

Dominio de la Frecuencia

Álvaro Gutiérrez & Félix Monasterio-Huelin

13 de enero de 2015

Índice

1. Introducción	2
2. Representaciones Gráficas	5
2.1. Diagrama de Bode	5
2.2. Diagrama de Nyquist	9
2.2.1. Conclusiones en lazo cerrado	12
3. Estabilidad	13
3.1. Criterio de Estabilidad de Nyquist	13
3.1.1. Ejemplo 1	15
3.1.2. Ejemplo 2	15
3.1.3. Ejemplo 3	18
3.2. Margen de Fase y Margen de Ganancia	18
3.3. Ancho de Banda	20

3.4. Resonancia	21
3.5. Relaciones entre el Dominio del Tiempo y el Dominio de la Frecuencia	21
4. Sintonización de PID	23
4.1. Interpretación de un PID en el Dominio de la Frecuencia	23
4.2. Interpretación del Segundo Método de Ziegler-Nichols en el Dominio de la Frecuencia	27
4.2.1. Ejemplo	28
4.3. Método de Ziegler-Nichols Modificado	28
4.3.1. Ejemplo	31

1. Introducción

La respuesta de un sistema en el dominio de la frecuencia hace referencia a la respuesta de un sistema en régimen permanente frente a una entrada sinusoidal. Téngase en cuenta que si la entrada ($x(t)$) de un sistema lineal e invariante en el tiempo (representado por su función de transferencia $G(s)$) es sinusoidal, su salida ($y(t)$) en régimen permanente también será sinusoidal. Dicha salida tendrá la misma frecuencia (ω) pero distinta amplitud y fase. A continuación se demuestra dicha afirmación.

Sea

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (1)$$

la entrada de un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo representado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (2)$$

donde $X(s)$ es la función de transferencia de la entrada $x(t)$ e $Y(s)$ la función de transferencia de la salida $y(t)$.

La transformada de Laplace de la entrada $x(t)$ es:

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3)$$

por lo que¹

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s) = \left[\frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} \right] G(s) \quad (4)$$

donde $a = \frac{1}{2} \frac{A\omega}{s - j\omega}$ y \bar{a} es el complejo conjugado de a .

¹Téngase en cuenta que la respuesta en régimen permanente de un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales, supuestas nulas en el presente desarrollo.

Si se representa $G(s)$ como un cociente de polinomios

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (5)$$

y se supone $G(s)$ de orden n con todos sus polos reales y simples, entonces:

$$G(s) = \frac{q(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (6)$$

Descomponiendo en fracciones simples, se obtiene:

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \frac{b_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + p_n} \quad (7)$$

donde $b_i \in \mathbb{R} \mid \forall i \in [1, n] \mid n \in \mathbb{N}$.

Aplicando la transformada inversa de Laplace en la Ecuación 7, se obtiene:

$$y(t) = ae^{j\omega t} + \bar{a}e^{-j\omega t} + b_1e^{-p_1 t} + b_2e^{-p_2 t} + \cdots + b_n e^{-p_n t} \quad (8)$$

Al ser un sistema estable, $Re\{-p_i\} \leq 0 \mid \forall i \in [1, n]$, por lo que en régimen permanente,

$$y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = ae^{j\omega t} + \bar{a}e^{-j\omega t} \quad (9)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la Ecuación 4, en régimen permanente podemos reescribir a y \bar{a} cómo:

$$\begin{aligned} a &= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j} \\ \bar{a} &= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j} \end{aligned} \quad (10)$$

Si se representa $G(j\omega)$ como una variable compleja:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi} \quad (11)$$

donde $|G(j\omega)|$ es el módulo y $\phi = \angle G(j\omega)$ su fase, entonces:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j} \\ \bar{a} &= \frac{A|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j} \end{aligned} \quad (12)$$

Por lo tanto, se puede reescribir la Ecuación 9 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= A|G(j\omega)| \frac{e^{j\omega t} e^{j\phi} - e^{-j\omega t} e^{-j\phi}}{2j} = \\ &= A|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} = \\ &= A|G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi) = \\ &= B \text{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (13)$$

donde $B = A|G(j\omega)|$ representa la amplitud de la salida sinusoidal y ϕ su desfase.

Se puede concluir por lo tanto, que para entradas sinusoidales:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| \\ \angle G(j\omega) &= \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \end{aligned} \quad (14)$$

Téngase en cuenta que el mismo razonamiento puede ser aplicado para sistemas estables con polos múltiples o complejos conjugados, quedando como tarea del alumno su demostración.

2. Representaciones Gráficas

2.1. Diagrama de Bode

El diagrama de Bode se representa mediante dos gráficas:

- **Magnitud:** Es la gráfica del logaritmo de la magnitud de la función de transferencia: $20 \log (|G(j\omega)|)$ con respecto a la frecuencia (ω).
- **Fase:** Es la gráfica de la fase de la función de transferencia: $\angle G(j\omega)$ con respecto a la frecuencia (ω).

En Ambas gráficas el eje de la frecuencia (ω) se representan en escala logarítmica.

A continuación se exponen una serie de diagramas de Bode de funciones de transferencias típicas, que permitirán simplificar la representación en problemas complejos.

- **$G(j\omega) = K$.**
El diagrama de Bode de $G(j\omega) = K$ se representa en la Figura 1a. Observamos como la curva de magnitud es una constante de valor $20 \log (K)$, que será positivo si $K > 1$, negativo si $K < 1$ y cero si $K = 1$. Observamos que la curva de fase es cero para cualquier valor de K . Por lo que variar la ganancia K de la función de transferencia modifica la curva de magnitud pero no de fase.
- **$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$**
El diagrama de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ se representa en la Figura 1b. Observamos como la curva de magnitud es una recta de pendiente -20 dB/dec , con valor 0 dB para $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Observamos que la curva de fase es una recta de valor -90° correspondiendo a $\angle G(j\omega) = \arctan \left[\frac{-1/\omega}{0} \right] = -90^\circ$.
- **$G(j\omega) = j\omega$**
El diagrama de Bode de $G(j\omega) = j\omega$ se representa en la Figura 1c.

