

Sistemas de control realimentado de tercer orden. Controladores de tipo PID, PI-D y PI

Félix Monasterio-Huelin

20 de febrero de 2016

Índice

Índice	1
Índice de Figuras	1
Índice de Tablas	2
1. Introducción a los sistemas de control de tercer orden	3
2. Controladores PID y PI-D	3
2.1. Controladores P, PD, P-D y PI, que son casos particulares de los controladores PID y PI-D	5
2.2. Normalización de las funciones de transferencia de lazo cerrado	6
3. Problema de seguimiento con los controladores PID, PI-D y PI	7
4. Salida $y(t)$ para entrada escalón unidad con controladores de tipo PID, PI-D y PI	8
4.1. Estudio de la respuesta al escalón unidad variando β_2	13
4.2. Estudio de la respuesta al escalón unidad variando β	14
5. Conclusiones de los estudios anteriores sobre la respuesta del sistema de lazo cerrado en el régimen transitorio: algoritmo de diseño del controlador PI-D. Comentarios al diseño de los controladores PI, P-D y P	15
A. Cancelación cero/polo en los sistemas de tercer orden	20
B. Respuesta al escalón unidad de un sistema de tercer orden	23
C. Obtención del tiempo de pico t_p y de la sobreelongación máxima M_p con controladores PID y PI-D, para $\zeta < 1$	25
D. Obtención del tiempo de pico t_p y de la sobreelongación máxima M_p con controladores P, PD y P-D	28
Bibliografía	31

Índice de Figuras

2.1. Esquemas de control realimentado con PID y PI-D	3
2.2. Polos de lazo cerrado con $\zeta < 1$: parámetros de diseño (ζ, β, β_2) en el plano complejo s	4
2.3. Esquemas de control realimentado con PI, PD, P-D y P	5
2.4. Polos de lazo cerrado con $\zeta < 1$: parámetros de diseño (ζ, β, β_2) en los planos complejos s y $s_1 = s/p$	6
4.1. Salida PID con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$	10

4.2. Salida PI-D con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$	11
4.3. Salida PID con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$	11
4.4. Salida PI-D con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$	12
4.5. Salida con controladores PID, PI-D, PI, PD, P-D y P con $\zeta = 0,5$ variando β_2	13
4.6. Salida con controladores PID, PI-D, PI, PD y P-D con $\zeta = 0,5$ variando β	14
5.1. Primer paso PI-D: M_p	16
5.2. Segundo paso PI-D: pt_s	16
5.3. Respuesta al escalón del sistema realimentado con controlador PI-D, que satisface las especificaciones de diseño del régimen transitorio	17
A.1. Esquemas de control realimentado con cancelación cero/polo con PID, PD y PI	22

Índice de Tablas

2.1. Parámetros β y β_2 de controladores derivados del PID o PI-D	6
4.1. Funciones r_1, r_2 y r_3 de controladores derivados del PID o PI-D donde $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$	9

1. Introducción a los sistemas de control de tercer orden

En este escrito se estudian los sistemas de tercer orden, aunque se hará a partir de estructuras de control realimentado con controladores de tipo PID y PI-D, con un sistema a controlar de función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (1.1)$$

donde $K, p \in \mathbb{R}^+$.

El objetivo principal es diseñar los controladores cuando se establecen especificaciones de régimen permanente y de régimen transitorio. Para ello se introduce un conjunto de parámetros de diseño (ζ, β, β_2) , y se obtienen relaciones de estos parámetros con los parámetros de los controladores (K_p, τ_D, τ_I) .

Se estudian también los casos particulares derivados de los controladores PID y PI-D, que son los controladores PI, PD, P-D y P.

Todo el estudio se realiza normalizando las funciones de transferencia de lazo cerrado, de tal manera que puedan realizarse gráficas de curvas donde el eje de tiempos sea pt en vez de t .

En los Apéndices se encuentran las demostraciones de las expresiones y resultados matemáticos que se utilizan en el cuerpo principal del documento.

A diferencia de los sistemas de segundo orden expresados en su primera forma canónica, los sistemas de tercer orden no permiten obtener expresiones analíticas de la sobreelongación máxima M_p de la respuesta al escalón del sistema de control. Esto es debido a que la ecuación que permite obtener el tiempo de pico t_p es una ecuación trascendente, lo que obliga a utilizar métodos numéricos para su resolución. En consecuencia, para la satisfacción de las especificaciones del régimen transitorio, es necesario realizar simulaciones en ordenador. Se propone, en este escrito, un algoritmo que permite resolver el problema de diseño de manera exacta para el controlador PI-D, utilizando los parámetros de diseño (ζ, β, β_2) .

También se estudia en un Apéndice el tiempo de pico y la sobreelongación máxima de la respuesta al escalón con el controlador PD. En este caso la función de transferencia de lazo cerrado es de orden dos, pero no puede expresarse en su primera forma canónica, sino como una combinación lineal de sistemas de orden dos expresados en su primera y segunda forma canónica. La razón para incluirlo en este documento, es porque, aunque la sobreelongación máxima M_p de la respuesta al escalón del sistema de control tenga una solución analítica, no es sencillo obtener los parámetros de diseño a partir de las especificaciones de régimen transitorio. Como consecuencia, el diseño del controlador PD se vuelve tan complejo como el diseño de los controladores PID y PI-D, requiriendo la realización de simulaciones en ordenador.

2. Controladores PID y PI-D

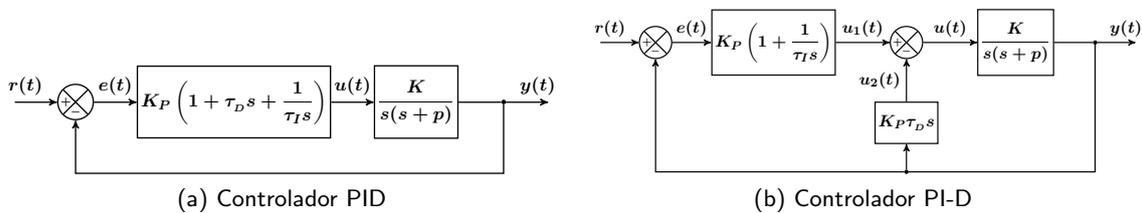


Figura 2.1: Esquemas de control realimentado con PID y PI-D

La función de transferencia de lazo cerrado, con el PID ideal, tiene la forma

$$H_{PID}(s) = \frac{KK_P\tau_D \left(s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_D \left(s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)} \quad (2.1)$$

La función de transferencia de lazo cerrado, con el PI-D, tiene la forma

$$H_{PI-D}(s) = \frac{KK_P \left(s + \frac{1}{\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_D \left(s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)} \quad (2.2)$$

Puede comprobarse que en ambos casos la función de transferencia de lazo cerrado a bajas frecuencias es la unidad, es decir,

$$H(0) = 1 \quad (2.3)$$

El sistema de control de lazo cerrado con controladores PID y PI-D es un sistema de tercer orden cuyo polinomio característico $P(s)$ escribiremos en la forma

$$P(s) = s^3 + (p + KK_P\tau_D) s^2 + KK_Ps + \frac{KK_P}{\tau_I} \quad (2.4)$$

El polinomio característico de grado tres 2.4 puede escribirse también en la forma,

$$P(s) = (s+c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (2.5)$$

donde $c, \zeta, \omega_n \in \mathbb{R}^+$.

Cuando no hay factor integral, $P(s)$ es de grado dos, dando lugar a los casos particulares de sistemas de control realimentado con controladores P, PD o P-D,

$$P(s) = s^2 + (p + KK_P\tau_D) s + KK_P \quad (2.6a)$$

$$P(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (2.6b)$$

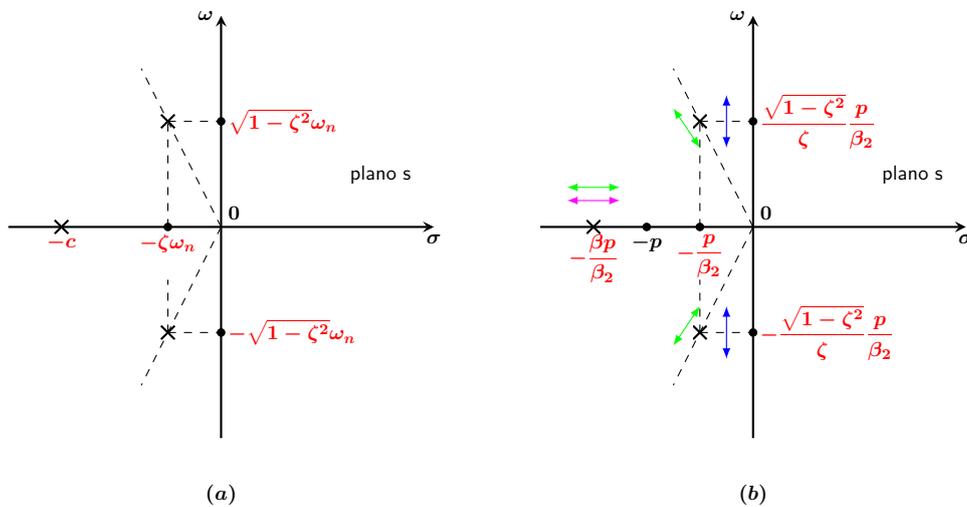


Figura 2.2: Polos de lazo cerrado con $\zeta < 1$: parámetros de diseño (ζ, β, β_2) en el plano complejo s

Como vemos, los parámetros del controlador $\{K_P, \tau_D, \tau_I\}$ pueden ser sustituidos por los parámetros $\{c, \zeta, \omega_n\}$, sin embargo nos interesará introducir los parámetros de diseño β y β_2 , definidos de la siguiente forma:

$$p = \beta_2\zeta\omega_n \quad (2.7a)$$

$$c = \beta\zeta\omega_n \quad (2.7b)$$

Los parámetros del controlador $\{K_P, \tau_D, \tau_I\}$ pueden ser sustituidos por los parámetros de diseño $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$, ya que $\omega_n = \frac{p}{\beta_2\zeta}$.

En la Figura 2.2 se muestran los polos de lazo cerrado en el plano complejo, indicando cómo pueden variar de posición al variar los parámetros de diseño (ζ, β, β_2) . Por un lado, el polo de lazo

abierto permanece inmóvil. Por otro, podemos apreciar que la variación de ζ solo afecta a la parte imaginaria de los polos complejos conjugados (flecha de color azul), y que la variación de β solo afecta al polo real (flecha de color magenta), mientras que la variación de β_2 afecta a los tres polos de manera proporcional. Por ejemplo, al aumentar β_2 los polos de lazo cerrado se aproximan al origen simultáneamente, y radialmente de manera lineal (flecha de color verde).

