertad.

Si el controlador está situado en el lazo directo,

$$H_{yr}(s) = \frac{N_c(s)N(s)}{P(s)} = (A(s) - M(s)D(s))N(s) \quad (\text{B.11a})$$

$$H_{yw}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{B.11b})$$

y si el controlador está situado en el lazo realimentado

$$H_{yr}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{B.12a})$$

$$H_{yw}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{B.12b})$$

Puesto que  $H_{er} = 1 - H_{yr}$ , entonces la función de transferencia del error también será de un grado de libertad.

Además, por la elección que se ha hecho de  $P(s)$  todas las funciones de transferencia de lazo cerrado serán estables y en consecuencia el sistema realimentado será estable para cualquier polinomio  $Q(s)$  que se escoja.

### C. Respuesta a la señal de entrada de perturbación constante

Consideremos que la salida  $Y_w(s)$  a la señal de perturbación constante  $w(t) = W$  tiene la forma siguiente

$$Y_w(s) = \frac{KW}{(s + \beta\zeta\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (\text{C.1})$$

La relación C.1 puede escribirse en la forma de descomposición en fracciones simples siguiente,

$$Y_w(s) = KW \left( \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \right) \quad (\text{C.2})$$

donde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ , son funciones que dependen de  $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$  con  $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$ , y vienen dadas por

$$r_1 = -\frac{1}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \quad (\text{C.3a})$$

$$r_2 = \frac{\beta - 2}{\zeta \omega_n Q(\beta)} \quad (\text{C.3b})$$

$$r_3 = \frac{1}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \quad (\text{C.3c})$$

donde  $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$ .

Puede comprobarse que se cumplen las siguientes relaciones

$$r_1 + r_3 = 0 \quad (\text{C.4a})$$

$$r_2 + r_3(2 - \beta)\zeta\omega_n = 0 \quad (\text{C.4b})$$

Por lo tanto la salida  $Y_w(s)$  dada por C.2 puede escribirse como

$$Y_w(s) = -\frac{KW}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \left( \frac{s + (2 - \beta)\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{1}{s + \beta\zeta\omega_n} \right) \quad (\text{C.5})$$

La relación C.5 puede escribirse en la forma,

$$Y_w(s) = -\frac{KW}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \left( \frac{s + \zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{(1 - \beta)\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{1}{s + \beta\zeta\omega_n} \right) \quad (\text{C.6})$$

Aplicando la Transformada de Laplace Inversa en el caso  $\zeta < 1$ ,

$$y_w(t) = \frac{KW}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \left( e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{(1 - \beta)\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right) \quad (\text{C.7})$$

donde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

Para  $\zeta > 1$ ,

$$y_w(t) = \frac{KW}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \left( e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cosh \tilde{\omega}_d t + \frac{(1 - \beta)\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \tilde{\omega}_d t \right) \right) \quad (\text{C.8})$$

donde  $\tilde{\omega}_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ .

Para  $\zeta = 1$ ,

$$y_w(t) = \frac{KW}{\omega_n^2 Q(\beta)} \left( e^{-\beta\omega_n t} - e^{-\omega_n t} (1 + (1 - \beta)\omega_n t) \right) \quad (\text{C.9})$$

## Bibliografía

- [1] F. Monasterio-Huelin, *Sistemas de control realimentado de tercer orden. Controladores de tipo PID, PI-D y PI*, 2016. [Online]. Available: <http://roboLABO.etsit.upm.es>