

Sistemas de segundo orden: especificaciones de diseño del régimen transitorio. Controladores P, PD y P-D

Félix Monasterio-Huelin

11 de febrero de 2016

Índice

Índice	1
Índice de Figuras	1
Índice de Tablas	2
1. Respuesta de los sistemas continuos de segundo orden a una entrada escalón unidad	3
2. Características de régimen transitorio de los sistemas continuos de segundo orden	5
3. Ejemplos de sistemas de control realimentado de segundo orden: controladores P, P-D y PD	7
3.1. Controlador P	7
3.2. Controlador P-D	8
3.3. Controlador PD	10
3.4. Especificaciones de diseño del régimen transitorio del sistema de control realimentado con los controladores P y P-D	12
A. Salida de sistemas libres de segundo orden con condiciones iniciales no nulas	15
A.1. Sistema de segundo orden subamortiguado: $\zeta < 1$	15
A.2. Sistema de segundo orden sobreamortiguado: $\zeta > 1$	16
A.3. Sistema de segundo orden críticamente amortiguado: $\zeta = 1$	16
B. Resumen de ecuaciones de la salida con controladores P y P-D	17
C. Ecuación de la sobreelongación máxima M_p, del tiempo de pico t_p y del tiempo de subida t_r de los sistemas de segundo orden subamortiguados en su primera forma canónica	18
D. Ecuación del tiempo de establecimiento t_s de los sistemas de segundo orden subamortiguados en su primera forma canónica	19

Índice de Figuras

1.1. Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su primera forma canónica con entrada escalón unidad	3
1.2. Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su primera forma canónica con entrada escalón unidad: clases de respuesta	4
1.3. Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su segunda forma canónica con entrada escalón unidad	5
2.1. Características del régimen transitorio, con intervalo de tolerancia del 4%	5
3.1. Controlador P para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno	7

3.2. Salida con controlador P	8
3.3. Controlador P-D para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno	8
3.4. Salida con controlador P-D	10
3.5. Salida con controlador P-D	10
3.6. Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno	10
3.7. Salida con controlador PD	12
3.8. Salida con controlador PD	12
3.9. Salida con controlador P-D del ejemplo de diseño	14

Índice de Tablas

1. Respuesta de los sistemas continuos de segundo orden a una entrada escalón unidad

Para el estudio de la respuesta de un sistema de segundo orden a la entrada escalón unidad obtendremos la función de transferencia de los sistemas de segundo orden en la primera forma canónica, a partir de la ecuación diferencial,

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (1.1)$$

donde $\omega_n \in \mathbb{R}^+$ es la frecuencia natural, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el coeficiente de atenuación, $u(t) \in \mathbb{R}$ la entrada e $y(t) \in \mathbb{R}$ la salida del sistema continuo.

Aplicando la Transformada de Laplace se obtiene la función de transferencia $\mathcal{G}_1(s)$ que llamaremos **primera forma canónica** de los sistemas de segundo orden,

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \quad (1.2)$$

Cuando $u(t)$ es un escalón unidad $r_0(t)$ se obtiene la salida, bajo condiciones iniciales nulas,

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)} \quad (1.3)$$

Descomponiendo en fracciones simples, $Y(s)$ queda en la forma

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\alpha}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \quad (1.4)$$

En el Apéndice A, ecuaciones A.9 y A.12, se estudia la expresión del segundo miembro de la derecha obteniendo la respuesta (causal) al escalón unidad de un sistema de segundo orden $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$,

$$y(t) = \left(1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \right) r_0(t) \quad (1.5)$$

donde $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$ cuando la respuesta es subamortiguada, $\omega_d = -j\tilde{\omega}_d$ con $\tilde{\omega}_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$ cuando la respuesta es sobreamortiguada, y $\omega_d = 0$ cuando la respuesta es críticamente amortiguada.

Es habitual representar la respuesta al escalón para diversos valores del coeficiente de amortiguamiento ζ definido como $\alpha = \zeta\omega_n$ como se muestra en las Figuras 1.1 y 1.2. Se produce una respuesta subamortiguada cuando $\zeta < 1$, una respuesta sobreamortiguada cuando $\zeta > 1$ y una respuesta críticamente amortiguada cuando $\zeta = 1$.

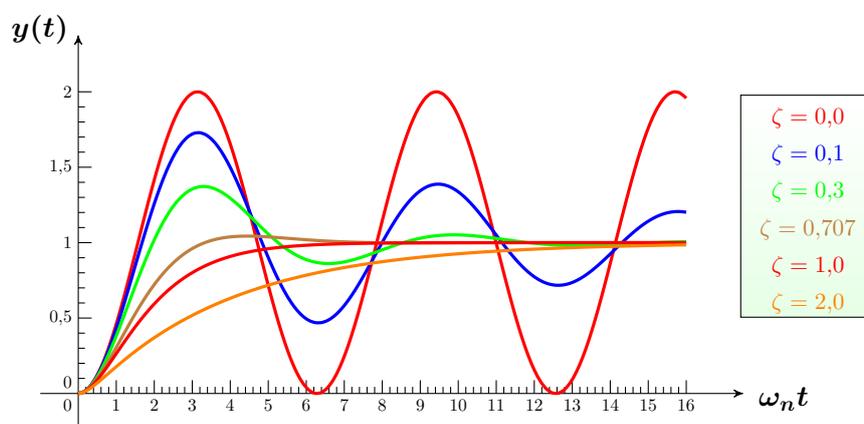


Figura 1.1: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su primera forma canónica con entrada escalón unidad