Identificando los polinomios 2.4 y 2.5, y teniendo en cuenta las definiciones dadas por 2.7, puede comprobarse que los parámetros $\{K_P, \tau_D, \tau_I\}$ de los controladores PID y PI-D, dependen de los parámetros $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$ de la siguiente forma,

$$K_P = \frac{p^2 \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta_2^2 K} \quad (2.8a)$$

$$\tau_D = \frac{\beta_2 (\beta - \beta_2 + 2)}{p \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)} \quad (2.8b)$$

$$\tau_I = \frac{\beta_2 \zeta^2 \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta p} \quad (2.8c)$$

Las ganancias de los factores Derivativo e Integral de los controladores PID y PI-D vienen dados por

$$K_D = K_P \tau_D = \frac{p (\beta - \beta_2 + 2)}{\beta_2 K} \quad (2.9a)$$

$$K_I = \frac{K_P}{\tau_I} = \frac{\beta p^3}{\beta_2^3 \zeta^2 K} \quad (2.9b)$$

2.1. Controladores P, PD, P-D y PI, que son casos particulares de los controladores PID y PI-D

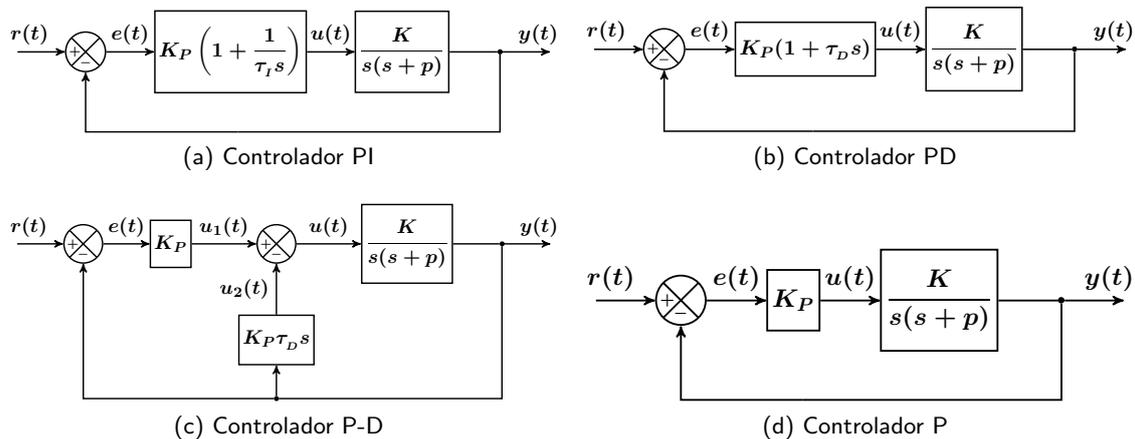


Figura 2.3: Esquemas de control realimentado con PI, PD, P-D y P

En la Tabla 2.1 se muestran los valores que deben tomar β y β_2 para obtener controladores que son casos particulares de los controladores PID o PI-D, que son los que se muestran en los esquemas de bloques de la Figura 2.3. Los controladores PD y P-D son casos particulares de los controlador PID y PI-D respectivamente. Los controladores PI y P son casos particulares tanto del controlador PID como del controlador PI-D. Los casos particulares P y P-D, en cuanto a la satisfacción de especificaciones de régimen transitorio y permanente, se han estudiado en [1] y [2]. El problema de seguimiento también se ha estudiado para los casos PD y PI en [2].

En este escrito se estudiará el problema de la satisfacción de especificaciones de régimen transitorio del sistema de control realimentado con los controladores PID, PI-D, PI y PD. Asimismo, se

estudiará el problema de la satisfacción de especificaciones de régimen permanente del sistema de control realimentado con los controladores PID, PI-D y PI.

Para que el sistema de lazo cerrado sea estable deben ser los polos, por lo que $c > 0$, de aquí que $\beta > 0$. Puesto que el controlador PI satisface que $\beta = \beta_2 - 2$, entonces se deberá cumplir que $\beta_2 > 2$.

	PID PI-D	PI	PD P-D	P
$\beta \in \mathbb{R}^+$	$\neq \beta_2 - 2 \neq 0$	$= \beta_2 - 2 \neq 0$	0	0
$\beta_2 \in \mathbb{R}^+$	$\neq \beta + 2 \neq 2$	$= \beta + 2 \neq 2$	$\neq 2$	2

Tabla 2.1: Parámetros β y β_2 de controladores derivados del PID o PI-D

2.2. Normalización de las funciones de transferencia de lazo cerrado

Una de las ventajas de utilizar los parámetros $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$ es que pueden realizarse representaciones gráficas en el dominio del tiempo independientes de p , ya que puede hacerse un cambio en la escala de tiempo, de tal manera que el eje de abscisas sea pt . Esto es así porque $P(s)$ puede escribirse en la forma

$$P(ps_1) = p^3 \left(s_1 + \frac{\beta}{\beta_2} \right) \left(s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2} \right) \quad (2.10)$$

donde se ha hecho $s = ps_1$.

Como vemos, los polos resultantes de esta transformación de escala dependen de los parámetros $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$.

Hacer $s = ps_1$ supone un cambio en la escala de tiempo $t_1 = pt$. La demostración de esto puede hacerse de la siguiente forma. El teorema del cambio de escala de tiempo afirma que

$$p\mathcal{L}_- \{f(pt)\} = F(s/p) = F(s_1) = \mathcal{L}'_- \{f(t_1)\} \quad (2.11)$$

donde $f(t)$ es cualquier función en t , \mathcal{L}_- es la Transformada de Laplace con la variable compleja s y \mathcal{L}'_- es la Transformada de Laplace con la variable compleja s_1 . Haciendo $f(t) = r_0(t)$, la función escalón unidad, entonces $p/s = 1/s_1$.

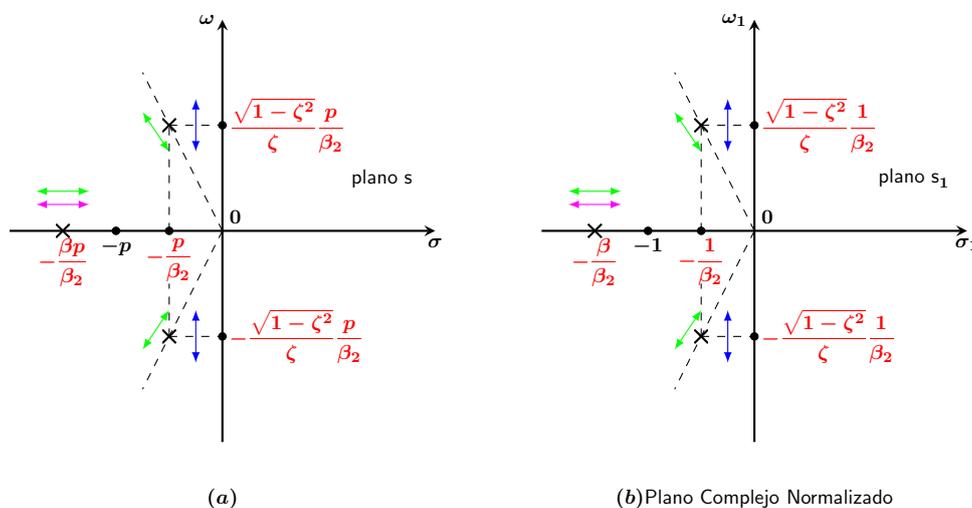


Figura 2.4: Polos de lazo cerrado con $\zeta < 1$: parámetros de diseño (ζ, β, β_2) en los planos complejos s y $s_1 = s/p$

Esto mismo ocurre con los ceros de $H(s)$. Teniendo en cuenta las relaciones 2.1, 2.2 y 2.8, puede expresarse el numerador de $H(s)$ con los controladores PID y PI-D de la siguiente forma:

$$N_{PID}(ps_1) = \frac{p^3(\beta - \beta_2 + 2)}{\beta_2} \left(s_1^2 + \frac{2\beta + \frac{1}{\zeta^2}}{\beta_2(\beta - \beta_2 + 2)} s_1 + \frac{\beta}{\beta_2^2 \zeta^2 (\beta - \beta_2 + 2)} \right) \quad (2.12a)$$

$$N_{PI-D}(ps_1) = \frac{p^3 \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta_2^2} \left(s_1 + \frac{\beta}{\beta_2 \zeta^2 \left(2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)} \right) \quad (2.12b)$$

Definiendo ahora

$$N'_{PID}(s_1) = \frac{N_{PID}(ps_1)}{p^3} \quad (2.13a)$$

$$N'_{PI-D}(s_1) = \frac{N_{PI-D}(ps_1)}{p^3} \quad (2.13b)$$

$$P'(s_1) = \frac{P(ps_1)}{p^3} \quad (2.13c)$$

se obtiene una función de transferencia de lazo cerrado con los controladores PID y PI-D en s_1 ,

$$H'_{PID}(s_1) = \frac{N'_{PID}(s_1)}{P'(s_1)} = \frac{N_{PID}(ps_1)}{P(ps_1)} \quad (2.14a)$$

$$H'_{PI-D}(s_1) = \frac{N'_{PI-D}(s_1)}{P'(s_1)} = \frac{N_{PI-D}(ps_1)}{P(ps_1)} \quad (2.14b)$$

Con la nueva función de transferencia de lazo cerrado $H'(s_1)$ puede calcularse cualquier variable en el tiempo, como por ejemplo la salida a la entrada escalón unidad, y hacer una representación gráfica cuyo eje de abscisas sea $t_1 = pt$. Así, $Y(s_1) = H'(s_1)R(s_1)$ con $R(s_1) = 1/s_1$. Aplicando la transformada de Laplace inversa se obtendría $y(t_1)$. En las representaciones gráficas que haremos en este escrito se pondrá en el eje de abscisas pt en vez de t_1 y en el eje de ordenadas se pondrá $y(t)$ en vez de $y(t_1)$, con la esperanza de que no se preste a confusión.

3. Problema de seguimiento con los controladores PID, PI-D y PI

Puede observarse que la función de transferencia de lazo cerrado con los controladores PID y PI-D de la Figura 2.1, dados por 2.1 y 2.2, tienen en el numerador un "subpolinomio completo" del denominador de grado $n_s = 1$, que es $KK_P \left(s + \frac{1}{\tau_I} \right)$. Como consecuencia, solo puede resolverse el problema de seguimiento de señales de referencia monómicas causales de grado $q < 2$, es decir, para las señales de referencia escalón y rampa, produciéndose un error en régimen permanente finito y distinto de cero para la parábola. Para más detalles sobre esta conclusión puede consultarse [2].

La función de transferencia del error tiene la forma

$$H_{e,PID}(s) = \frac{s^2(s+p)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_D \left(s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)} \quad (3.1a)$$

$$H_{e,PI-D}(s) = \frac{s^2(s+p + KK_P\tau_D)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_D \left(s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)} \quad (3.1b)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e_{PID}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p\tau_I s^3}{KK_P} R(s) \quad (3.2a)$$

$$e_{PI-D}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(p + KK_P\tau_D)\tau_I s^3}{KK_P} R(s) \quad (3.2b)$$

En consecuencia, solo se resuelve el problema de seguimiento para las señales de referencia escalón y rampa, produciéndose un error en régimen permanente finito y distinto de cero para la parábola,

$$e_{PID,2}(\infty) = \frac{p\tau_I}{KK_P} \quad (3.3a)$$

$$e_{PI-D,2}(\infty) = \frac{(p + KK_{PTD})\tau_I}{KK_P} \quad (3.3b)$$

Los parámetros de los controladores (K_p, τ_I, τ_D) pueden ser sustituidos por los parámetros de diseño (β, β_2, ζ) de acuerdo con las expresiones dadas por 2.8,

$$e_{PID,2}(\infty) = \frac{\beta_2^3 \zeta^2}{\beta p^2} \quad (3.4a)$$

$$e_{PI-D,2}(\infty) = \frac{\beta_2^2 (\beta + 2) \zeta^2}{\beta p^2} \quad (3.4b)$$

Puesto que el controlador PI es un caso particular que se obtiene haciendo $\beta_2 = \beta + 2$, entonces

$$e_{PI,2}(\infty) = \frac{(\beta + 2)^3 \zeta^2}{\beta p^2} \quad (3.5)$$

Supongamos que la especificación de diseño de régimen permanente consiste en definir un límite al error en régimen permanente para la señal de referencia parabólica, $e_2(\infty) \leq K_{e2}$. Por ejemplo, si se define $K_{e2} = 5/p^2$, entonces se cumplirá una relación entre los parámetros de diseño de los controladores,

$$\frac{\beta_2^3 \zeta^2}{\beta} \leq 5 \quad \text{Controlador PID} \quad (3.6a)$$

$$\frac{\beta_2^2 (\beta + 2) \zeta^2}{\beta} \leq 5 \quad \text{Controlador PI-D} \quad (3.6b)$$

$$\frac{(\beta + 2)^3 \zeta^2}{\beta} \leq 5 \quad \text{Controlador PI} \quad (3.6c)$$

4. Salida $y(t)$ para entrada escalón unidad con controladores de tipo PID, PI-D y PI

En el Apéndice B se obtiene la expresión de la salida $y(t)$ para una entrada escalón unidad de un sistema de tercer orden, en función de los parámetros $\{\zeta, \beta, \omega_n\}$ de manera genérica.