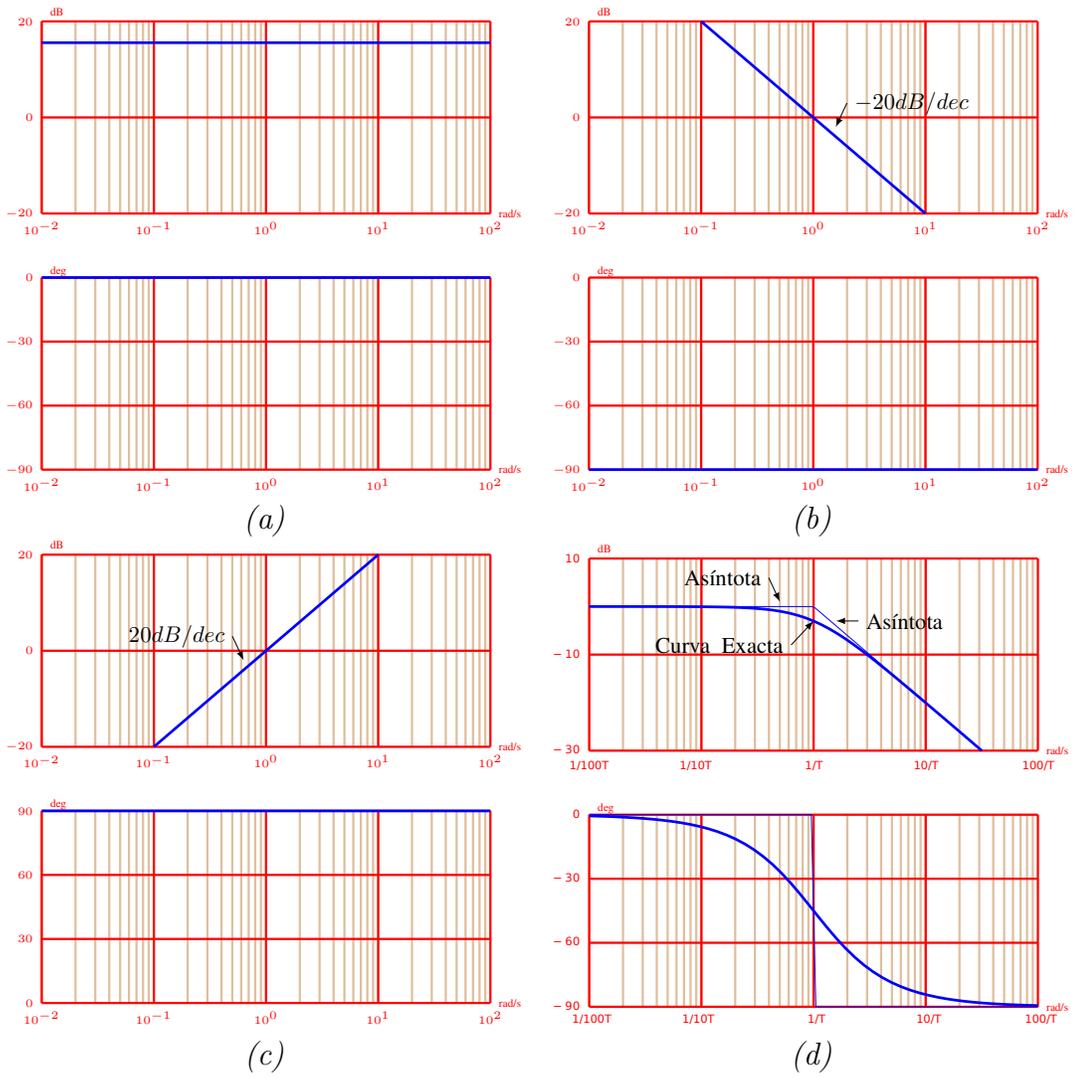


Figura 1: Diagramas de Bode de: (a) $G(j\omega) = K$, (b) $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$, (c) $G(j\omega) = j\omega$ y d) $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$

Observamos como la curva de magnitud es una recta de pendiente 20 dB/dec , con valor 0 dB para $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Observamos que la curva de fase es una recta de valor 90° correspondiendo a $\angle G(j\omega) = \arctan \left[\frac{\omega}{0} \right] = 90^\circ$.

- $\mathbf{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$

El diagrama de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ se representa en la Figura 1d. Si analizamos la función de transferencia para valores de $\omega T \ll 1$, observamos que $G(j\omega) \approx 1$. Bajo este supuesto la magnitud y fase son 0.

Si analizamos la función de transferencia para valores de $\omega T \gg 1$, observamos que $G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega T}$. Por lo tanto, la magnitud será una curva de pendiente -20 dB/dec y fase -90° para $\omega \rightarrow \infty$.

Observamos que en la frecuencia esquina ($\omega = \frac{1}{T} \text{ rad/s}$) podemos aproximar la magnitud por 0 dB y la fase por -45° .

- $\mathbf{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$

El diagrama de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}$ se representa en la Figura 2 para distintos valores de ξ . Si analizamos la función de transferencia para valores de $\omega \ll \omega_n$, observamos que $G(j\omega) \approx 1$. Bajo este supuesto la magnitud y fase son 0.

Para valores de $\omega \gg \omega_n$, $G(j\omega) \approx \frac{1}{(j\omega/\omega_n)^2}$. Por lo tanto, la magnitud será una curva de pendiente -40 dB/dec y fase -180° para $\omega \rightarrow \infty$. Observamos que en la frecuencia esquina ($\omega = \omega_n$) podemos aproximar la magnitud por 0 dB y la fase por -90° .

Recordemos que en las inmediaciones del frecuencia esquina ($\omega = \omega_n$) existe un pico de resonancia, donde $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$; $0 \leq \xi \leq 0.707$. A dicha frecuencia, la magnitud de resonancia

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}; 0 \leq \xi \leq 0.707 \quad (15)$$