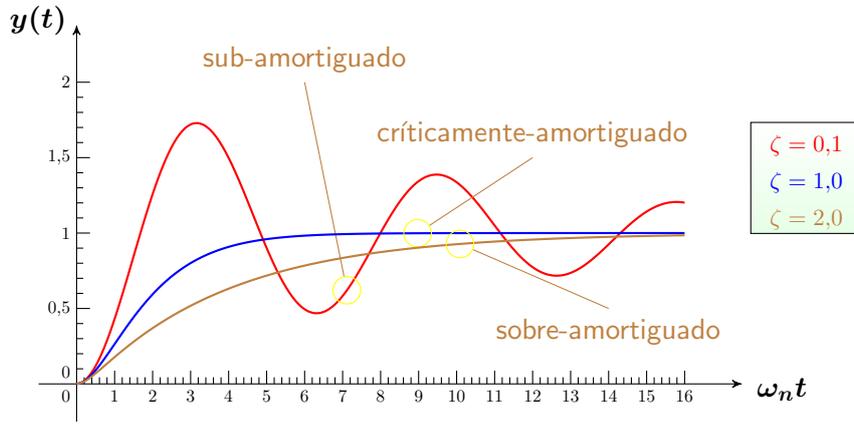


Figura 1.2: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su primera forma canónica con entrada escalón unidad: clases de respuesta

La expresión 1.5 puede escribirse en la forma

$$y(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \right) r_0(t) \quad (1.6)$$

donde

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (1.7a)$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (1.7b)$$

En el caso sobreamortiguado conviene escribir la respuesta al escalón 1.5 en la forma de exponenciales, teniendo en cuenta que las funciones trigonométricas de argumentos complejos son funciones hiperbólicas,

$$y(t) = \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\tilde{\omega}_d} e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_2}{2\tilde{\omega}_d} e^{-\alpha_1 t} \right) r_0(t) \quad (1.8)$$

donde

$$\alpha_1 = \alpha + \tilde{\omega}_d \quad (1.9a)$$

$$\alpha_2 = \alpha - \tilde{\omega}_d \quad (1.9b)$$

El caso críticamente amortiguado puede obtenerse calculando el límite cuando $\omega_d \rightarrow 0$ en la expresión 1.5

$$y(t) = (1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}) r_0(t) \quad (1.10)$$

La **segunda forma canónica** de los sistemas de segundo orden deriva de la ecuación diferencial,

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n \dot{u}(t) \quad (1.11)$$

Su función de transferencia es $\mathcal{G}_2(s)$,

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{\omega_n s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \quad (1.12)$$

Cuando $u(t)$ es un escalón unidad $r_0(t)$ se obtiene la salida

$$Y(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \quad (1.13)$$

por lo que la respuesta al escalón unidad es

$$y(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right) r_0(t) \quad (1.14)$$

En la Figura 1.3 se muestran las respuestas al escalón unidad variando el coeficiente de amortiguamiento ζ para un sistema de orden dos en su segunda forma canónica.

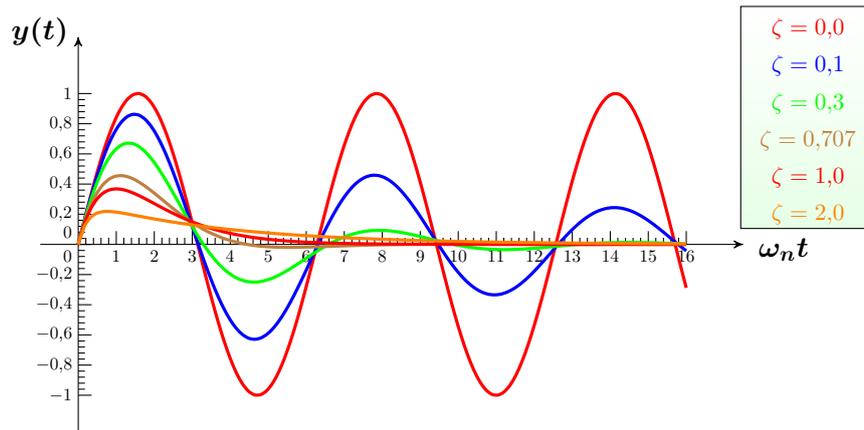


Figura 1.3: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su segunda forma canónica con entrada escalón unidad

Cuando los polos son reales conviene expresar la respuesta al escalón en forma de exponenciales,

$$y(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}) \right) r_0(t) \quad (1.15)$$

donde α_1, α_2 vienen dados por las relaciones 1.9.

Por último, la respuesta al escalón para el caso $\zeta = 1$ viene dado por

$$y(t) = (\omega_n t e^{-\omega_n t}) r_0(t) \quad (1.16)$$

2. Características de régimen transitorio de los sistemas continuos de segundo orden

En la Figura 2.1 se muestran dos características fundamentales del régimen transitorio que deben utilizarse como especificaciones de diseño de los controladores: el tiempo de establecimiento t_s y la sobreelongación máxima M_p .

También se muestran en la Figura 2.1 otras características que pueden resultar útiles, como el tiempo de pico t_p y el tiempo de subida t_r .

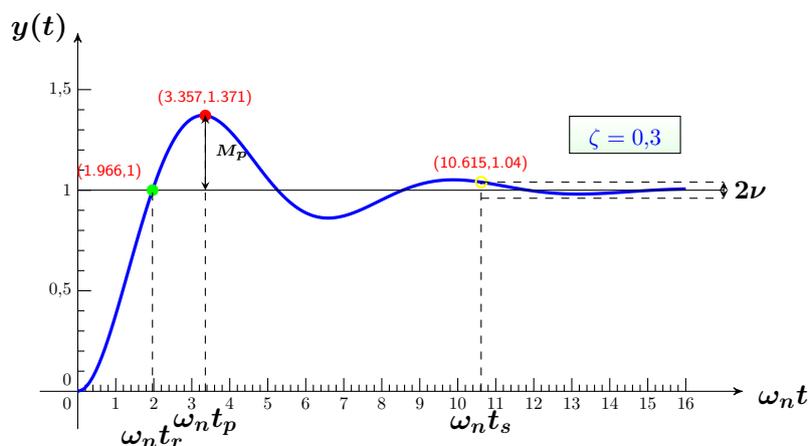


Figura 2.1: Características del régimen transitorio, con intervalo de tolerancia del 4%

El tiempo de establecimiento t_s marca una frontera entre el régimen permanente práctico y el régimen transitorio. Se define en relación a un factor de tolerancia ν con respecto a la señal

de referencia. Dota de sentido práctico a la calidad del problema de seguimiento de una señal de referencia.