En esta Sección se aborda el estudio con los controladores PID y PI-D y sus casos particulares PI, PD P-D y P, y teniendo en cuenta que la función de transferencia de lazo cerrado $H(s)$ de los diferentes controladores puede expresarse en la forma de descomposición en fracciones simples siguiente,

$$H(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (4.1)$$

donde $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$, son funciones que, en general, dependen de $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$ con $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$, y en particular, alguna de ellas o varias puede ser nula. Por ejemplo, si $r_3 = 0$, el sistema será de segundo orden, por lo que se corresponde con los sistemas de control con controladores PD, P-D o P. En la Tabla 4.1 se recogen las funciones r_1, r_2, r_3 con los diferentes controladores.

	PID	PI-D PI	PD	P-D P
r_1	$\frac{\left(\left(\frac{1}{\zeta^2} + 2(\beta_2 - 2)\right)\beta - (\beta_2 - 2)\frac{1}{\zeta^2}\right)\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$	$\frac{2\beta^2\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$	$\zeta(2 - \beta_2)\omega_n$	0
r_2	$\frac{\left((\beta_2 - 2)\beta + \frac{1}{\zeta^2}\right)\omega_n^2}{Q(\beta)}$	$\frac{\left(\beta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\omega_n^2}{Q(\beta)}$	ω_n^2	ω_n^2
r_3	$\frac{\beta^2(\beta - \beta_2)\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$	$\frac{-2\beta^2\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$	0	0

Tabla 4.1: Funciones r_1, r_2 y r_3 de controladores derivados del PID o PI-D donde $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$

Se pueden dar algunos casos anómalos para los cuales no pueden utilizarse las tablas anteriores, que son de dos tipos:

1. $Q(\beta) = 0$. Se trata de la situación en que hay un polo doble o triple reales que coincide con el polo $-c = -\beta\zeta\omega_n$.

Los valores de β para los cuales $Q(\beta) = 0$ son

$$\beta = \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta} \quad (4.2)$$

Las raíces de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$, para $\zeta > 1$, son las siguientes

$$s = -\omega_n \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (4.3)$$

El sistema de control de lazo cerrado tendrá un polo doble en el caso $\zeta > 1$, cuando $\beta = \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}$.

El polo de lazo cerrado será triple cuando $\zeta = 1$, y en consecuencia, $\beta = 1$.

2. Cancelación cero/polo de lazo cerrado. Un caso particular es la cancelación de un cero del controlador situado en el lazo directo con el polo $-p$ de $G(s)$. Estos se estudian en el Apéndice A. Esta cancelación solo puede ocurrir con los controladores PID, PI y PD.

Teniendo en cuenta la relación 2.3, es decir, que $H(0) = 1$, se cumple la siguiente relación,

$$\frac{r_2}{\omega_n^2} + \frac{r_3}{\beta\zeta\omega_n} = 1 \quad (4.4)$$

La salida $y(t)$ para una entrada escalón unidad con los controladores PID y PI-D son las siguientes:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} (b \sin \omega_d t + a \cos \omega_d t) & \zeta < 1 & (4.5a) \\ 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} (b' \sinh \omega_d' t + a \cosh \omega_d' t) & \zeta > 1 & (4.5b) \\ 1 - (1 - a)e^{-\beta\omega_n t} - e^{-\omega_n t} (b''\omega_n t + a) & \zeta = 1 & (4.5c) \end{cases}$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (4.6a)$$

$$b = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.6b)$$

$$b' = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (4.6c)$$

$$b'' = a - \frac{r_1}{\omega_n} \quad (4.6d)$$

Podemos observar en las expresiones 4.5 que si $a = 1$ desaparece el término debido al polo $-c$, por lo que el sistema se reduce a uno de segundo orden. Este es el caso con controladores P, PD y P-D.

La expresión de a para el controlador PID puede escribirse en la forma,

$$a_{PID} = 1 + \frac{\beta(\beta_2 - \beta)}{Q(\beta)} \quad (4.7)$$

Teniendo en cuenta la relación 4.7, vemos que también puede ser $a = 1$ con el controlador PID cuando $\beta = \beta_2$, y por lo tanto cuando $c = p$, pero en este caso se produce una cancelación cero/polo de la que ya se ha hablado.

Puede comprobarse también que con el controlador PID,

$$\beta < \beta_2 \Leftrightarrow a_{PID} > 1 \quad (4.8)$$

Observando la Tabla 4.1 también puede verse que, con los controladores PI-D y PI, se cumple que $a > 1$ si $\beta > 0$, por lo que siempre será $a > 1$.

Por lo tanto, a solo puede ser menor que la unidad con el controlador PID. Con los demás controladores o es la unidad (P-D, PD y P) o es mayor que la unidad (PI-D y PI).

Puede comprobarse también que solo puede darse $a < 0$ con el controlador PID y para valores $\beta > \beta_2$ y $\beta_2 < 2 - \frac{1}{\beta\zeta^2}$, o lo que es lo mismo, para $\beta > \beta_2$ y $\beta > \frac{1}{(2 - \beta_2)\zeta^2}$.

Los sistemas de control realimentado con controladores PID, PI-D, PI y PD, a diferencia de los sistemas de segundo orden que puedan expresarse en su primera forma canónica (P y P-D), pueden presentar una sobreelongación cuando $\zeta \geq 1$, aunque la respuesta sea también sobreamortiguada en el sentido de que no presenta oscilaciones. Cuando $\zeta < 1$ la respuesta es subamortiguada en el mismo sentido que para los sistemas de segundo orden.

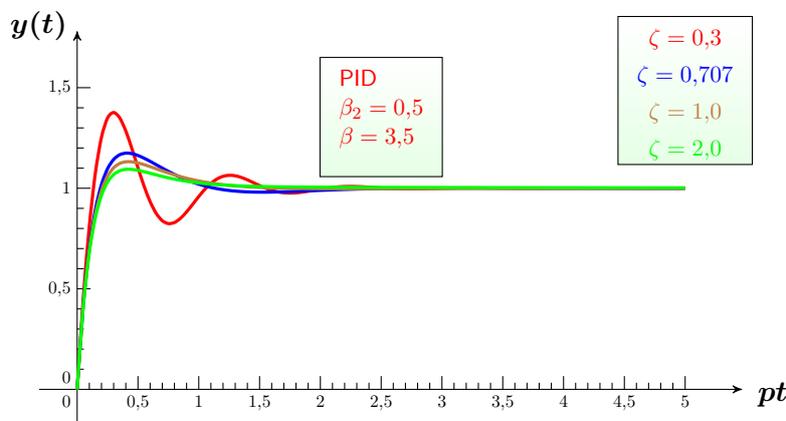


Figura 4.1: Salida PID con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$

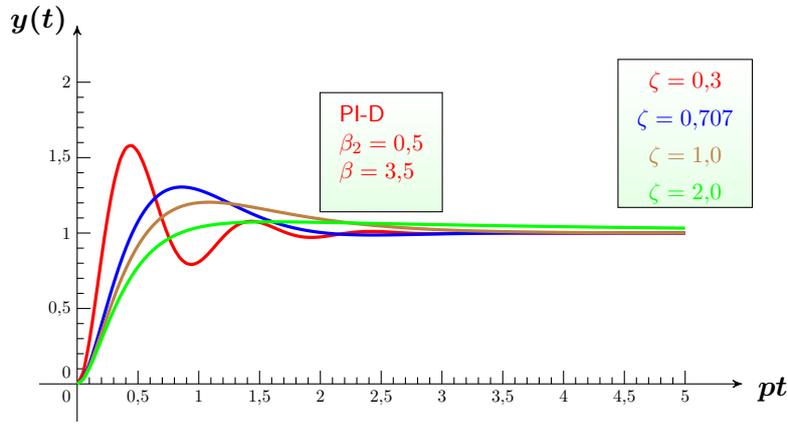


Figura 4.2: Salida PI-D con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$

En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran curvas de respuesta al escalón variando ζ con los controladores PID y PI-D respectivamente, para los mismos valores de β_2 y β , en las que puede apreciarse una sobreelongación con valores de $\zeta \geq 1$. Con el PI-D, $a > 1$, pero con el PID, $a < 1$, ya que $\beta > \beta_2$. Además, con el PID, $a < 0$ para $\zeta > 2/\sqrt{21} \approx 0,44$. Podemos observar en las figuras, que, con el controlador PID, tanto la sobreelongación máxima como el tiempo de establecimiento son menores que con el controlador PI-D para valores de ζ bajos.

Por otro lado, podemos comprobar, aplicando el teorema del valor inicial, que el valor inicial para una entrada escalón unidad es nulo, $y(0^+) = 0$, con todos los controladores que se están estudiando,

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s)R(s) = 0 \quad (4.9)$$

donde $R(s) = 1/s$ y $H(s)$ viene dado por 4.1.

Teniendo en cuenta que, bajo condiciones iniciales nulas, $\mathcal{L}_- \{\dot{y}(t)\} = sY(s)$, podemos ver, aplicando el teorema del valor inicial, que

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 H(s)R(s) = r_1 + r_3 \quad (4.10)$$

donde $R(s) = 1/s$ y $H(s)$ viene dado por 4.1.

Con este resultado puede comprobarse, observando la Tabla 4.1, que la pendiente de la salida en el origen de tiempos es nula con los controladores PI-D, PI, P-D y P.

Puede demostrarse que, con los controladores PID y PD, se cumple la siguiente relación,

$$r_1 + r_3 = \zeta \omega_n (\beta - \beta_2 + 2) \quad (4.11)$$

Como consecuencia, la pendiente de la salida en el origen de tiempos será negativa si $\beta_2 - \beta > 2$, y positiva o nula en caso contrario. Con el PID, siempre que la pendiente en el origen sea negativa el valor de $a_{PID} > 1$. Además, la pendiente en el origen es negativa con los controladores PID y PD, si $\tau_D < 0$, como se desprende de la relación 2.8b.