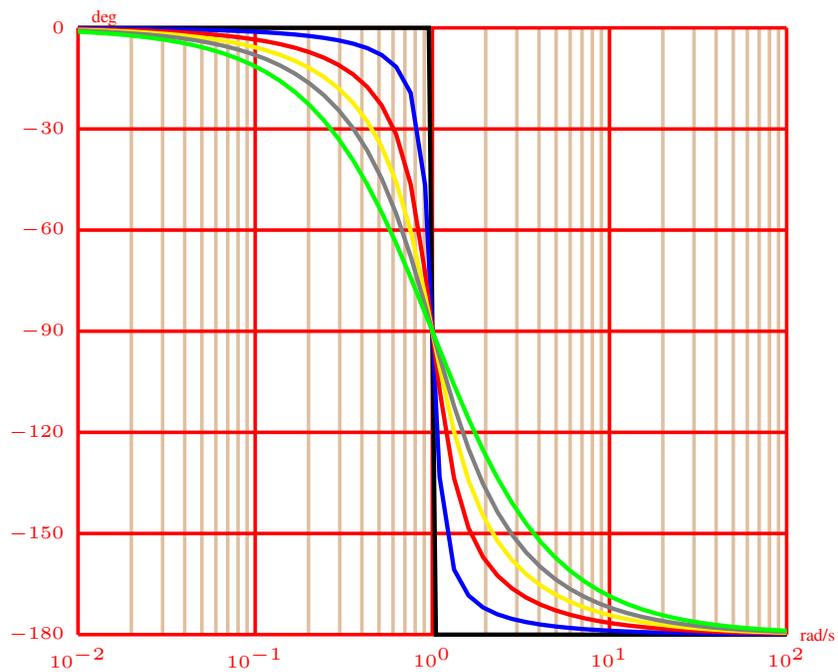
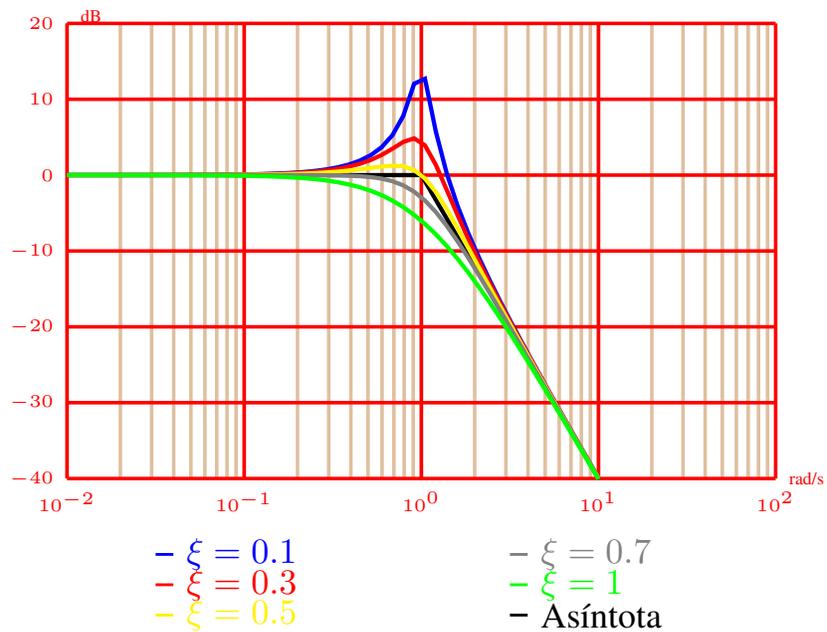


Figura 2: Diagrama de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$, con $\omega = \omega_n$ y distintos valores de ξ

2.2. Diagrama de Nyquist

El diagrama de Nyquist es una representación en coordenadas polares de la magnitud de $G(j\omega)$ ($|G(j\omega)|$) con respecto al ángulo de fase de $G(j\omega)$ ($\angle G(j\omega)$), $\forall \omega \in [0, \infty)$ ². Por lo tanto, cada punto del diagrama representa un valor de $G(j\omega)$ para una determinada ω . Los ángulos de fase se representan en el sentido contrario a la aguja del reloj si son positivos y en el sentido de las agujas del reloj si son negativos.

La ventaja del diagrama de Nyquist es que permite representar las características de la respuesta en frecuencia para todo el rango de ω en una única gráfica.

A continuación se exponen una serie de diagramas de Nyquist de funciones de transferencia típicas, que permitirán simplificar la representación en problemas complejos.

- $G(j\omega) = K$.

El diagrama de Nyquist de $G(j\omega) = K$, es un único punto.

- $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

El diagrama de Nyquist de $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$ es el eje imaginario negativo (ver Figura 3a).

- $G(j\omega) = j\omega$

El diagrama de Nyquist de $G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ$ es el eje imaginario positivo (ver Figura 3b).

- $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$

El diagrama de Nyquist de $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ se representa en la Figura 3c. En este caso, podemos reescribir $G(j\omega)$ como