La sobreelongación máxima M_p solo tiene sentido para respuestas subamortiguadas, y es muy importante para evitar la saturación de la señal de control (salida del controlador). Por lo tanto debe ser seleccionado cuidadosamente.

En los Apéndices C y D se demuestra que para el caso de sistemas de segundo orden en su primera forma canónica con una entrada escalón unidad, los valores de estas especificaciones de diseño satisfacen las siguientes relaciones:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (2.1a)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (2.1b)$$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega_d} \quad (2.1c)$$

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\zeta\omega_n} \quad (2.1d)$$

donde ν es la tolerancia, y

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.2a)$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (2.2b)$$

3. Ejemplos de sistemas de control realimentado de segundo orden: controladores P, P-D y PD

En esta Sección se va a obtener la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de control realimentado de un sistema de orden dos, orden relativo dos y tipo uno, con controladores P, PD y P-D. La función de transferencia del sistema a controlar la escribiremos en la forma

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (3.1)$$

donde $K, p \in \mathbb{R}^+$ son parámetros constantes y positivos del sistema.

Veremos que, en todos los casos, la función de transferencia de lazo cerrado es un sistema de orden dos y tipo cero. Con los controladores P y P-D el orden relativo es dos, mientras que con el controlador PD, el orden relativo es la unidad. Por lo tanto, con los controladores P y P-D la función de transferencia de lazo cerrado se corresponde con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden, mientras que con el controlador PD, veremos que la función de transferencia de lazo cerrado es una combinación lineal de la primera y segunda forma canónica.

En esta Sección también se definirán los parámetros de los controladores, y una forma de normalización de la función de transferencia de lazo cerrado, convenientes para el diseño de los controladores.

Se verá, finalmente, un ejemplo numérico de diseño de los controladores P y P-D.

3.1. Controlador P

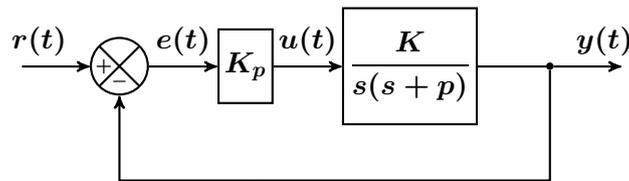


Figura 3.1: Controlador P para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 3.1 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional (P) donde el sistema a controlar es de segundo orden y de tipo uno. La función de transferencia de lazo cerrado $H_P(s)$ tiene la forma,

$$H_P(s) = \frac{K_p K}{s^2 + ps + K_p K} \quad (3.2)$$

Como vemos, coincide con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden dada por 1.2,

$$H_P(s) = \mathcal{G}_1(s) \quad (3.3)$$

donde la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_n = \sqrt{K_p K} \quad (3.4a)$$

$$\zeta = \frac{p}{2\sqrt{K_p K}} = \frac{p}{2\omega_n} \quad (3.4b)$$

Para el diseño del controlador P conviene elegir el parámetro ζ en vez de K_p , aunque el diseño no termine hasta que se asigne un valor a este parámetro.

Para ello conviene expresar la función de transferencia de lazo cerrado $H_P(s)$, en función de ζ . Puesto que $p = 2\zeta\omega_n$,

$$\omega_n^2 = \frac{p^2}{4\zeta^2} \quad (3.5)$$

De aquí que

$$H_P(s) = \frac{\frac{p^2}{4\zeta^2}}{s^2 + ps + \frac{p^2}{4\zeta^2}} \quad (3.6)$$

Por otro lado, también conviene normalizar la función de transferencia, de tal modo que puedan realizarse representaciones gráficas de las señales implicadas en el diseño, en función de pt , en vez de hacerlo como suele ser lo habitual, en función de $\omega_n t$. La razón para hacer esto es porque ω_n es un parámetro de diseño, y como consecuencia, la interpretación de las gráficas se hace más complicada.

Haciendo $s = ps_1$ se obtiene una función de transferencia de lazo cerrado independiente de p , que supone un cambio de escala en el tiempo, de t a pt ,

$$H_P(s_1) = \frac{1}{s_1^2 + s_1 + \frac{1}{4\zeta^2}} \quad (3.7)$$

En la Figura 3.2 se muestran curvas de la salida para diferentes valores de ζ , donde el eje de abscisas es pt .

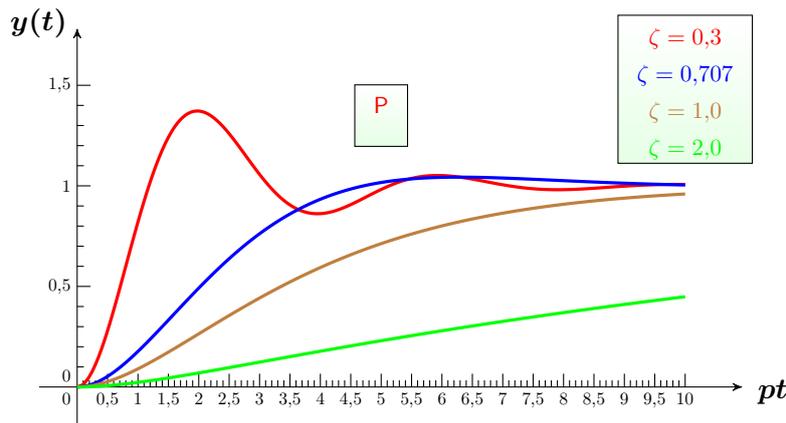


Figura 3.2: Salida con controlador P

3.2. Controlador P-D

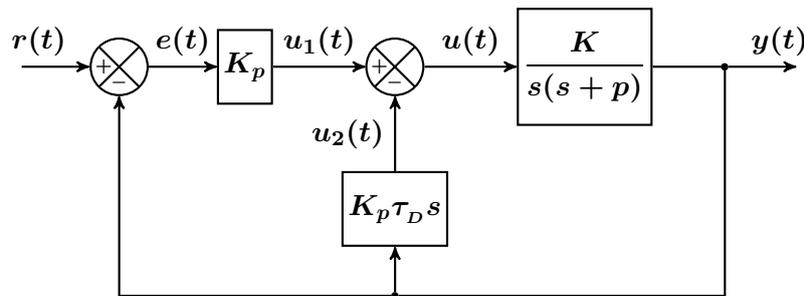


Figura 3.3: Controlador P-D para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 3.3 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador de tipo PD con el factor proporcional en el lazo directo y el factor derivativo en el lazo paralelo. Utilizaremos la notación P-D para esta clase de controladores.