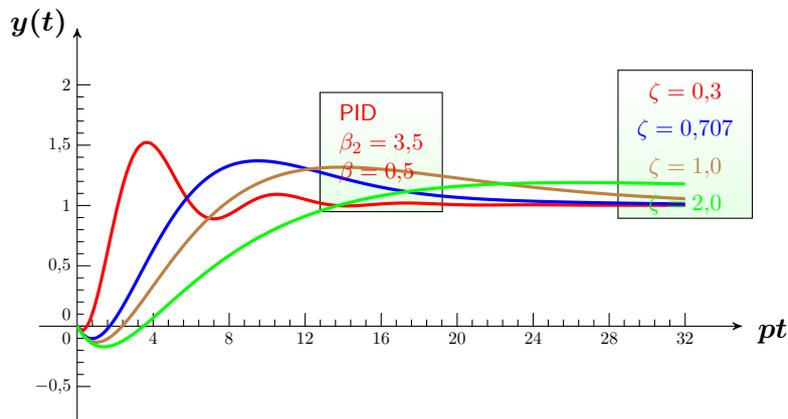


Figura 4.3: Salida PID con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$

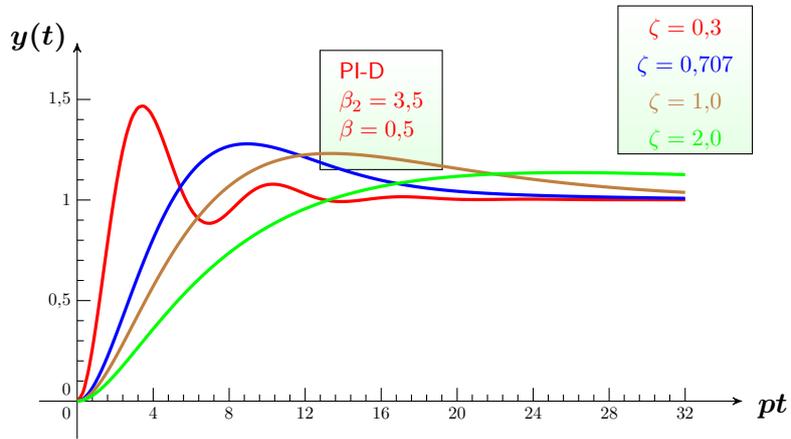


Figura 4.4: Salida PI-D con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$

En las Figuras 4.3 y 4.4 se muestran curvas de respuesta al escalón variando ζ con los controladores PID y PI-D respectivamente, para los mismos valores de β_2 y β , en las que puede apreciarse la sobreelongación con valores de $\zeta \geq 1$, y que la pendiente en el origen es negativa con el controlador PID, ya que $\beta_2 - \beta = 3 > 2$.

4.1. Estudio de la respuesta al escalón unidad variando β_2

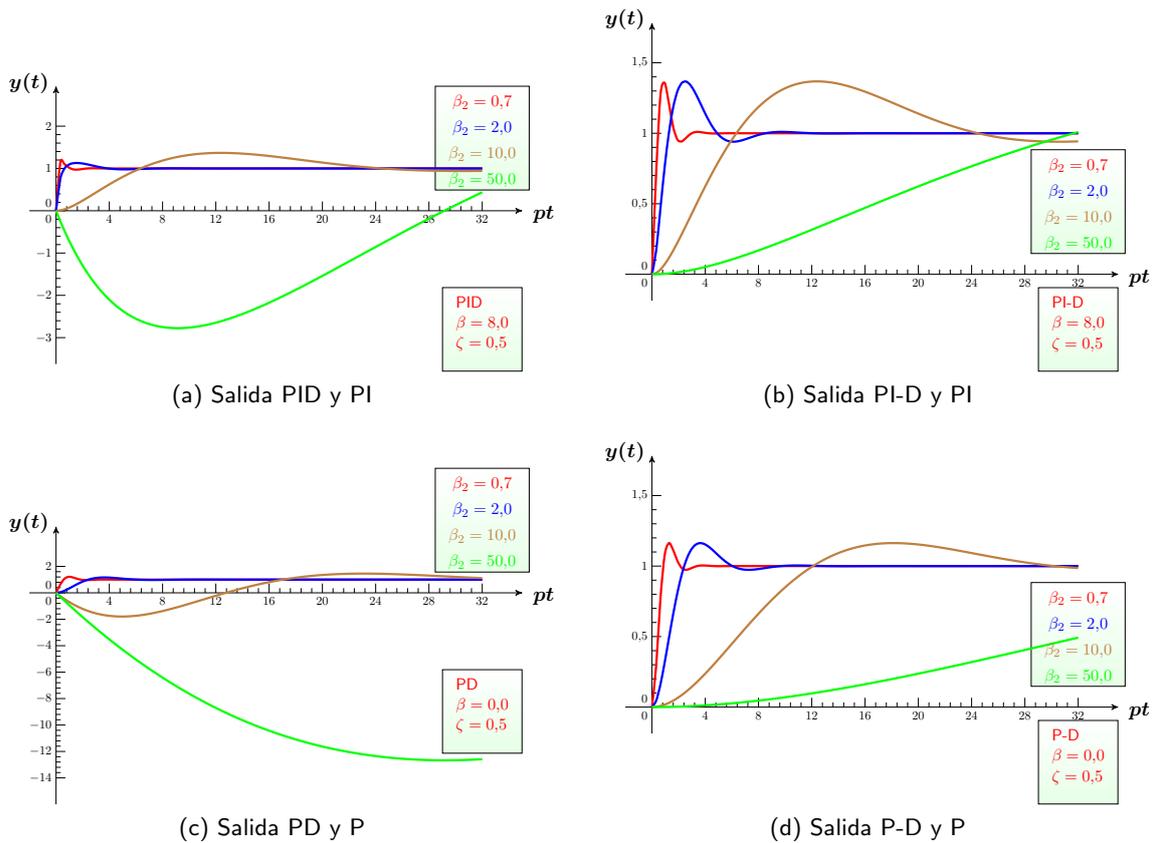


Figura 4.5: Salida con controladores PID, PI-D, PI, PD, P-D y P con $\zeta = 0,5$ variando β_2

En la Figura 4.5 se muestran las salidas con todos los controladores variando β_2 . En las Figuras 4.5a y 4.5b hay una curva (la marrón) que se corresponde con el controlador PI, puesto que satisface que $\beta = \beta_2 - 2$. En las Figuras 4.5c y 4.5d ($\beta = 0$) hay una curva (la azul) que se corresponde con el controlador P, puesto que satisface que $\beta_2 = 2$.

Podemos apreciar con los controladores PID y PD que para $\beta_2 = 50$, $\beta_2 - \beta > 2$, por lo que la pendiente de la salida en el origen de tiempos es negativa. Puede apreciarse que se produce una elongación muy negativa, lo cual puede ser indeseable. Con el controlador PD la pendiente de la salida en el origen también es negativa con $\beta_2 = 10 > 2$, pero la elongación es mucho menor. Esto no ocurre con los controladores PI-D y P-D, para los cuales $\dot{y}(0^+) = 0$.

En todas las curvas se aprecia que, al aumentar β_2 , la respuesta al escalón se hace más lenta, lo que supone que el tiempo de establecimiento aumenta con β_2 .

Puede verse en las curvas de la Figura 4.5b, con el controlador PI-D, que $pt_p \approx \beta_2$, donde t_p es el tiempo de pico. En el Apéndice C se demuestra que con el controlador PI-D, $t_{p,PI-D}$ varía linealmente con β_2 , y que la sobrelongación máxima $M_{p,PI-D}$ es independiente de β_2 . Sin embargo, esto no ocurre con el controlador PID.

Lo mismo puede decirse de las curvas de salida con el controlador P-D de la Figura 4.5d. Se sabe que la sobrelongación máxima de los sistemas de segundo orden expresados en su primera forma canónica solo dependen de ζ . A su vez, el tiempo de pico es una función que depende de ζ , y linealmente de β_2 . Puede consultarse [1] para más detalles y el Apéndice D.

Comparando las curvas de las figuras 4.5b y 4.5d puede apreciarse que M_p aumenta con β para el mismo valor de ζ . En la subsección siguiente se verá que M_p no aumenta con β sino que la curva de M_p con respecto a β presenta un máximo, es decir, que M_p aumenta con β desde cero hasta un cierto valor de β , y después disminuye al seguir aumentando β .

4.2. Estudio de la respuesta al escalón unidad variando β

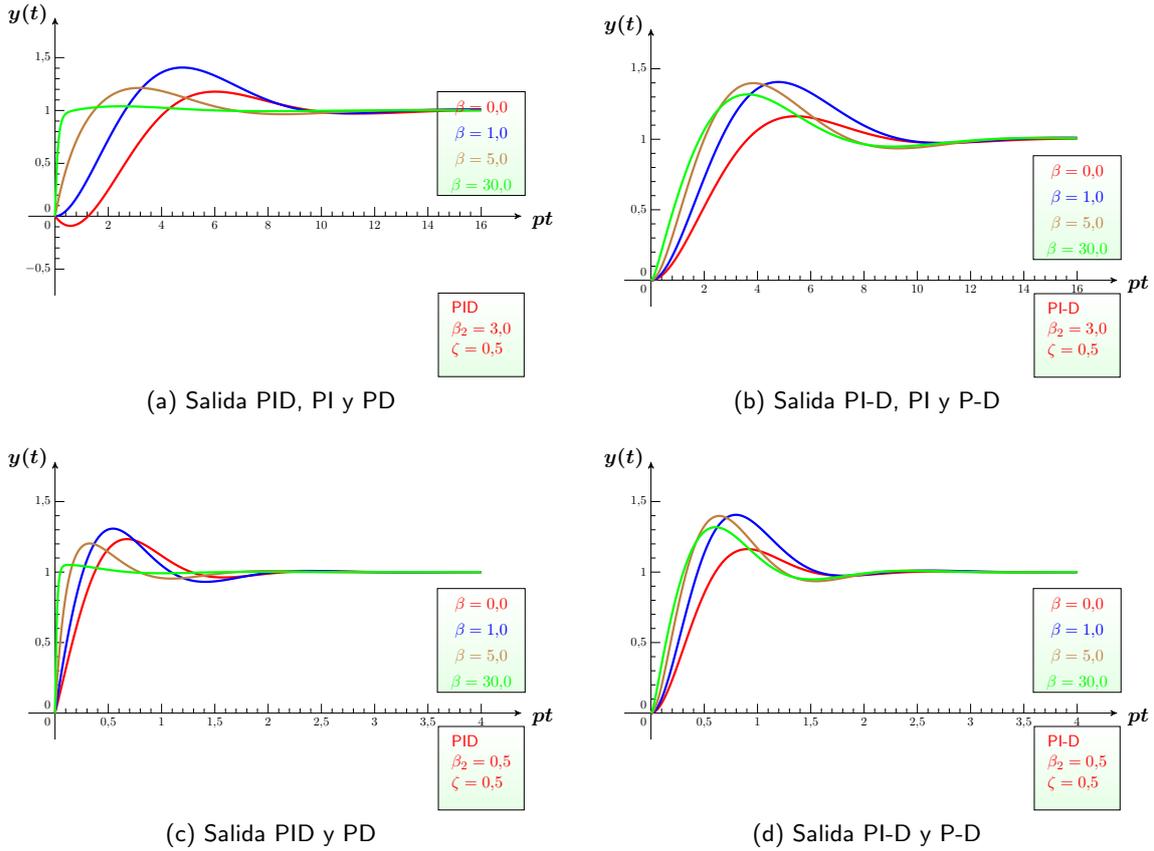


Figura 4.6: Salida con controladores PID, PI-D, PI, PD y P-D con $\zeta = 0,5$ variando β

En la Figura 4.6 se muestran las salidas con todos los controladores, a excepción del controlador P, variando β . En las Figuras 4.6a y 4.6b hay una curva (la azul) que se corresponde con el controlador PI, puesto que satisface que $\beta = \beta_2 - 2$. En todas las figuras se ha escogido un valor de $\beta = 0$ para que se den los casos particular PD y P-D (curva roja).