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T \quad (16)$$

²Por simplicidad se suele representar para $\omega \in [0, \infty)$

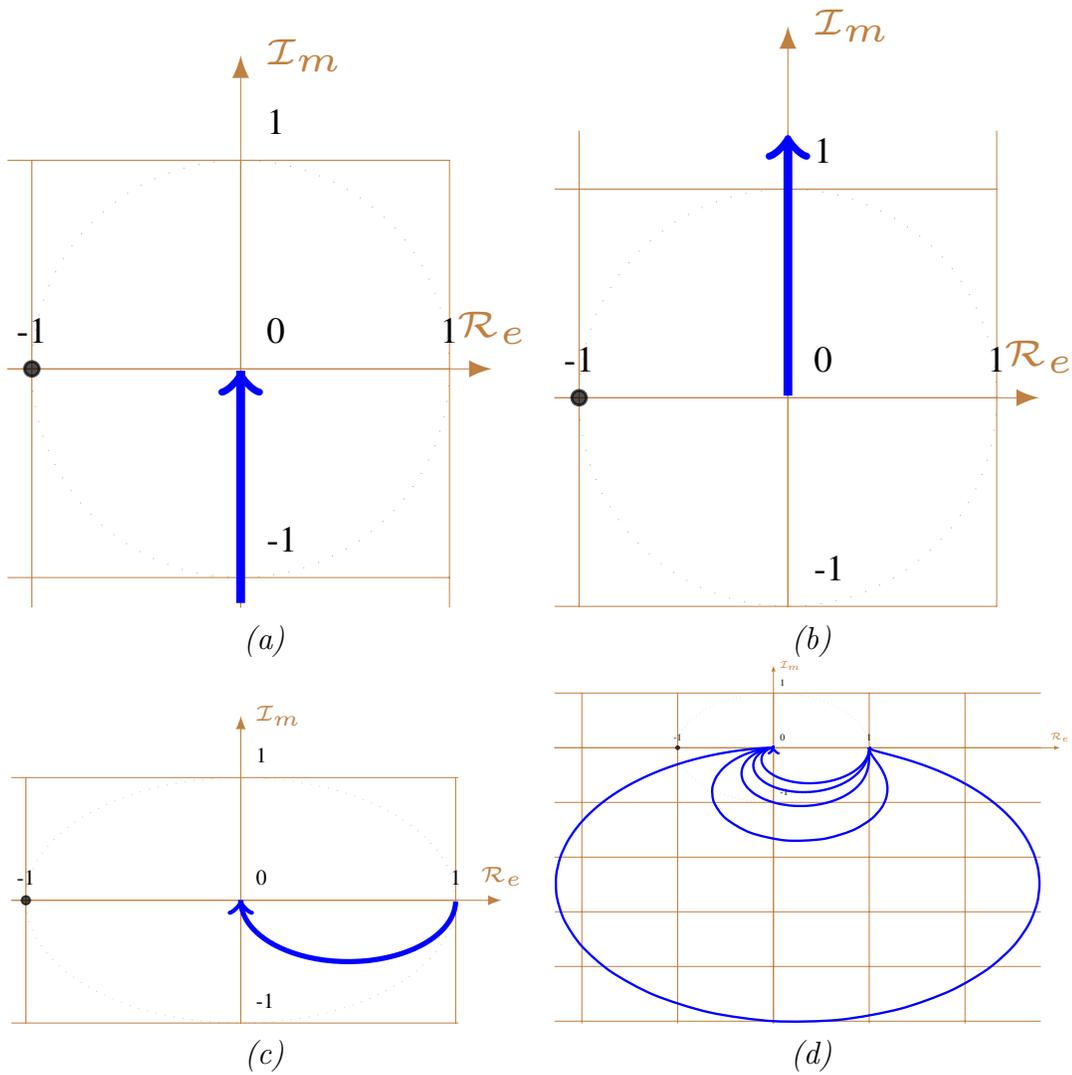


Figura 3: Diagramas de Nyquist de: (a) $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$, (b) $G(j\omega) = j\omega$, (c) $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ y (d) $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$, con $\omega = \omega_n$ y distintos valores de ξ

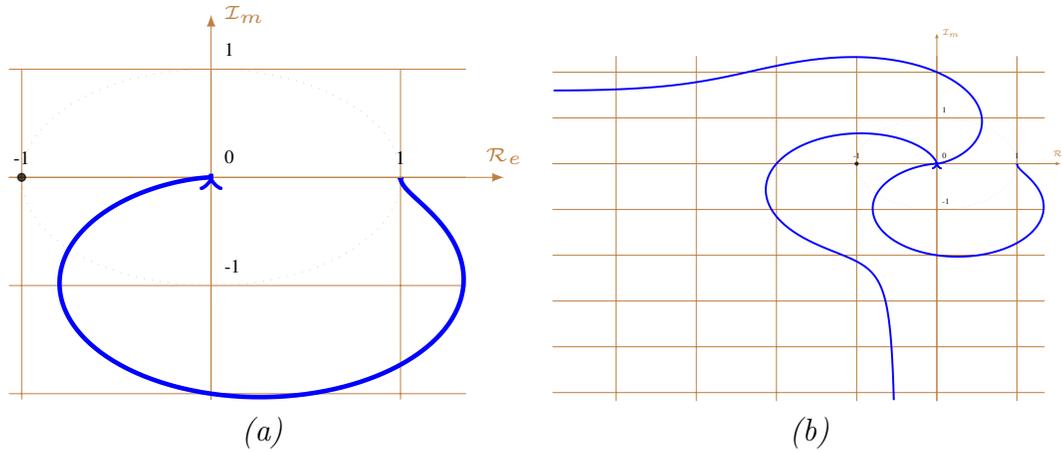


Figura 4: (a) Pico de resonancia representado en el diagrama de Nyquist y (b) diagramas de Nyquist en función del tipo del sistema.

Para $\omega \rightarrow 0$ obtenemos $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1/\underline{0}$, mientras que para $\omega \rightarrow \infty$ obtenemos $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0/\underline{-90^\circ}$. Podemos observar que en la frecuencia esquina $\omega = \frac{1}{T}$ tenemos $G(j\frac{1}{T}) = \frac{1}{\sqrt{2}}/\underline{-45^\circ}$

- $$\mathbf{G}(j\omega) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + 2\xi(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

El diagrama de Nyquist de $G(j\omega) = \frac{1}{1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}$ se representa en la Figura 3d para distintos valores de ξ .

Para $\omega \rightarrow 0$ obtenemos $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1/\underline{0}$, mientras que para $\omega \rightarrow \infty$ obtenemos $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0/\underline{-180^\circ}$. Podemos observar que para la frecuencia esquina ($\omega = \omega_n$), $G(j\omega_n) = \frac{1}{2\xi}/\underline{-90^\circ}$

Recordemos que en las inmediaciones del frecuencia esquina ($\omega = \omega_n$) existe un pico de resonancia, donde $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$; $0 \leq \xi \leq 0.707$. Observamos un ejemplo de su representación en el diagrama de Nyquist en la Figura 4a.

A modo general podemos describir formas generales de los diagramas de Nyquist en función del tipo de la Función de Transferencia. En la Figura 4b se muestran los diagramas para los siguientes tipos:

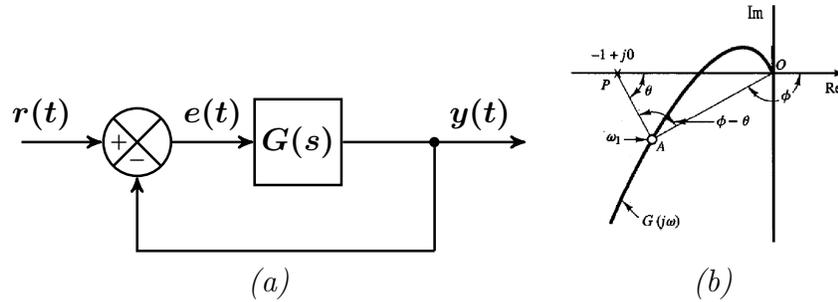


Figura 5: (a) Sistema en lazo cerrado y (b) respuesta en lazo cerrado a partir del diagrama Nyquist en lazo abierto.

- Tipo 0:
 - $G(j0) = \text{finito}$ y sobre el eje real positivo. Fase(0) perpendicular al eje real
 - $G(j\infty) = 0$. Fase (∞) tangente a uno de los ejes
- Tipo 1:
 - $G(j0) = \infty$. Fase(0) = -90°
 - $G(j\infty) = 0$. Fase (∞) tangente a uno de los ejes
- Tipo 2:
 - $G(j0) = \infty$. Fase(0) = -180°
 - $G(j\infty) = 0$. Fase (∞) tangente a uno de los ejes

2.2.1. Conclusiones en lazo cerrado

Recordemos que en las representaciones gráficas se presenta la Función de Transferencia en lazo abierto para obtener conclusiones de la Función de Transferencia en lazo cerrado.