Este sistema de control tiene una función de transferencia de lazo cerrado $H_{P-D}(s)$ que coincide con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden, de la misma forma que con el controlador P, pero a diferencia de este tiene dos parámetros de diseño (K_p, τ_D),

$$H_{P-D}(s) = \frac{K_p K}{s^2 + (p + K_p K \tau_D) s + K_p K} \quad (3.8)$$

Como vemos, se corresponde con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden,

$$H_{P-D}(s) = \mathcal{G}_1(s) \quad (3.9)$$

donde la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_n = \sqrt{K_p K} \quad (3.10a)$$

$$\zeta = \frac{p + K_p K \tau_D}{2\sqrt{K_p K}} = \frac{p + \omega_n^2 \tau_D}{2\omega_n} \quad (3.10b)$$

Introduciendo el parámetro $\beta_2 \neq 0$ tal que $p = \beta_2 \zeta \omega_n$ podemos expresar τ_D en la forma,

$$\tau_D = \frac{\zeta(2 - \beta_2)}{\omega_n} \quad (3.11)$$

donde

$$\beta_2 = \frac{p}{\zeta \omega_n} \quad (3.12)$$

Puede observarse que el Controlador P es un caso particular del Controlador P-D, que se obtiene haciendo $\beta_2 = 2$.

Para el diseño del controlador P-D conviene elegir los parámetros (ζ, β_2) en vez de (K_p, τ_D) , aunque el diseño no termine hasta que se asignen valores a estos últimos parámetros.

Para ello conviene expresar la función de transferencia de lazo cerrado $H_{P-D}(s)$ en función de los nuevos parámetros. Por definición $p = \beta_2 \zeta \omega_n$, por lo que,

$$\omega_n^2 = \frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2} \quad (3.13)$$

De aquí que

$$H_{P-D}(s) = \frac{\frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2}}{s^2 + \frac{2p}{\beta_2} s + \frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2}} \quad (3.14)$$

Por otro lado, también conviene normalizar la función de transferencia, de tal modo que puedan realizarse representaciones gráficas de las señales implicadas en el diseño, en función de pt , en vez de hacerlo como suele ser lo habitual, en función de $\omega_n t$. La razón para hacer esto es porque ω_n es un parámetro de diseño, y como consecuencia, la interpretación de las gráficas se hace más complicada.

Haciendo $s = ps_1$ se obtiene una función de transferencia de lazo cerrado independiente de p , que supone un cambio de escala en el tiempo, de t a pt ,

$$H_{P-D}(s_1) = \frac{1}{s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2}} \quad (3.15)$$

En las Figuras 3.4 y 3.5 se muestran curvas de la salida para diferentes valores de ζ donde el eje de abscisas es pt . En la Figura 3.4 con $\beta_2 = 0,5$, y en la Figura 3.5 con $\beta_2 = 2,5$. Pueden compararse con la Figura 3.2 realizada con el controlador P, y aunque en ambos casos se trate de un sistema de segundo orden en su primera forma canónica, puede apreciarse que hay diferencias cuantitativas en la respuesta al escalón unidad, pero la variación de las curvas con β_2 no altera la forma cualitativa de las curvas.

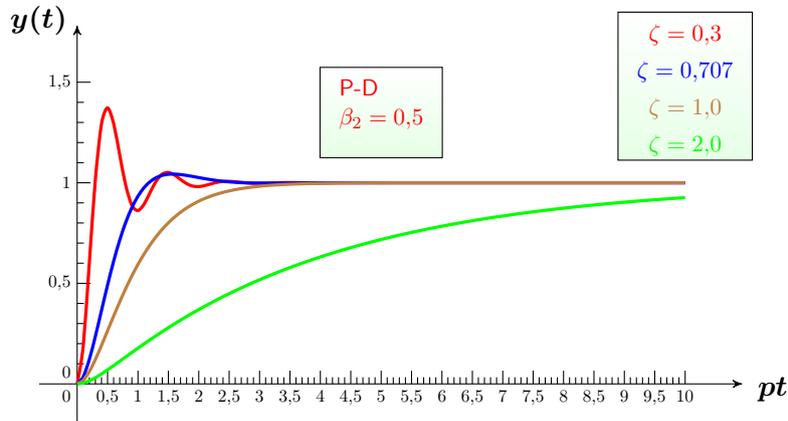


Figura 3.4: Salida con controlador P-D

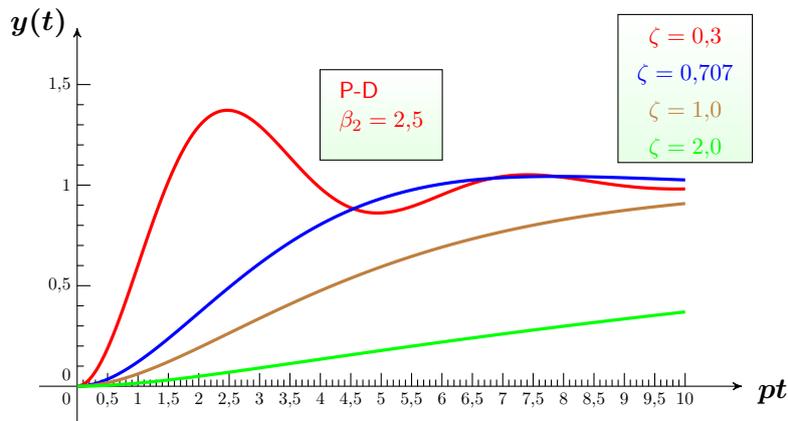


Figura 3.5: Salida con controlador P-D

3.3. Controlador PD

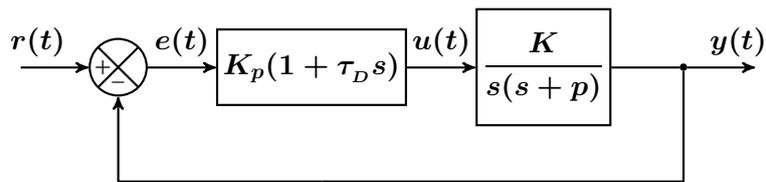


Figura 3.6: Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 3.6 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional-Derivativo (PD) ideal. La función de transferencia de lazo cerrado $H_{PD}(s)$ tiene la forma

$$H_{PD}(s) = \frac{K_p K (1 + \tau_D s)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D) s + K_p K} \quad (3.16)$$