Puede apreciarse un rasgo común en todas las curvas, en relación con la sobreelongación máxima. Se aprecia que la sobreelongación máxima presenta un máximo para algún valor de β . Este máximo se encuentra en valores de β entre 1 y 5, para $\zeta = 0,5$. Es de esperar que este máximo dependa de ζ .

También puede apreciarse que con los controladores PID y PD, la sobreelongación máxima disminuye, a partir de su máximo, más rápidamente que con los controladores PI-D y P-D.

El tiempo de pico disminuye al aumentar β , pero lo hace más rápidamente con los controladores PID y PD que con los controladores PI-D y P-D.

En cuanto al tiempo de establecimiento, se aprecia, al comparar las figuras superiores con las inferiores, que disminuye con β_2 , pero varía mucho menos con β .

Las relaciones de a y b dadas por 4.6a y 4.6b junto con la Tabla 4.1, explican parte de estos resultados con los controladores PID y PI-D:

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (4.12a)$$

$$b = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.12b)$$

Cuando $\beta \rightarrow \infty$ puede comprobarse utilizando la Tabla 4.1, que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_{PID} = 0 \quad (4.13a)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_{PID} = 0 \quad (4.13b)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_{PI-D} = 1 \quad (4.13c)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_{PI-D} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.13d)$$

La respuesta al escalón unidad con el controlador PID, cuando $\beta \rightarrow \infty$, tiende al escalón unidad, mientras que con el controlador PI-D no ocurre así, sino que tiende a un sistema de segundo orden, como puede verse con la ecuación de $y(t)$ dada por 4.5a,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} y_{PI-D}(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \quad (4.14)$$

En este caso, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control límite, tendría la forma,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} H_{PI-D}(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.15)$$

Como vemos, es una combinación lineal de un sistema de segundo orden en su primera y segunda forma canónica, algo parecido al caso en que hubiese un controlador PD, de hecho un controlador PD-D.

En el Apéndice C se demuestra que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} > \lim_{\beta \rightarrow 0} M_{p,PI-D} \quad (4.16)$$

donde $M_{p,PI-D}$ es la sobreelongación máxima de la respuesta al escalón del sistema de control realimentado con el controlador PI-D.

5. Conclusiones de los estudios anteriores sobre la respuesta del sistema de lazo cerrado en el régimen transitorio: algoritmo de diseño del controlador PI-D. Comentarios al diseño de los controladores PI, P-D y P

En esta subsección nos centraremos en el problema de diseño del controlador PI-D.

Atendiendo a la sobreelongación máxima M_p , se ha visto que es independiente de β_2 , dependiendo de manera no lineal de β y ζ .

En cuanto al tiempo de establecimiento t_s , se ha visto que depende linealmente de β_2 , y de manera no lineal de β y ζ , aumentando al aumentar β .

Este resultado sugiere un algoritmo de dos pasos para la resolución del problema de satisfacción de las especificaciones de diseño del régimen transitorio:

1. Puesto que M_p es independiente de β_2 , puede seleccionarse un valor cualquiera de β_2 y obtener, mediante una simulación en ordenador del sistema de lazo cerrado, las curvas de M_p con respecto a β para un conjunto de valores de ζ . Se escogerían los pares (ζ, β) que satisfagan que M_p es la deseada.
2. Posteriormente se haría otra simulación obteniendo las curvas de t_s en función de β_2 para cada par obtenido anteriormente. El proceso terminaría seleccionando el conjunto de parámetros de diseño que satisfagan que t_s es la deseada.

Cualquiera de estas soluciones sería válida si las especificaciones de diseño del régimen transitorio solo fuesen sobre M_p y t_s .

Si además se hubiese definido alguna restricción en las especificaciones del régimen permanente, podría seleccionarse, del conjunto de soluciones anterior, la mejor. En cualquier caso, si el problema de diseño tiene solución, puede repetirse el proceso discretizando más los valores de ζ del primer paso.

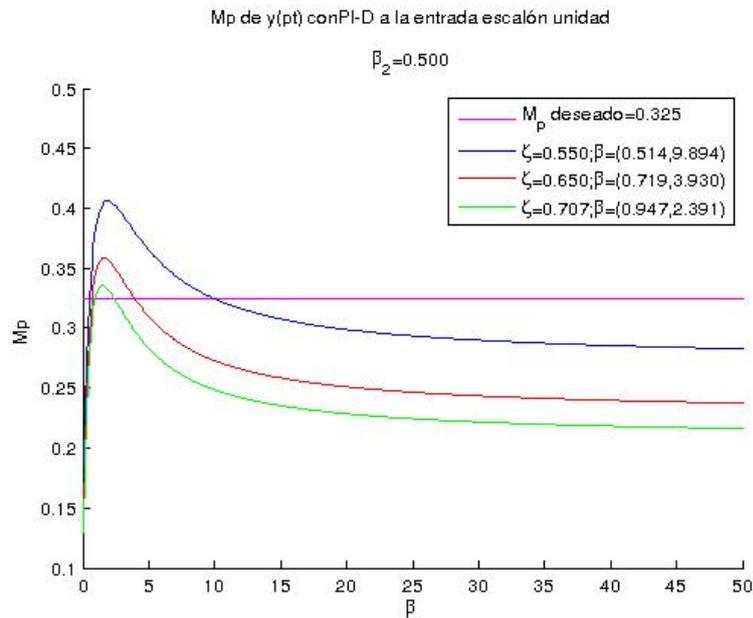


Figura 5.1: Primer paso PI-D: M_p

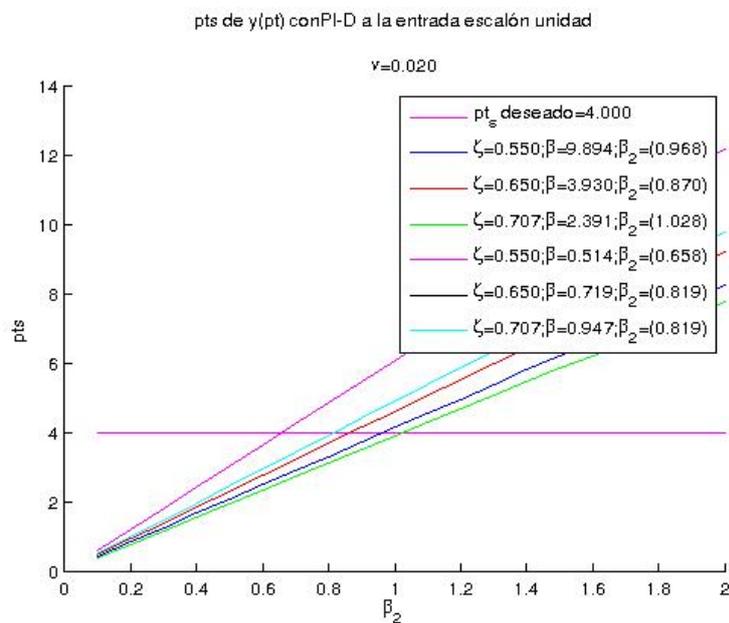


Figura 5.2: Segundo paso PI-D: pt_s

Las curvas de las Figuras 5.1 y 5.2 muestran un ejemplo del algoritmo anterior. Se han obtenido con funciones de transferencia de lazo cerrado normalizadas.

En la Figura 5.1 se ha elegido un valor de β_2 arbitrario, y se muestran las curvas de $M_{p,PI-D}$ en función de β , para distintos valores de ζ . A partir de estas curvas se selecciona un conjunto de pares (ζ, β) que satisfagan la especificación de régimen transitorio referida a M_p . Puede apreciarse que las curvas de M_p presentan un máximo para un valor de β dependiendo de ζ .

Además, también se aprecia que se cumple la desigualdad dada por 4.16, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} > \lim_{\beta \rightarrow 0} M_{p,PI-D}$. Este hecho conocido teóricamente permite seleccionar el valor de ζ mínimo que satisface la especificación referida a M_p . Esto es así porque, dado un valor de ζ para $\beta = 0$, se produce el mínimo valor posible de la sobreelongación máxima. Como consecuencia puede conocerse el valor de ζ_{min} que puede utilizarse en las simulaciones del primer paso. Para $\beta = 0$ el PI-D se transforma en un P-D, cuya sobreelongación máxima viene dada por la expresión,

$$M_{p,P-D} = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \quad (5.1)$$

Por lo tanto, si M_p^* es el valor deseado de $M_{p,PI-D}$, resolviendo la anterior relación se obtendría ζ_{min} ,

$$\zeta_{min} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ln M_p^*}{\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\ln M_p^*}{\pi}\right)^2}} \quad (5.2)$$

Supongamos que se especifica que el valor deseado de la sobreelongación máxima sea $M_p^* = 32,5\%$. De aquí que el valor de $\zeta_{min} = 0,3369$.

También existe un valor de ζ_{max} ya que $M_{p,PI-D}$ presenta un máximo. Sin embargo, no es sencillo conocer ese valor ya que las expresiones que habría que resolver son ecuaciones trascendentes. Para obtenerlo puede realizarse un estudio de simulación en ordenador.

Para obtener la Figura 5.1 se han elegido tres valores de ζ que permiten obtener seis valores de β que satisfacen la especificación de M_p . Por lo tanto, se han obtenido seis pares de valores (ζ, β) que se utilizarán en el segundo paso del algoritmo de diseño del PI-D.

En la Figura 5.2 se realiza una simulación por cada par (ζ, β) seleccionado. Se muestran las curvas de pt_s en función de β_2 . Puede apreciarse que, para cada par (ζ, β) , pt_s varía linealmente con β_2 . A partir de estas curvas, se selecciona el conjunto de valores de β_2 asociado al conjunto de pares (ζ, β) , que satisfagan la especificación de régimen transitorio referida a t_s . Las simulaciones se han realizado para una tolerancia $\nu = 2\%$, y para la selección de β_2 se ha supuesto que el valor deseado del tiempo de establecimiento es $pt_s^* = 4$.

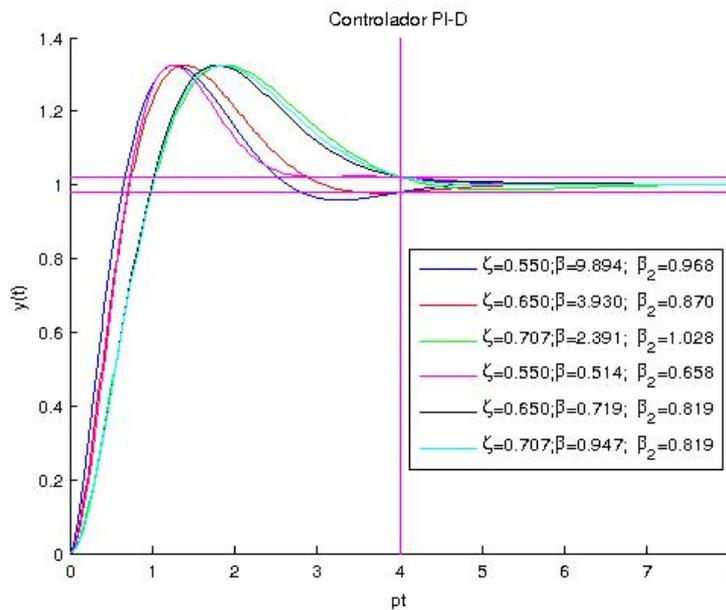


Figura 5.3: Respuesta al escalón del sistema realimentado con controlador PI-D, que satisface las especificaciones de diseño del régimen transitorio

En la Figura 5.3 se muestran las curvas de respuesta al escalón para cada terna de parámetros de diseño obtenido.