En la Figura 5a, se representa un sistema en lazo cerrado de la Función de Transferencia $G(s)$. La Función de Transferencia en lazo cerrado del sistema

es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (17)$$

En la Figura 5b, observamos como un punto cualquiera A representa una frecuencia ω_1 . El vector \overrightarrow{OA} representa a $G(j\omega_1)$, mientras que su longitud \overline{OA} representa su magnitud $|G(j\omega_1)|$. Además, el ángulo ϕ entre \overrightarrow{OA} y el eje real positivo representa la fase $\angle G(j\omega_1)$.

Podemos observar también, que el vector \overrightarrow{PA} , siendo P el punto $-1 + j0$, representa $1 + G(j\omega_1)$, y el ángulo θ que forma dicho vector con el eje real negativo representa la fase $\angle 1 + G(j\omega_1)$.

En consecuencia, tenemos que:

$$\left| \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} \right| = \frac{\overline{OA}}{\overline{PA}} \quad (18)$$

$$\angle G(j\omega_1) - \angle 1 + G(j\omega_1) = \phi - \theta \quad (19)$$

Podemos igualmente concluir

$$\frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{PA}} \quad (20)$$

3. Estabilidad

En esta sección nos centramos en el estudio de la estabilidad absoluta y relativa del sistema. La primera hace mención a si el sistema es estable o no, mientras la estabilidad relativa cuantifica el nivel de estabilidad del sistema.

3.1. Criterio de Estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir del diagrama de Nyquist de la Función

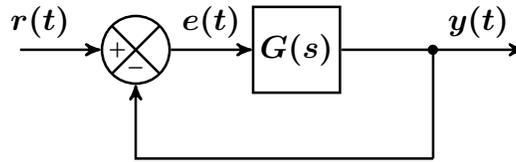


Figura 6: sistema en lazo cerrado.

de Transferencia en lazo abierto. Se basa en la teoría de variable compleja, mediante una transformación de los contornos en el plano complejo. Dicho análisis no es objeto del presente documento, por lo que se relega su estudio a un futuro curso.

El criterio de estabilidad de Nyquist solo puede aplicarse para sistemas causales. En este caso, si la Función de Transferencia en lazo abierto $G(s)$ de la Figura 6 tiene P polos en el semiplano derecho del *plano* s , y el $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ es constante, para que el sistema sea estable, el lugar geométrico de $G(j\omega)$ para $\omega \in (-\infty, \infty)$ debe rodear P veces al punto $-1 - j0$ en el sentido contrario de las agujas del reloj.

Podemos expresar el criterio de estabilidad de la siguiente manera:

$$Z = N + P \quad (21)$$

donde

- Z = número de ceros de $1 + G(s)$ en el semiplano derecho del *plano* s . El número de polos inestables de la Función de Transferencia en lazo cerrado.
- P = número de polos de $G(s)$ en el semiplano derecho del *plano* s . El número de polos inestables de la Función de Transferencia en lazo abierto.
- N = número de rodeos al punto $-1 + j0$ en el sentido de las agujas del reloj.

A continuación se proponen unos ejemplos.

3.1.1. Ejemplo 1

Sea

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (22)$$

El número de polos en el semiplano derecho del *plano s* de la función de transferencia en lazo abierto es $P = 0$, siendo un sistema estable en lazo abierto.

En la Figura 7a se muestra el diagrama de Nyquist para $K = 1$, donde el diagrama de Nyquist no muestra ningún rodeo al punto $-1 + j0$, por lo que $N = 0$. De esta manera, obtenemos que $Z = N + P = 0$, siendo un sistema estable en lazo cerrado.

En la Figura 7b se muestra el diagrama de Nyquist para $K = 10$, donde el diagrama de Nyquist presenta un rodeo al punto $-1 + j0$ en el sentido de las agujas del reloj, por lo que $N = 1$. De esta manera, obtenemos que $Z = N + P = 1$, siendo un sistema inestable en lazo cerrado.

3.1.2. Ejemplo 2

Sea

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)} \quad (23)$$

El número de polos en el semiplano derecho del *plano s* de la función de transferencia en lazo abierto es $P = 1$, siendo un sistema inestable en lazo abierto.

En la Figura 8 se muestra el diagrama de Nyquist, rodeando al punto $-1 + j0$ una vez en sentido de las agujas del reloj, por lo que $N = 1$. Por lo tanto, $Z = N + P = 2$ y el sistema tiene dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho, siendo un sistema inestable.

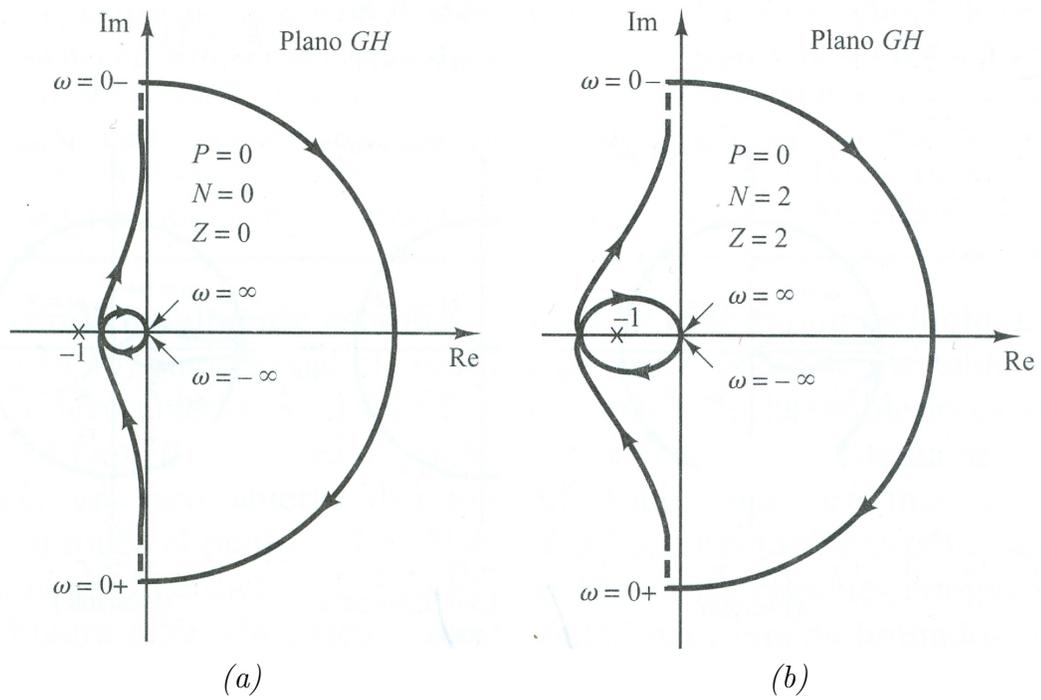


Figura 7: Diagramas de Nyquist para la función de transferencia $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$ con (a) $K = 1$ y (b) $K = 10$. Imágenes de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