Como ocurre con el controlador P-D, es posible elegir independientemente la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento, ya que se dispone de dos parámetros de diseño (K_p, τ_D). Sin embargo el sistema de lazo cerrado no coincide con la primera forma canónica $\mathcal{G}_1(s)$ de los sistemas de segundo orden porque tiene un cero en $s = -\frac{1}{\tau_D}$.

Podemos ver que la función de transferencia de lazo cerrado 3.16 del sistema de control de la Figura 3.6 con un PD en el lazo directo, es una combinación lineal de las dos formas canónicas de

los sistemas de segundo orden. De hecho,

$$H_{PD}(s) = \mathcal{G}_1(s) + \left(2\zeta - \frac{p}{\omega_n}\right) \mathcal{G}_2(s) \quad (3.17)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{K_p K} \quad (3.18a)$$

$$\zeta = \frac{p + K_p K \tau_D}{2\sqrt{K_p K}} = \frac{p + \omega_n^2 \tau_D}{2\omega_n} \quad (3.18b)$$

Utilizando el parámetro $\beta_2 \neq 0$ tal que $p = \beta_2 \zeta \omega_n$, puede verse la dependencia de $H_{PD}(s)$ con la segunda forma canónica de una forma más sencilla,

$$H_{PD}(s) = \mathcal{G}_1(s) + \zeta(2 - \beta_2) \mathcal{G}_2(s) \quad (3.19)$$

La relación dada por 3.18b puede escribirse en la forma

$$\tau_D = \frac{\zeta(2 - \beta_2)}{\omega_n} \quad (3.20)$$

por lo que si se impone que $\tau_D > 0$, se deberá cumplir que $\beta_2 < 2$, ya que admitimos que $\zeta > 0$ y $\omega_n > 0$. En consecuencia, el coeficiente de la segunda forma canónica será positivo. Por la misma razón, $\tau_D < 0$ si $\beta_2 > 2$. Normalmente se escogerá $\tau_D > 0$ ya que en caso contrario el sistema de control de lazo cerrado tendrá un cero inestable, y por lo tanto será de fase no mínima. Este hecho plantea algunos problemas que no vamos a analizar aquí.

Cuando $\beta_2 = 2$ el efecto de la segunda forma canónica desaparece. Pero este caso se corresponde con $\tau_D = 0$, por lo que en realidad se trataría de un controlador P, y no PD. Como consecuencia, podemos entender que al añadir un factor derivativo al controlador del lazo directo, es inevitable que aparezca el efecto debido a la segunda forma canónica. Puesto que p es un valor conocido, entonces, fijando el valor de ζ y β_2 , se obtendría el valor de ω_n , y puesto que K también es conocido, se obtendría el valor de K_p , quedando resuelto el problema de diseño del controlador.

Haciendo el cambio de variable $s = ps_1$, puede normalizarse la función de transferencia de lazo cerrado, de tal manera que dependa de los parámetros de diseño (ζ, β_2) , como se hizo con el controlador P-D,

$$H_{PD}(s_1) = \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2} + \frac{2 - \beta_2}{\beta_2} s_1}{s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2}} \quad (3.21)$$

En las Figuras 3.7 y 3.8 se muestran curvas de la salida para diferentes valores de ζ donde el eje de abscisas es pt . En la Figura 3.7 $\beta_2 = 0,5$ y en la Figura 3.8 $\beta_2 = 2,5$. En este último caso $\beta_2 > 2$ por lo que tiene un cero positivo, razón por la cual aparece una sub-elongación en las proximidades del origen. Vamos a demostrar, a continuación, que la pendiente de la curva en el origen es negativa, a diferencia de la pendiente de la salida del sistema realimentado con el controlador P-D, que es nula. La variación de las curvas con β_2 altera ligeramente la forma cualitativa de las curvas.