Una vez obtenidos los parámetros de diseño (ζ, β, β_2) que satisfacen las especificaciones de diseño, se obtendrían los parámetros del controlador (K_p, τ_D, τ_I) a partir de las relaciones 2.8.

El diseño de un controlador PI se haría de forma similar, ya que M_p solo depende de ζ y β , pero puede obviarse el segundo paso, ya que $\beta_2 = \beta + 2$. El problema que surge debido a esta restricción, es que de todos los pares (ζ, β) obtenidos o posibles que satisfacen la especificación de M_p , ninguno de ellos satisfaga la especificación de t_s . Si esto es así, el controlador PI no podría ser seleccionado por incumplir las especificaciones de diseño. Hay que tener en cuenta que el controlador PI es un caso particular del controlador PI-D, por lo puede observarse en la leyenda de la Figura 5.2, que no hay ningún valor de $\beta_2 = \beta + 2$. Como consecuencia, con el conjunto de valores de ζ utilizados en el primer paso no existe ninguna solución con controlador PI. Sin embargo, sí la habría si la especificación del valor de pt_s fuese mucho mayor que 4. En cualquier caso, debería hacerse el estudio del primer paso con valores de ζ mucho más bajos.

El diseño de un controlador P-D puede hacerse de manera exacta. En primer lugar, se obtendría el valor de ζ que satisface la especificación de M_p . Este valor ya se ha calculado y es $\zeta = 0,3369$. En segundo lugar, se obtendría β_2 a partir de la expresión de pt_s que se demuestra en [1],

$$pt_s = \ln \left(\frac{1}{\nu \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \beta_2 \quad (5.3)$$

Para $pt_s = 4$ se obtiene $\beta_2 = 1,007$.

Teniendo en cuenta que los controladores PI y P-D son casos particulares del PI-D, no es posible encontrar ningún controlador PI que satisfaga la especificación de diseño de pt_s , ya que, para $\beta = 0$, $\beta_{2,P-D} < 2$.

Para el diseño del controlador P solo puede imponerse una especificación de diseño. Si ésta se refiere a M_p entonces se obtendría $\zeta = 0,3369$. A partir de aquí puede obtenerse el valor de pt_s aplicando la relación 5.3 con $\beta_2 = 2$. Se obtendría $pt_s = 7,9445$.

De este resultado también se infiere que no existe ningún controlador PI que satisfaga las especificaciones de diseño, ya que para valores muy bajos de β , $\beta_{2,PI} \approx 2$, por lo que $pt_{s,PI} \approx pt_{s,P}$. Hay que tener en cuenta que al aumentar β , $pt_{s,PI}$ también aumenta.

Apéndices

A. Cancelación cero/polo en los sistemas de tercer orden

Consideremos el sistema $G(s)$ definido como

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (\text{A.1})$$

con $p \in \mathbb{R}^+$.

En este Apéndice se estudian las condiciones que se deben cumplir para que se produzca la cancelación del polo estable del sistema $s = -p$ con controladores de tipo PID o PI-D, y sus casos particulares, PD y PI bajo condiciones iniciales nulas.

Consideremos las siguientes Proposiciones:

1. La cancelación del polo estable del sistema $s = -p$ es equivalente a que la función de transferencia de lazo cerrado $H(s)$ del sistema de control realimentado tenga un cero y un polo iguales $s = -p$.
2. Con el controlador PI-D no puede producirse la cancelación del polo estable del sistema $s = -p$, mientras que con los controladores PID, PD y PI sí puede lograrse si se cumple una relación concreta entre los parámetros τ_D y τ_I .

En lo que sigue se va a demostrar la Proposición 2, admitiendo que se cumple la Proposición 1. Para demostrar la Proposición 1 sería necesario y suficiente demostrar que la señal de control contiene un cero en $s = -p$. No se va a hacer en este Apéndice la demostración de la Proposición 1.

Escribiremos la función de transferencia del controlador situado en el lazo directo $G_{c1}(s)$ y del controlador situado en el lazo paralelo $G_{c2}(s)$ como

$$G_{c1}(s) = \frac{K_{c1}N_{c1}(s)}{D_{c1}(s)} \quad (\text{A.2a})$$

$$G_{c2}(s) = \frac{K_{c2}N_{c2}(s)}{D_{c2}(s)} \quad (\text{A.2b})$$

donde $N_{c1}(s)$ y $N_{c2}(s)$ son polinomios de grado m , y $D_{c1}(s)$ y $D_{c2}(s)$ son polinomios de grado n , con $m < n$ y coeficiente unidad del término de mayor grado.

La función de transferencia de lazo cerrado $H(s)$ con el controlador PID, PI-D o PI, puede escribirse en la forma

$$H(s) = \frac{KK_{c1}N_{c1}(s)}{s^2(s+p) + K(K_{c1}N_{c1}(s) + sK_{c2}N_{c2}(s))} \quad (\text{A.3})$$

Con los controladores PID o PI, $N_{c2}(s) = 0$, y con el controlador PI-D, $N_{c2}(s) = s$.

Además haremos $K_{c1} = K_P\tau_D$ con los controladores PID y PD, $K_{c1} = K_P$ con los controladores PI y PI-D y $K_{c2} = K_P\tau_D$ con el controlador PI-D.

Con el controlador PD,

$$H(s) = \frac{KK_P\tau_D N_{c1}(s)}{s(s+p) + KK_P\tau_D N_{c1}(s)} \quad (\text{A.4})$$

Podemos observar que los ceros de lazo cerrado son los ceros del controlador situado en el lazo directo, es decir las raíces de $N_{c1}(s) = 0$.

El polinomio característico $P(s)$ con los controladores PID, PI-D y PI tiene la forma,

$$P(s) = s^2(s+p) + KK_P(N_{c1}(s) + \tau_D s N_{c2}(s)) \quad (\text{A.5})$$

y con el controlador PD,

$$P(s) = s(s+p) + KK_P N_{c1}(s) \quad (\text{A.6})$$

Solo es posible que haya un polo de lazo cerrado en $s = -p$ si además es raíz de la ecuación $N_{c1}(s) + \tau_D s N_{c2}(s) = 0$. Entonces el polinomio característico con los controladores PID, PI-D y

PI podrá ser escrito en la forma $P(s) = (s + p) \left(s^2 + KK_P \tilde{N}(s) \right)$, y con el controlador PD como $P(s) = (s + p) \left(s + KK_P \tilde{N}(s) \right)$, donde $N_{c1}(s) + \tau_D s N_{c2}(s) = (s + p) \tilde{N}(s)$.

Con los controladores PID, PI y PD, si existe el polinomio $\tilde{N}(s)$, entonces siempre se producirá una cancelación cero/polo en $H(s)$, ya que $N_{c2}(s) = 0$. Con el controlador PI-D, sin embargo se deberá cumplir simultáneamente que exista $\tilde{N}(s)$ y que $N_{c1}(s) = s + p$.

Haciendo, con el controlador PI, $N_{c1}(s) = s + \frac{1}{\tau_I}$, es inmediato comprobar que la condición de cancelación es que $\tau_I = \frac{1}{p}$, y haciendo, con el controlador PD $N_{c1}(s) = s + \frac{1}{\tau_D}$, la condición de cancelación es que $\tau_D = \frac{1}{p}$.

Con el controlador PID escribiremos $N_{c1}(s)$ en la forma,

$$N_{c1}(s) = s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{1}{\tau_D \tau_I} \quad (\text{A.7})$$

Con el controlador PI-D

$$N_{c1}(s) = s + \frac{1}{\tau_I} \quad (\text{A.8})$$

por lo que

$$N_{c1}(s) + \tau_D s N_{c2}(s) = \tau_D \left(s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{1}{\tau_D \tau_I} \right) \quad (\text{A.9})$$

De acuerdo con la relación A.8 una condición de cancelación necesaria con el controlador PI-D, es que $\tau_I = \frac{1}{p}$.

Y por último, la condición de cancelación de los controladores PID y PI-D es que la ecuación $s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{1}{\tau_D \tau_I} = 0$ tenga una raíz $s = -p$.

Como se ha dicho, con el controlador PI-D, la condición de cancelación es que la ecuación $s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{p}{\tau_D} = 0$ tenga una raíz $s = -p$. Sustituyendo $s = -p$ en $s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{p}{\tau_D}$ vemos que no es posible que se produzca una cancelación.

Sin embargo con el controlador PID sí puede encontrarse una condición de cancelación, ya que sustituyendo $s = -p$ en $s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{1}{\tau_D \tau_I}$ se deberá cumplir que

$$p^2 - \frac{p}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D \tau_I} = 0 \quad (\text{A.10})$$

La condición de cancelación con un PID puede ser escrita como una dependencia entre τ_D y τ_I ,

$$\tau_D = \frac{p - \frac{1}{\tau_I}}{p^2} \quad (\text{A.11a})$$

$$\tau_I = \frac{1}{p(1 - p\tau_D)} \quad (\text{A.11b})$$

Podemos observar que estas relaciones también son válidas para los controladores PI y PD.

En general, los ceros del PID son los siguientes

$$c = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\gamma}}{2\tau_D} \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\gamma = \frac{\tau_D}{\tau_I} \quad (\text{A.13})$$

Para que uno de los ceros sea $c = -p$, es condición necesaria que los dos ceros sean reales, es decir, que $4\gamma < 1$, lo que implica que $\sqrt{1-4\gamma} < 1$ si $\gamma > 0$, y $\sqrt{1-4\gamma} > 1$ si $\gamma < 0$. Por lo tanto, si $\gamma > 0$ los ceros serán negativos, y si $\gamma < 0$ habrá uno negativo ($c = -p$) y otro positivo.

Sustituyendo la relación de τ_D dada por A.11a en $1-4\gamma$, se obtiene la relación $\frac{\left(\tau_I - \frac{2}{p}\right)^2}{\tau_I^2}$ que, por un lado, siempre es positiva, y por otro,

$$c = \frac{p^2 \left(-1 \pm \frac{\tau_I - \frac{2}{p}}{\tau_I} \right)}{2 \left(p - \frac{1}{\tau_I} \right)} = \frac{p^2 \left(\tau_I(-1 \pm 1) \pm \left(-\frac{2}{p} \right) \right)}{2(p\tau_I - 1)} \quad (\text{A.14})$$

Por lo tanto, los ceros son

$$c_1 = \frac{p}{1 - p\tau_I} = \frac{-1}{p\tau_D\tau_I} = \frac{p\tau_D - 1}{\tau_D} \quad (\text{A.15a})$$

$$c_2 = -p \quad (\text{A.15b})$$

Si $\gamma > 0$, los ceros deben ser negativos, por lo que necesariamente $p\tau_I > 1$ y $p\tau_D < 1$, si $\tau_D > 0$. Si $\tau_D < 0$ o $\tau_I < 0$, no puede haber cancelación cuando $\gamma > 0$. Y si $\gamma < 0$, uno de los ceros debe ser positivo y el otro negativo, por lo que $p\tau_I < 1$ y $p\tau_D > 1$, si $\tau_D > 0$, pero con $\tau_I < 0$. Si $\tau_D < 0$ puede haber cancelación cuando $\gamma < 0$, pero con $\tau_I > 0$.