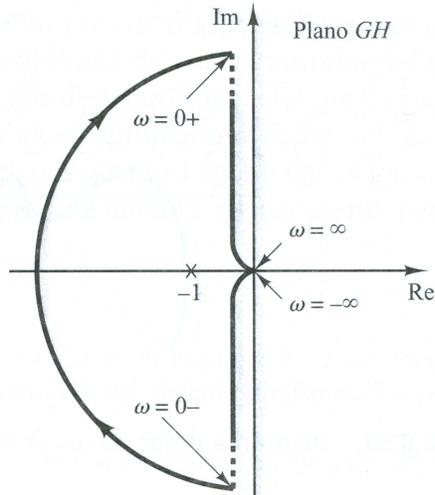


Figura 8: Diagrama de Nyquist para la función de transferencia $G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

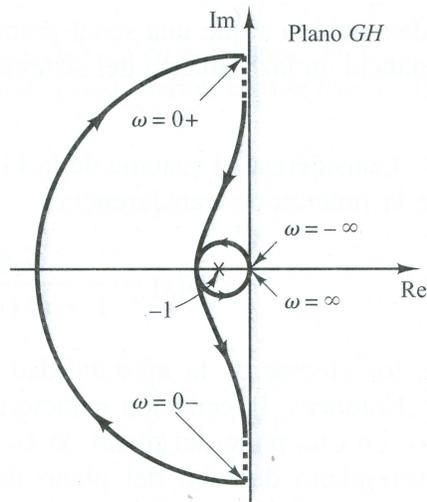


Figura 9: Diagrama de Nyquist para la función de transferencia $G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

3.1.3. Ejemplo 3

Sea

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} | K > 1 \quad (24)$$

El número de polos en el semiplano derecho del *plano s* de la función de transferencia en lazo abierto es $P = 1$.

En la Figura 9 se muestra el diagrama de Nyquist, rodeando al punto $-1 + j0$ una vez en sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que $N = -1$. Por lo tanto $Z = N + P = 0$, indicando que no existen polos en el semiplano derecho del *plano s* de la función de transferencia en lazo cerrado y que el sistema es estable. Este es un ejemplo de sistema inestable en lazo abierto y estable en lazo cerrado.

3.2. Margen de Fase y Margen de Ganancia

El Margen de Fase y Margen de Ganancia son dos parámetros que se utilizan para medir la estabilidad relativa de un sistema.

- **Margen de Fase:** Variación relativa de la fase del sistema en lazo abierto necesaria para llevar el sistema en lazo cerrado al límite de la estabilidad. Si definimos ω_1 como la frecuencia a la cual $G(j\omega_1) = 1$ (0 dB) y $\phi = \angle G(j\omega_1)$, el valor del Margen de Fase es:

$$MF = 180 + \phi \quad (25)$$

- **Margen de Ganancia:** Variación relativa de ganancia del sistema en lazo abierto necesaria para llevar al sistema en lazo cerrado al límite de la estabilidad. Si definimos ω_2 como la frecuencia a la cual $\angle G(j\omega_2) = -180^\circ$, el Margen de Ganancia es:

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_2)|} \quad (26)$$

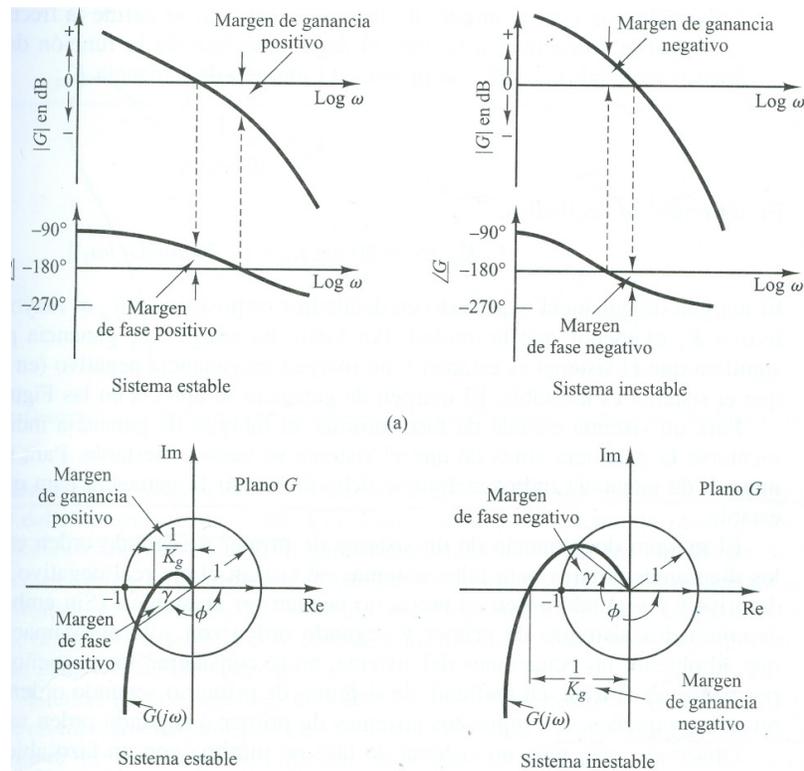


Figura 10: Márgenes de Ganancia y de Fase de unas funciones de transferencia genéricas. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

En la Figura 10 observamos los Márgenes de Ganancia y de Fase de un sistema estable e otro inestable representados en los diagramas de Bode y Nyquist.

En el Diagrama de Bode, podemos calcular el cruce del diagrama de magnitud por 0 dB y proyectar dicha frecuencia sobre el diagrama de fase. Si el punto del diagrama de fase está por encima de -180° el sistema tendrá un Margen de Fase positivo. En el Diagrama de Nyquist, el ángulo que forma el vector que une el origen con el corte del diagrama con la circunferencia unidad con el eje real negativo es el Margen de Fase.