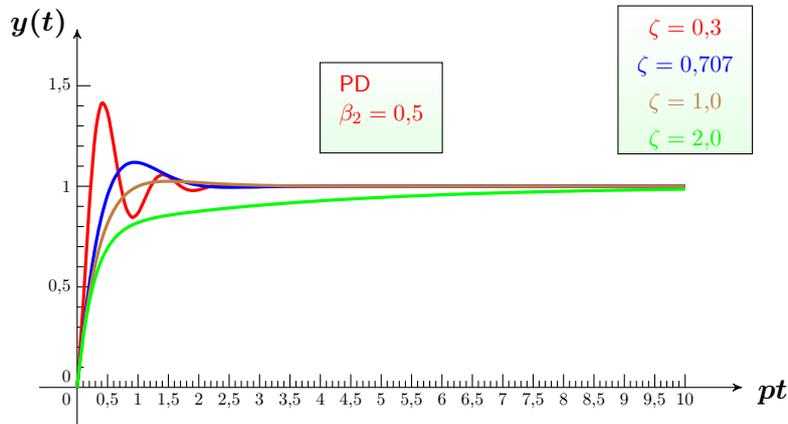


Figura 3.7: Salida con controlador PD

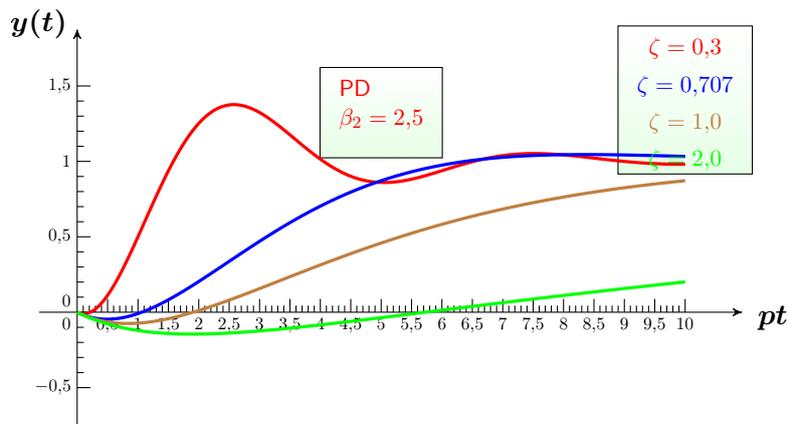


Figura 3.8: Salida con controlador PD

Teniendo en cuenta las respuestas al escalón de cada forma canónica, dadas por 1.5 y 1.14, se obtiene la respuesta al escalón de sistema de control realimentado con un controlador PD en el lazo directo,

$$y_{PD}(t) = 1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\zeta(\beta_2 - 1)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \quad (3.22)$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo y simplificando, se obtiene,

$$\dot{y}_{PD}(t) = \omega_n e^{-\alpha t} \left(\frac{\zeta^2(\beta_2 - 2) + 1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t - \zeta(\beta_2 - 2) \cos \omega_d t \right) \quad (3.23)$$

La pendiente en el origen es

$$\dot{y}_{PD}(0) = -\omega_n \zeta (\beta_2 - 2) \quad (3.24)$$

Como vemos, si $\beta_2 > 2$, entonces $\dot{y}_{PD}(0) < 0$.

Con los controladores P y P-D, la pendiente en el origen siempre es nula, pero con el controlador PD puede ser positiva o negativa según sea el valor de β_2 , pero nunca nula, ya que el caso $\beta_2 = 2$ se corresponde con el controlador P.

3.4. Especificaciones de diseño del régimen transitorio del sistema de control realimentado con los controladores P y P-D

Con los controladores P y P-D, las características de régimen transitorio se corresponden con las de un sistema de segundo orden en su primera forma canónica, por lo que se rigen por las ecuaciones

2.1 recogidas en la Sección 2,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (3.25a)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3.25b)$$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega_d} \quad (3.25c)$$

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\zeta\omega_n} \quad (3.25d)$$

donde ν es la tolerancia, y

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (3.26a)$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (3.26b)$$

Eliminando ω_n para expresarlas en función de los parámetros de diseño (ζ, β_2) ,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (3.27a)$$

$$pt_p = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi\beta_2 \quad (3.27b)$$

$$pt_r = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)(\pi - \varphi_0)\beta_2 \quad (3.27c)$$

$$pt_s \approx \left(\ln\left(\frac{1}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right)\beta_2 \quad (3.27d)$$

Por lo tanto, la sobreelongación máxima M_p es la misma con los controladores P y P-D, ya que solo depende de ζ , pero t_p, t_r y t_s dependen linealmente de β_2 , por lo que el controlador P-D tiene un grado de libertad más que el controlador P para variar estas especificaciones de diseño.

Por ejemplo, si se especifica un valor de M_p del 15% de la señal de referencia, una tolerancia ν del 2% de la señal de referencia y un tiempo de establecimiento de $pt_s \approx 5$, se obtendrían los siguientes valores de los parámetros de diseño (ζ, β_2) ,

$$\zeta = 0,5169 \quad (3.28a)$$

$$\beta_2 = 1,2293 \quad (3.28b)$$

El valor de la frecuencia natural se obtiene de $p = \beta_2\zeta\omega_n$,

$$\omega_n = 1,5737p \quad (3.29)$$

Ahora, utilizando las expresiones dadas por 3.10a y 3.11, se obtienen los parámetros del controlador (K_p, τ_D) en función de los parámetros del sistema (K, p) ,

$$K_p = \frac{2,4765p^2}{K} \quad (3.30a)$$

$$\tau_D = \frac{0,2532}{p} \quad (3.30b)$$

En la Figura 3.9 se muestra la curva de respuesta para este diseño del controlador P-D.

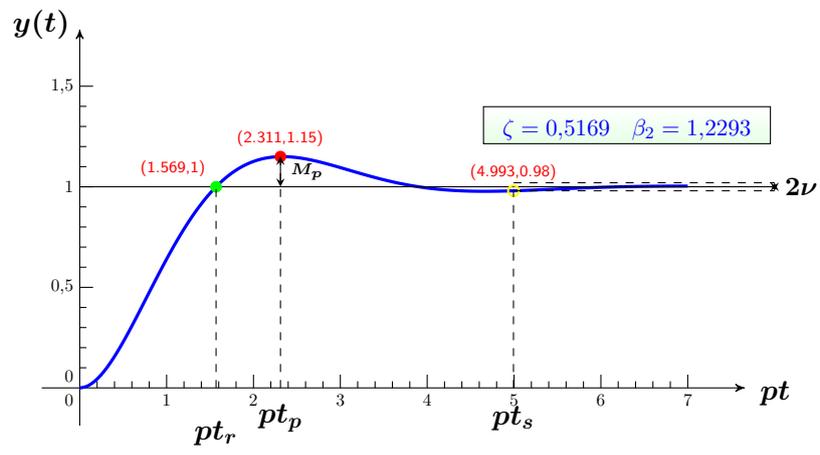


Figura 3.9: Salida con controlador P-D del ejemplo de diseño

A. Salida de sistemas libres de segundo orden con condiciones iniciales no nulas

Consideremos el sistema de segundo orden continuo libre dado por la ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

con las condiciones iniciales $[y(0^-), \dot{y}(0^-)]$ y $\alpha, \omega_n \in \mathbb{R}^+$.