En la Figura A.1 se muestran los esquemas de bloques equivalentes con cancelación cero/polo.

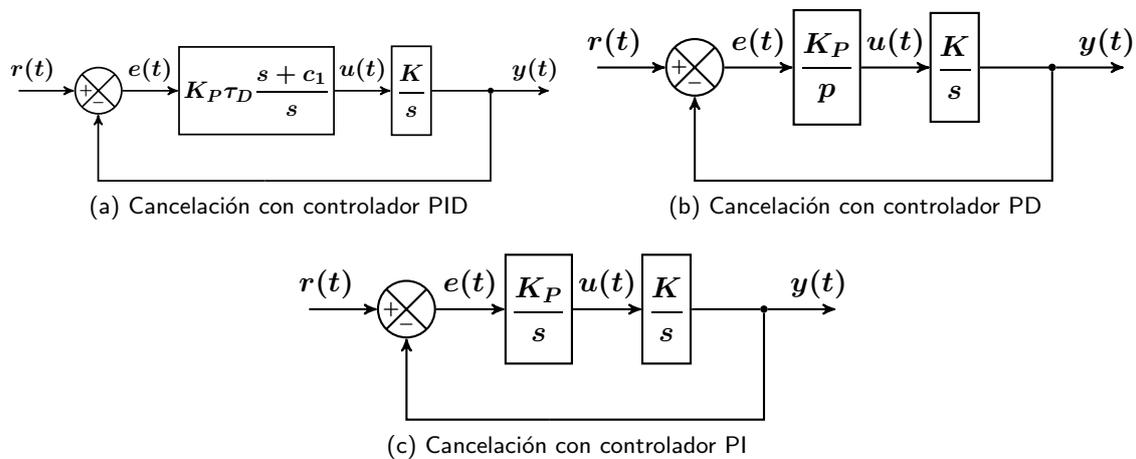


Figura A.1: Esquemas de control realimentado con cancelación cero/polo con PID, PD y PI

B. Respuesta al escalón unidad de un sistema de tercer orden

Consideremos un sistema de tercer orden y orden relativo menor o igual a 2, cuya descomposición en fracciones simples de su función de transferencia $H(s)$ puede ser expresada en la forma

$$H(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (\text{B.1})$$

donde $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$, son funciones que, en general, dependen de $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$ con $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$, y en particular, alguna de ellas o varias puede ser nula. Por ejemplo, si $r_3 = 0$, el sistema será de segundo orden.

Supondremos también que la ganancia a bajas frecuencias $H(0) = 1$, por lo que se deberá cumplir la siguiente relación,

$$\frac{r_2}{\omega_n^2} + \frac{r_3}{\beta\zeta\omega_n} = 1 \quad (\text{B.2})$$

Podemos comprobar, que si $r_1 = r_3 = 0$, el sistema es de segundo orden expresado en su primera forma canónica.

La salida para una entrada escalón unidad, bajo condiciones iniciales nulas, puede ser expresada en la forma

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{r_1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{r_3}{s(s + \beta\zeta\omega_n)} \quad (\text{B.3})$$

En primer lugar se obtendrá la salida para $\zeta < 1$. Calculando la transformada de Laplace inversa se obtienen las contribuciones de los polos real y complejos.

Puede comprobarse que

$$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s - 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{B.4})$$

por lo que

$$Y(s) = \frac{r_1 - \frac{r_2\zeta}{\omega_n}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{\frac{r_2}{\omega_n^2}(s + \zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s(s + \beta\zeta\omega_n)} + \frac{r_2}{\omega_n^2 s} \quad (\text{B.5})$$

Teniendo en cuenta la relación dada por B.2, puede comprobarse que

$$\frac{r_3}{s(s + \beta\zeta\omega_n)} + \frac{r_2}{\omega_n^2 s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{r_3}{\beta\zeta\omega_n}}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (\text{B.6})$$

La salida del sistema de control de lazo cerrado para una entrada escalón unidad y bajo condiciones iniciales nulas, es

$$y(t) = 1 - \frac{r_3}{\beta\zeta\omega_n} e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{r_2}{\omega_n^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{r_1}{\omega_n} \right) \sin \omega_d t + \frac{r_2}{\omega_n^2} \cos \omega_d t \right) \quad (\text{B.7})$$

donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

La salida $y(t)$ del caso $\zeta < 1$ conviene expresarla en alguna de las dos formas siguientes:

$$y(t) = 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} (b \sin \omega_d t + a \cos \omega_d t) \quad (\text{B.8a})$$

$$y(t) = 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (\text{B.8b})$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (\text{B.9a})$$

$$b = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{B.9b})$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{B.9c})$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{B.9d})$$

$$\sin \varphi = \frac{a}{c} \quad (\text{B.9e})$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{c} \quad (\text{B.9f})$$

El caso $\zeta > 1$, puede obtenerse a partir del caso $\zeta < 1$ teniendo en cuenta las relaciones entre funciones trigonométricas e hiperbólicas. En este caso, utilizando la expresión B.8a,

$$y(t) = 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} (b' \sinh \omega'_d t + a \cosh \omega'_d t) \quad (\text{B.10})$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (\text{B.11a})$$

$$b' = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (\text{B.11b})$$

$$\omega'_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (\text{B.11c})$$

El caso $\zeta = 1$, puede obtenerse también a partir del caso $\zeta < 1$ calculando el límite cuando $\zeta \rightarrow 1$. Podemos comprobar que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \omega_n t \quad (\text{B.12})$$

De aquí, la salida en el caso $\zeta = 1$ tiene la forma,

$$y(t) = 1 - (1 - a)e^{-\beta\omega_n t} - e^{-\omega_n t} (b''\omega_n t + a) \quad (\text{B.13})$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (\text{B.14a})$$

$$b'' = a - \frac{r_1}{\omega_n} \quad (\text{B.14b})$$

C. Obtención del tiempo de pico t_p y de la sobreelongación máxima M_p con controladores PID y PI-D, para $\zeta < 1$

La salida $y(t)$ para una entrada escalón unidad con los controladores PID y PI-D puede expresarse de la siguiente forma:

$$y(x) = 1 - (1 - a)e^{-\beta x} - e^{-x} \left(b \sin \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x + a \cos \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x \right) \quad (\text{C.1})$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (\text{C.2a})$$

$$b = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{C.2b})$$

$$x = \frac{pt}{\beta_2} \quad (\text{C.2c})$$

y r_1, r_2 son funciones de los parámetros de diseño (ζ, β, β_2) recogidas en la Tabla 4.1.

Derivando con respecto a x ,

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} = \beta(1 - a)e^{-\beta x} + e^{-x} \left(b_1 \sin \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x + a_1 \cos \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x \right) \quad (\text{C.3})$$

donde

$$a_1 = a - \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} b = \frac{r_1}{\zeta \omega_n} \quad (\text{C.4a})$$

$$b_1 = b + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} a = \frac{\frac{a}{\zeta} - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{C.4b})$$

Puesto que

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial y(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (\text{C.5})$$

entonces

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} = \frac{\beta_2}{p} \dot{y}(t) \quad (\text{C.6})$$

El valor de t_p se produce cuando $\dot{y}(t) = 0$, y puesto que $\beta_2, p \neq 0$, también se deberá cumplir en $t = t_p$ que $\frac{\partial y(x)}{\partial x} = 0$.

El tiempo de pico será una solución de la ecuación trascendente siguiente,

$$\beta(1 - a)e^{-\beta x_p} = -e^{-x_p} \left(b_1 \sin \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x_p + a_1 \cos \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x_p \right) \quad (\text{C.7})$$

donde

$$x_p = \frac{pt_p}{\beta_2} \quad (\text{C.8})$$

Con los controladores PI-D y PI,

$$a_1 = \frac{2\beta^2}{Q(\beta)} = \beta(a - 1) \quad (\text{C.9a})$$

$$b_1 = \frac{\beta^2 + \frac{1}{\zeta^2} - 2\zeta^2\beta^2}{\zeta Q(\beta)\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{a_1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(1 + \frac{1}{\beta^2\zeta^2} - 2\zeta^2 \right) \quad (\text{C.9b})$$

por lo tanto, para $a \neq 1$,

$$e^{-(\beta-1)x_p} = b'_1 \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p + \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \quad (\text{C.10})$$

donde

$$b'_1 = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \left(1 + \frac{1}{\beta^2\zeta^2} - 2\zeta^2 \right) \quad (\text{C.11})$$

La sobreelongación máxima $M_p = y(t_p) - 1$, por lo que, sustituyendo la expresión de $(1-a)e^{-\beta x_p}$ de la relación C.7 en M_p , y agrupando términos, se obtiene que

$$M_p = e^{-x_p} \left(b_2 \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p + a_2 \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \right) \quad (\text{C.12})$$

donde, para $\beta \neq 0$,

$$a_2 = \frac{a_1}{\beta} - a = \frac{r_1}{\beta\zeta\omega_n} - a \quad (\text{C.13a})$$

$$b_2 = \frac{b_1}{\beta} - b = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(a \left(\frac{1}{\beta\zeta^2} - 1 \right) + \frac{r_1}{\zeta\omega_n} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right) \quad (\text{C.13b})$$

Con los controladores PI-D y PI,

$$a_{2,PI-D} = -1 \quad (\text{C.14a})$$

$$b_{2,PI-D} = \frac{\zeta}{Q(\beta)\sqrt{1-\zeta^2}} \left(Q(\beta) + \left(\beta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \left(\frac{1}{\beta\zeta^2} - 2 \right) + 2\beta^2 \right) \quad (\text{C.14b})$$

donde se ha tenido en cuenta que $\frac{r_1}{\beta\zeta\omega_n} = a - 1 = \frac{2\beta}{Q(\beta)}$.

La expresión de $b_{2,PI-D}$ puede simplificarse, ya que

$$\left(\beta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \left(\frac{1}{\beta\zeta^2} - 2 \right) + 2\beta^2 = \frac{1}{\zeta^2} \left(\beta - 2 + \frac{1}{\beta\zeta^2} \right) = \frac{Q(\beta)}{\beta\zeta^2} \quad (\text{C.15})$$

por lo que

$$b_{2,PI-D} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(1 + \frac{1}{\beta\zeta^2} \right) \quad (\text{C.16})$$

Con los controladores PI-D y PI la sobreelongación M_p , es independiente de β_2 , y el tiempo de pico t_p es proporcional a β_2 , a diferencia del caso con controlador PID.

Con el controlador PI-D es interesante analizar el caso límite, cuando $\beta \rightarrow \infty$,

$$\widetilde{M}_{p,PI-D} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} = e^{-x_p} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p - \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \right) \quad (\text{C.17})$$

Por otro lado, puede comprobarse que,

$$\widetilde{y}_{PI-D}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} y_{PI-D}(x) = 1 - e^{-x} \left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x + \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x \right) \quad (\text{C.18})$$

En este caso, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control límite, tendría la forma,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} H_{PI-D}(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{C.19})$$

Como vemos, es una combinación lineal de un sistema de segundo orden en su primera y segunda forma canónica, algo parecido al caso en que hubiese un controlador PD, de hecho un controlador PD-D.

La sobreelongación máxima en este caso límite es, $M_{p,PI-D} = \tilde{y}_{PI-D}(x_p) - 1$, que como puede verse, coincide con la expresión C.17.