En el Diagrama de Bode, podemos calcular el cruce del diagrama de fase por -180° y proyectar dicha frecuencia sobre el diagrama de magnitud. Si el

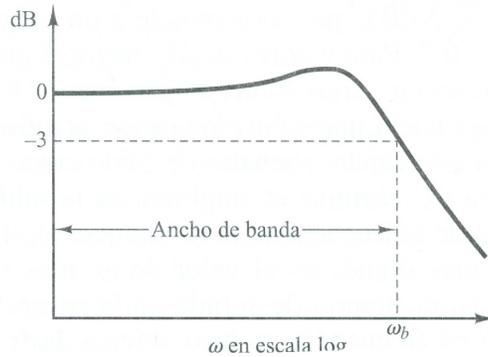


Figura 11: Frecuencia de corte ω_b y ancho de banda.

punto del diagrama de magnitud está por debajo de 0 dB el sistema tendrá un Margen de Ganancia positivo. En el Diagrama de Nyquist, observamos el corte del diagrama con el eje real negativo, siendo la distancia de ese punto con el origen el inverso del Margen de Ganancia.

Como podemos observar, el Margen de Ganancia y de Fase nos permiten cuantificar la estabilidad de nuestro sistema. El sistema será estable si ambos márgenes son positivos, e inestable si alguno de ellos es negativo. Cuanto más positivos sean más estable será el sistema y viceversa. Sin embargo, hay que tener en cuenta que al ser valores relativos su valores óptimos dependerán del sistema y la aplicación. Como nota general, se consideran valores adecuados que el $MF > 30^\circ$ y el $MG > 2$, aunque insistimos sobre su dependencia del sistema y aplicación.

3.3. Ancho de Banda

Definimos la frecuencia de corte (ω_b) como la frecuencia en la que la magnitud de respuesta en frecuencia se encuentra 3 dB por debajo de su valor a $\omega = 0$. El rango entre 0 y ω_b se denomina Ancho de Banda. La Figura 11 muestra la respuesta en lazo de un sistema genérico, representando la frecuencia de corte y el ancho de banda.

3.4. Resonancia

Como ya se ha comentado previamente, definimos la Frecuencia de Resonancia como la frecuencia (ω_r) a la que la magnitud de la respuesta en lazo cerrado presenta un máximo. La magnitud de la frecuencia de resonancia es la magnitud a dicha frecuencia.

Para un sistema en lazo abierto de segundo orden, representado por su ecuación canónica, sabemos que

$$\begin{aligned}\omega_r &= \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}; \quad 0 \leq \xi \leq 0.707 \\ M_r &= |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}; \quad 0 \leq \xi \leq 0.707\end{aligned}\tag{27}$$

M_r es representativa de la estabilidad relativa del sistema. Una M_r alta implica la presencia de un par de polos dominantes en lazo cerrado con un coeficiente de amortiguamiento (ξ) pequeño.

3.5. Relaciones entre el Dominio del Tiempo y el Dominio de la Frecuencia

Para sistemas de segundo orden expresados en su forma canónica es posible obtener una relación directa entre algunos parámetros del análisis en el Dominio del Tiempo y de la Frecuencia, para su respuesta a una entrada escalón. Sin embargo, para sistemas de orden superior la relación es más compleja, y su respuesta en el Dominio del Tiempo no es sencilla de calcular.

Aún así, existen ciertas relaciones cualitativas a tener en cuenta para poder realizar comparativas entre ambos dominios.

- **Resonancia:** Para un sistema de orden superior a 2, con un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado, se obtiene un comportamiento transitorio adecuado para valores de $M_r \in [1.0, 1.4]$, correspondiendo con un coeficiente de amortiguamiento $\xi \in [0.4, 0.7]$.

Valores superiores a $M_r > 1.5$, corresponden a un coeficiente de amortiguamiento pequeño, presentando la respuesta al escalón demasiadas oscilaciones en el dominio del tiempo.

Por otro lado, sabemos que el tiempo de subida, $t_r \propto \frac{1}{\omega_d}$ ya que, para un sistema de segundo orden, $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$, siendo β el ángulo que forma $G(j\omega_n)$ con el eje real negativo en el *plano s*. En un sistema con un coeficiente de amortiguamiento pequeño, $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx \omega_n$, por lo que el tiempo de subida es inversamente proporcional a la frecuencia de resonancia ($t_r \propto \frac{1}{\omega_r}$)

Por último, la sobreelongación máxima y la magnitud de resonancia están ambas inversamente relacionadas con el coeficiente de amortiguamiento, por lo que $M_r \propto M_p$, para el rango de $0 \leq \xi \leq 0.707$ donde M_r está definida.

- **Ancho de Banda:** El ancho de banda expresa la capacidad de reproducir la señal de entrada. Para un ancho de banda grande, la respuesta será rápida ($BW \propto \frac{1}{t_r}$). Sin embargo, es importante resaltar que un ancho de banda demasiado grande permitirá el paso de frecuencias de muy alta frecuencia, siendo un problema desde el punto de vista del ruido de la señal. Es por lo tanto importante mantener un compromiso entre el tiempo de subida y el ruido del sistema.
- **Margen de Fase:** Sabemos que a mayor coeficiente de amortiguamiento mayor margen de fase ($MF \propto \xi$). Por otro lado, sabemos que la sobreelongación máxima está inversamente relacionada con el coeficiente de amortiguamiento, por lo que $MF \propto \frac{1}{M_p}$.
- **Margen de Ganancia:** Si incrementamos el Margen de Ganancia, el sistema será más lento, pues estamos reduciendo la ganancia del sistema en lazo cerrado. Por lo tanto el tiempo de subida es directamente proporcional al Margen de Ganancia ($MG \propto t_r$).

4. Sintonización de PIDs

4.1. Interpretación de un PID en el Dominio de la Frecuencia

Definamos la función de transferencia ($G(s)$) de un sistema genérico en el dominio de la frecuencia como:

$$G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) \quad (28)$$

donde $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ son la parte real e imaginaria representadas en el *plano* ω para una frecuencia ω .

Si seleccionamos un punto A cualquiera para una frecuencia ω_0 , tenemos que:

$$A \equiv G(j\omega_0) = X(\omega_0) + jY(\omega_0) \quad (29)$$

Si añadimos al sistema un controlador proporcional, tal que ($G_p(s) = K_p$), podemos ver que la respuesta en frecuencia del nuevo sistema en lazo abierto para la frecuencia ω_0 es:

$$A_p \equiv G_p(j\omega_0)G(j\omega_0) = K_p X(\omega_0) + K_p jY(\omega_0) \quad (30)$$

Dicha transformación provoca un desplazamiento radial del punto A con respecto del origen tal y como se observa en la Figura 12a.