Aplicando la Transformada de Laplace se obtiene

$$(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)Y(s) = y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + 2\alpha y(0^-) \quad (\text{A.2})$$

que puede escribirse en la forma

$$Y(s) = \frac{T(s)}{P(s)} \quad (\text{A.3})$$

donde $T(s)$ es el polinomio de condiciones iniciales y $P(s)$ el polinomio característico,

$$T(s) = y(0^-)(s + 2\alpha) + \dot{y}(0^-) \quad (\text{A.4a})$$

$$P(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2 \quad (\text{A.4b})$$

Nos interesará escribir $Y(s)$ en la forma siguiente:

$$Y(s) = \frac{y(0^-)(s + 2\alpha)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} + \frac{\dot{y}(0^-)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\alpha_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} \quad (\text{A.6})$$

Podemos distinguir tres casos según que $\alpha < \omega_n$, $\alpha > \omega_n$ o $\alpha = \omega_n$ que analizamos a continuación por separado. Para caracterizarlos utilizaremos el coeficiente de amortiguamiento ζ donde

$$\alpha = \zeta\omega_n \quad (\text{A.7})$$

A.1. Sistema de segundo orden subamortiguado: $\zeta < 1$

Cuando $\zeta < 1$ podemos hacer

$$\alpha_1 = \alpha + j\omega_d \quad (\text{A.8a})$$

$$\alpha_2 = \alpha - j\omega_d \quad (\text{A.8b})$$

donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

De la relación A.5 extraemos los factores de la derecha, y los escribimos en la forma de fracciones simples,

$$\frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{1}{2j\omega_d} \left[\frac{\alpha_1}{s + \alpha_2} - \frac{\alpha_2}{s + \alpha_1} \right] \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{1}{2j\omega_d} \left[\frac{1}{s + \alpha_2} - \frac{1}{s + \alpha_1} \right] \quad (\text{A.9b})$$

Por lo tanto calculando $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, se obtiene

$$y(t) = \frac{y(0^-)}{2j\omega_d} [\alpha_1 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{-\alpha_1 t}] + \frac{\dot{y}(0^-)}{2j\omega_d} [e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}] \quad (\text{A.10})$$

que puede escribirse en la forma

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t} \frac{\alpha_1 e^{j\omega_d t} - \alpha_2 e^{-j\omega_d t}}{2j\omega_d} + \dot{y}(0^-)e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j\omega_d} \quad (\text{A.11})$$

Por fin puede escribirse en la forma trigonométrica

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (\text{A.12})$$

Podemos escribir la solución A.12 en las componentes trigonométricas.

$$y(t) = \left(\frac{y(0^-)\alpha + \dot{y}(0^-)}{\omega_d} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + y(0^-) e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \quad (\text{A.13})$$

Comparando las relaciones A.12 y A.3 puede comprobarse que

$$\mathcal{L}_- \{ e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \} = \frac{\omega_d}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2} \quad (\text{A.14a})$$

$$\mathcal{L}_- \{ e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2} \quad (\text{A.14b})$$

A.2. Sistema de segundo orden sobreamortiguado: $\zeta > 1$

Cuando $\zeta > 1$

$$\alpha_1 = \alpha + \tilde{\omega}_d \quad (\text{A.15a})$$

$$\alpha_2 = \alpha - \tilde{\omega}_d \quad (\text{A.15b})$$

donde $\tilde{\omega}_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Observando que

$$\omega_d = -j\tilde{\omega}_d \quad (\text{A.16})$$

podemos utilizar las relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas:

$$\sin jx = j \sinh x \quad (\text{A.17a})$$

$$\cos jx = \cosh x \quad (\text{A.17b})$$

Sustituyendo estas relaciones en A.12 se obtiene

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\tilde{\omega}_d} \sinh \tilde{\omega}_d t + \cosh \tilde{\omega}_d t \right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\tilde{\omega}_d} e^{-\alpha t} \sinh \tilde{\omega}_d t \quad (\text{A.18})$$

Este resultado conviene expresarlo en la forma de exponenciales, obteniéndolo fácilmente de las expresiones A.9a y A.9b, junto con A.5

$$y(t) = \left(\frac{\alpha_1 y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{2\tilde{\omega}_d} \right) e^{-\alpha_1 t} - \left(\frac{\alpha_2 y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{2\tilde{\omega}_d} \right) e^{-\alpha_2 t} \quad (\text{A.19})$$

A.3. Sistema de segundo orden críticamente amortiguado: $\zeta = 1$

Cuando $\zeta = 1$ se cumple que $\alpha = \omega_n$ y que $\omega_d = 0$.

Calculando el límite cuando $\omega_d \rightarrow 0$ en la ecuación A.12

$$y(t) = \lim_{\omega_d \rightarrow 0} \left\{ y(0^-) e^{-\omega_n t} \left(\frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_d} e^{-\omega_n t} \sin \omega_d t \right\} \quad (\text{A.20})$$

resulta

$$y(t) = y(0^-) e^{-\omega_n t} \left(\omega_n \lim_{\omega_d \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} + 1 \right) + \dot{y}(0^-) e^{-\omega_n t} \lim_{\omega_d \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} \quad (\text{A.21})$$

Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$y(t) = y(0^-) (\omega_n t + 1) e^{-\omega_n t} + \dot{y}(0^-) t e^{-\omega_n t} \quad (\text{A.22})$$

En este caso, la ecuación diferencial dada por A.1 puede escribirse en la forma

$$\ddot{y}(t) + 2\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$(s + \omega_n)^2 Y(s) = y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + 2\omega_n y(0^-) \quad (\text{A.24})$$

La ecuación A.22 puede escribirse en la forma

$$y(t) = (y(0^-)\omega_n + \dot{y}(0^-)) te^{-\omega_n t} + y(0^-)e^{-\omega_n t} \quad (\text{A.25})$$

Aplicando ahora la Transformada de Laplace a la ecuación A.25 se obtiene

$$Y(s) = (y(0^-)\omega_n + \dot{y}(0^-)) \mathcal{L}_- \{te^{-\omega_n t}\} + y(0^-) \frac{1}{s + \omega_n} \quad (\text{A.26})$$

Comparando las expresiones A.24 y A.26 se obtiene

$$\mathcal{L}_- \{te^{-\omega_n t}\} = \frac{1}{(s + \omega_n)^2} \quad (\text{A.27})$$

B. Resumen de ecuaciones de la salida con controladores P y P-D

Escribiremos la salida de un sistema de segundo orden con una entrada escalón unidad como

$$\tilde{y}(t) = y(t) + y_0(t) \quad (\text{B.1})$$

donde $y(t)$ es la salida bajo condiciones iniciales nulas e $y_0(t)$ la contribución en la salida de las condiciones iniciales.