Derivando $\tilde{y}_{PI-D}(x)$ con respecto a x e igualando a cero, se obtendría el valor del tiempo de pico de este caso límite.

Puesto que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_{PI-D} = 1 \quad (\text{C.20a})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_{PI-D} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{C.20b})$$

entonces

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_{1,PI-D} = 2 \quad (\text{C.21a})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_{1,PI-D} = \frac{1-2\zeta^2}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{C.21b})$$

De aquí, que el tiempo de pico sea una solución de la ecuación,

$$0 = \frac{1-2\zeta^2}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p + 2 \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \quad (\text{C.22})$$

Esta ecuación puede expresarse en la forma

$$\sin \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_{p,PI-D} + \tilde{\varphi}_{p,PI-D} \right) = 0 \quad (\text{C.23})$$

donde

$$\sin \tilde{\varphi}_{p,PI-D} = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \quad (\text{C.24a})$$

$$\cos \tilde{\varphi}_{p,PI-D} = 1-2\zeta^2 \quad (\text{C.24b})$$

Por lo tanto, el tiempo de pico $\tilde{t}_{p,PI-D}$ en la situación límite, será una solución de la ecuación

$$\omega_d \tilde{t}_{p,PI-D} = -\tilde{\varphi}_{p,PI-D} + n\pi \quad (\text{C.25})$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ y $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$.

Para el cálculo de $\tilde{\varphi}_{p,PI-D}$ conviene utilizar la función atan2 que da valores del arcotangente en $[-\pi, \pi]$. Entonces, $\tilde{\varphi}_{p,PI-D} \in (0, \pi)$, por lo que $n = 1$. Por lo tanto,

$$\omega_d \tilde{t}_{p,PI-D} = \pi - \tilde{\varphi}_{p,PI-D} \quad (\text{C.26})$$

Sustituyendo en C.17

$$\tilde{M}_{p,PI-D} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} = e^{-x_p} \quad (\text{C.27})$$

Por otro lado, cuando $\beta = 0$ el controlador PI-D se transforma en el controlador P-D, el cual puede representarse como un sistema de segundo orden expresado en su primera forma canónica. De aquí que,

$$M_{p,PI-D}^0 = \lim_{\beta \rightarrow 0} M_{p,PI-D} = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (\text{C.28})$$

Como consecuencia,

$$\widetilde{M}_{p,PI-D} = M_{p,PI-D}^0 e^{\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \widetilde{\varphi}_{p,PI-D}} \quad (C.29)$$

En conclusión. Como $\widetilde{\varphi}_{p,PI-D} \in (0, \pi)$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} > \lim_{\beta \rightarrow 0} M_{p,PI-D} \quad (C.30)$$

D. Obtención del tiempo de pico t_p y de la sobreelongación máxima M_p con controladores P, PD y P-D

Para la obtención del tiempo de pico, t_p , con controladores P, PD y P-D, se utilizarán los resultados del Apéndice C, ya que estos controladores se obtienen haciendo $\beta = 0$ según se desprende de la Tabla 2.1.

Para obtener M_p debe recurrirse a la ecuación de t_p dada por C.7, con $a = 1$, según se desprende de la Tabla 4.1,

$$0 = b_1 \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p + a_1 \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \quad (D.1)$$

donde

$$a_1 = \frac{r_1}{\zeta \omega_n} \quad (D.2a)$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{\zeta} - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (D.2b)$$

La ecuación D.1 puede escribirse en la forma siguiente,

$$\sin \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p - \varphi_p \right) = 0 \quad (D.3)$$

donde

$$\sin \varphi_p = \frac{a_1}{c_1} \quad (D.4a)$$

$$\cos \varphi_p = \frac{-b_1}{c_1} \quad (D.4b)$$

$$c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (D.4c)$$

En consecuencia, el tiempo de pico t_p será una de las soluciones positivas de la siguiente ecuación,

$$\omega_d t_p = \varphi_p + n\pi \quad (D.5)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ y $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ es la frecuencia natural amortiguada.

Con los controladores P y P-D, $a_1 = 0$ y $b_1 = \frac{1}{\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$, por lo que $\varphi_p = \pi$. Para $n = 0$, $\omega_d t_p = \pi$, es la solución conocida de t_p de los sistemas de segundo orden expresados en su primera forma canónica,

$$t_{p,P} = t_{p,P-D} = \frac{\pi}{\omega_d} = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \frac{\pi}{p} \beta_2 \quad (D.6)$$

Con el controlador PD,

$$a_{1,PD} = 2 - \beta_2 \quad (D.7a)$$

$$b_{1,PD} = \frac{1 - \zeta^2(2 - \beta_2)}{\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(\beta_2 - 2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \quad (D.7b)$$

$$c_{1,PD}^2 = (2 - \beta_2)^2 + \frac{\zeta^2}{1 - \zeta^2} \left(\beta_2 - 2 + \frac{1}{\zeta^2} \right)^2 = \frac{1}{1 - \zeta^2} \left((\beta_2 - 2)^2 + 2(\beta_2 - 2) + \frac{1}{\zeta^2} \right) \quad (D.7c)$$

Simplificando la expresión de $c_{1,PD}$,

$$c_{1,PD}^2 = \frac{Q(\beta_2)}{1 - \zeta^2} \quad (D.8)$$

donde $Q(\beta_2) = \beta_2^2 - 2\beta_2 + \frac{1}{\zeta^2}$.

Por lo tanto,

$$\sin \varphi_{p,PD} = \frac{(2 - \beta_2)\sqrt{1 - \zeta^2}}{\sqrt{Q(\beta_2)}} \quad (D.9a)$$

$$\cos \varphi_{p,PD} = -\frac{\zeta \left(\beta_2 - 2 + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\sqrt{Q(\beta_2)}} \quad (D.9b)$$

donde $Q(\beta_2) = \beta_2^2 - 2\beta_2 + \frac{1}{\zeta^2}$.

Cuando $\beta_2 > 2$, la pendiente en el origen de tiempos con el controlador PD, $\dot{y}(0^+) < 0$, lo que significa que se producirá un mínimo en $t = t_m$, donde t_m también satisface la ecuación D.5, pero no es el tiempo de pico t_p . El valor de t_p será el segundo valor positivo que satisface esta ecuación. Si $\beta_2 < 2$, entonces t_p será el primer valor positivo. Teniendo en cuenta este hecho, el valor de n de la ecuación D.5 será distinto según sea el signo de $\beta_2 - 2$.

Para el cálculo de $\varphi_{p,PD}$ conviene utilizar la función atan2 que da valores del arcotangente en $[-\pi, \pi]$. Entonces, para $\beta_2 > 2$, $\varphi_{p,PD} \in (-\pi, -\pi/2)$ por lo que $n = 2$, mientras que para $\beta_2 < 2$, $\varphi_{p,PD} \in (0, \pi)$ por lo que $n = 0$. Por lo tanto,

$$t_{p,PD} = \begin{cases} \frac{\varphi_{p,PD}}{\omega_d} & = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \frac{\varphi_{p,PD}}{p} \beta_2 & \beta_2 < 2 \\ \frac{2\pi + \varphi_{p,PD}}{\omega_d} & = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \frac{2\pi + \varphi_{p,PD}}{p} \beta_2 & \beta_2 > 2 \end{cases} \quad (D.10a)$$

$$t_{p,PD} = \begin{cases} \frac{\varphi_{p,PD}}{\omega_d} & = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \frac{\varphi_{p,PD}}{p} \beta_2 & \beta_2 < 2 \\ \frac{2\pi + \varphi_{p,PD}}{\omega_d} & = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \frac{2\pi + \varphi_{p,PD}}{p} \beta_2 & \beta_2 > 2 \end{cases} \quad (D.10b)$$

Cuando $\beta_2 > 2$, el mínimo de $y(t)$ se produce en t_m para $n = 1$.

El caso particular $\beta_2 = 2$ da lugar al controlador P. Según D.9, $\sin \varphi_{p,P} = 0$ y $\cos \varphi_{p,P} = -1$. Si se utilizase $\text{atan2}(0, -1)$ daría un valor de $\varphi_{p,P} = \pi$. Sin embargo, debe entenderse que cuando $\beta_2 < 2$ en D.10a lo que se debe calcular es el límite cuando $\beta_2 \rightarrow 2^-$, por lo que $\varphi_{p,P} = \pi$, mientras que en el caso $\beta_2 > 2$ en D.10b lo que se debe calcular es el límite cuando $\beta_2 \rightarrow 2^+$, por lo que $\varphi_{p,P} = -\pi$. De esta manera la solución de $t_{p,PD}$ dada por D.10, es completamente coherente, resultando la relación de $t_{p,P}$ conocida, dada por D.6.

La ecuación de M_p con estos controladores tiene la forma

$$M_p = -e^{-\zeta\omega_n t_p} (b \sin \omega_d t_p + \cos \omega_d t_p) \quad (D.11)$$

donde

$$b = \frac{\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (D.12)$$

Puede observarse que, con el controlador PD, φ_p y por lo tanto M_p , dependen de β_2 a diferencia de los casos con controladores P o P-D. Este resultado es el esperado, ya que con el controlador PD el sistema de lazo cerrado de segundo orden resultante es una combinación lineal en β_2 de sistemas de segundo orden expresados en su primera y segunda forma canónica. Para más detalles consúltese [1].

Con los controladores P y P-D,

$$M_{p,P} = M_{p,P-D} = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (D.13)$$

Con el controlador PD, $b_{PD} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\beta_2 - 1)$, por lo que teniendo en cuenta la ecuación D.5,

$$b_{PD} \sin \omega_d t_{p,PD} + \cos \omega_d t_{p,PD} = \cos n\pi \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\beta_2 - 1) \sin \varphi_{p,PD} + \cos \varphi_{p,PD} \right) \quad (D.14)$$

Sustituyendo las relaciones D.9,

$$b_{PD} \sin \omega_d t_{p,PD} + \cos \omega_d t_{p,PD} = \frac{\zeta \cos n\pi}{\sqrt{Q(\beta_2)}} \left((\beta_2 - 1)(2 - \beta_2) - \left(\frac{1}{\zeta^2} + \beta_2 - 2 \right) \right) \quad (D.15)$$

Ahora, simplificando esta expresión

$$b_{PD} \sin \omega_d t_{p,PD} + \cos \omega_d t_{p,PD} = -\frac{\zeta \cos n\pi}{\sqrt{Q(\beta_2)}} Q(\beta_2) \quad (D.16)$$

donde $Q(\beta_2) = \beta_2^2 - 2\beta_2 + \frac{1}{\zeta^2}$.

Por último, se obtiene M_p de la relación D.11 y D.16

$$M_{p,PD} = \zeta \sqrt{Q(\beta_2)} e^{-\frac{pt_{p,PD}}{\beta_2}} \quad (D.17)$$

donde $Q(\beta_2) = \beta_2^2 - 2\beta_2 + \frac{1}{\zeta^2}$ y $t_{p,PD}$ es el tiempo de pico dado por las expresiones D.10.

Puede comprobarse que para $\beta_2 = 2$ se obtiene la expresión de M_p del sistema de control realimentado con controlador P.

Bibliografía

- [1] F. Monasterio-Huelin, *Sistemas de segundo orden: especificaciones de diseño del régimen transitorio. Controladores P, PD y P-D*, 2016. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [2] —, *Problema de seguimiento de un conjunto de señales de referencia. Especificaciones de diseño del régimen permanente*, 2016. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>