Las ecuaciones de $y(t)$ y $y_0(t)$ son las siguientes

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) & \zeta < 1 & (\text{B.2a}) \\ 1 - \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\alpha_2 t} + \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\alpha_1 t} & \zeta > 1 & (\text{B.2b}) \\ 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} & \zeta = 1 & (\text{B.2c}) \end{cases}$$

$$y_0(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \left(\frac{\zeta y(0^-) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + y(0^-) \cos \omega_d t \right) & \zeta < 1 & (\text{B.3a}) \\ \left(\frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) y(0^-) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) e^{-\alpha_2 t} - \left(\frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) y(0^-) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) e^{-\alpha_1 t} & \zeta > 1 & (\text{B.3b}) \\ y(0^-) e^{-\omega_n t} + \left(\frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n} + y(0^-) \right) \omega_n t e^{-\omega_n t} & \zeta = 1 & (\text{B.3c}) \end{cases}$$

donde

$$\alpha = \zeta \omega_n \quad (\text{B.4a})$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{B.4b})$$

$$\alpha_1 = \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (\text{B.4c})$$

$$\alpha_2 = \omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (\text{B.4d})$$

La expresión de $y(t)$ (condiciones iniciales nulas) y de la derivada con respecto al tiempo $\dot{y}(t)$ para $\zeta < 1$ puede escribirse en la forma

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \quad (\text{B.5a})$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (\text{B.5b})$$

donde

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{B.6a})$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (\text{B.6b})$$

La expresión de $\tilde{y}(t)$ y de la derivada con respecto al tiempo $\dot{\tilde{y}}(t)$ para $\zeta < 1$, puede escribirse en la forma

$$\tilde{y}(t) = 1 - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (\text{B.7a})$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi - \varphi_0) \quad (\text{B.7b})$$

donde

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{B.8a})$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{B.8b})$$

$$a = \zeta(1 - y(0^-)) - \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n} \quad (\text{B.8c})$$

$$b = \sqrt{1 - \zeta^2}(1 - y(0^-)) \quad (\text{B.8d})$$

C. Ecuación de la sobreelongación máxima M_p , del tiempo de pico t_p y del tiempo de subida t_r de los sistemas de segundo orden subamortiguados en su primera forma canónica

En el Apéndice B, expresiones B.5, se recogen las expresiones de $y(t)$ y de su derivada con respecto al tiempo, $\dot{y}(t)$, en el caso subamortiguado,

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \quad (\text{C.1a})$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (\text{C.1b})$$

donde

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{C.2a})$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (\text{C.2b})$$

Igualando a cero la expresión C.1b se obtiene el conjunto de instantes de tiempo en que se producen máximos y mínimos en $y(t)$,

$$\omega_d t_p^* = n\pi \quad (\text{C.3})$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

El tiempo de pico se define como el instante de tiempo t_p en el que se produce el máximo de los máximos. Se dará para $n = 1$, por lo cual

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (\text{C.4})$$

Sustituyendo t_p en la ecuación C.1 se obtiene la sobreelongación máxima $M_p = 1 - y(t_p)$,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)\pi} \quad (\text{C.5})$$

Para el caso sobreamortiguado,

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\alpha t} \sinh \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t \quad (\text{C.6})$$

Las únicas soluciones posibles de $\dot{y}(t) = 0$ son $t = 0$ y $t = \infty$, por lo que no se producen sobreelongaciones.

Para el caso críticamente amortiguado,

$$\dot{y}(t) = \omega_n t e^{-\omega_n t} \quad (\text{C.7})$$

por lo que tampoco se producen sobreelongaciones.

Podemos observar también que, en todos los casos, la pendiente de $y(t)$ en el origen es nula,

$$\dot{y}(0) = 0 \quad (\text{C.8})$$

El tiempo de subida se define como el primer instante de tiempo t_r tal que $y(t_r) = 1$. Resolviendo esta ecuación con la expresión C.1a se obtiene el conjunto de instantes de tiempo siguiente,

$$\omega_d t_r^* = n\pi - \varphi_0 \quad (\text{C.9})$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto,

$$t_r = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega_d} \quad (\text{C.10})$$

D. Ecuación del tiempo de establecimiento t_s de los sistemas de segundo orden subamortiguados en su primera forma canónica

Las envolventes de la curva $y(t)$ son las curvas $\tilde{y}(t)$ tangentes a ella por el exterior,

$$\tilde{y}(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \quad (\text{D.1})$$

La diferencia entre las dos envolventes en el instante de tiempo de establecimiento t_s define aproximadamente el doble del margen de tolerancia ν , por lo que

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_s}\right) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_s}\right) \approx 2\nu \quad (\text{D.2})$$

De aquí que

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu \sqrt{1 - \zeta^2}}\right)}{\zeta \omega_n} \quad (\text{D.3})$$

De hecho, t_s es menor o igual que el valor del término de la derecha, ya que los puntos de las envolventes están en el exterior de la curva $y(t)$ o son tangentes a ella. El valor exacto cumple que $|1 - y(t_s)| = \nu$.

Para una tolerancia del 2%, $\nu = 0,02$ suele definirse el tiempo de establecimiento como

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (\text{D.4})$$

y para una tolerancia del 5%, $\nu = 0,05$ suele definirse el tiempo de establecimiento como

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (\text{D.5})$$

Estas definiciones siguen aproximadamente la fórmula

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\zeta \omega_n} \quad (\text{D.6})$$