Si por el contrario añadimos al sistema un controlador derivativo, tal que $G_d(s) = \tau_d s$, la respuesta en frecuencia del nuevo sistema en lazo abierto para la frecuencia ω_0 es:

$$\begin{aligned} A_d \equiv G_d(j\omega_0)G(j\omega_0) &= j\tau_d\omega_0 (X(\omega_0) + jY(\omega_0)) \\ &= -\tau_d\omega_0 Y(\omega_0) + j\tau_d\omega_0 X(\omega_0) \end{aligned} \quad (31)$$

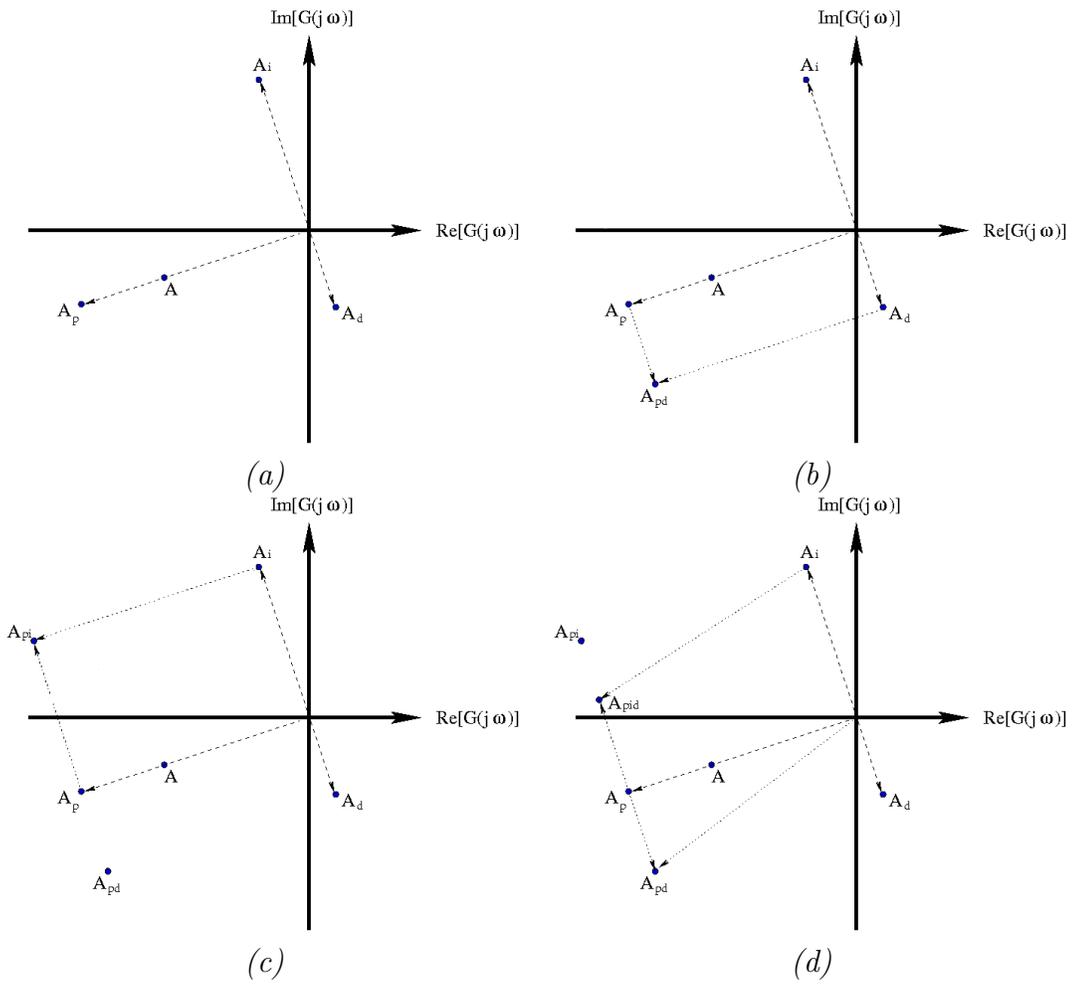


Figura 12: Representación del desplazamiento de un punto A en el diagrama de Nyquist por la acción de (a) un controlador proporcional, (b) un controlador derivativo, (c) un controlador integral y (d) un PID.

Dicha transformación provoca un movimiento ortogonal, en el sentido contrario a las agujas del reloj, y un movimiento radial con respecto a ese nuevo eje, tal y como se muestra en la Figura 12a.

Igualmente, si se define un controlador integral, tal que $G_i(s) = \frac{1}{\tau_i s}$, la respuesta en frecuencia del nuevo sistema en lazo abierto para la frecuencia ω_0 es:

$$\begin{aligned}
 A_i \equiv G_i(j\omega_0)G(j\omega_0) &= \frac{1}{j\tau_i\omega_0} (X(\omega_0) + jY(\omega_0)) \\
 &= -j \frac{1}{\tau_i\omega_0} (X(\omega_0) + jY(\omega_0)) \quad (32) \\
 &= \frac{Y(\omega_0)}{\tau_i\omega_0} - j \frac{X(\omega_0)}{\tau_i\omega_0}
 \end{aligned}$$

Dicha transformación provoca un movimiento ortogonal, en el sentido de las agujas del reloj, y un movimiento radial con respecto a ese nuevo eje, tal y como se muestra en la Figura 12a.

Combinaciones de estos controladores, producen desplazamientos del punto A que pueden ser obtenidas como sumas vectoriales, tal y como se observa en la Figura 12b para un PD, en la Figura 12c para un PI y en la Figura 12d para un PID. Por lo tanto, combinaciones de estos tres controladores permiten el desplazamiento de cualquier punto del diagrama de Nyquist en una recta, para el caso de un controlador proporcional, un cuadrante en el caso de controladores PI o PD, y a un semiplano en el caso de un controlador PID, tal y como se muestra en la Figura 13.

Sin embargo, es importante resaltar que dicha transformación modifica substancialmente la forma del diagrama de Nyquist completo, tal y como se puede observar en el siguiente ejemplo. Supongamos la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (33)$$

Observamos en la Figura 14 los diferentes diagramas de Nyquist para la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$, donde $G_c(s)$ representa

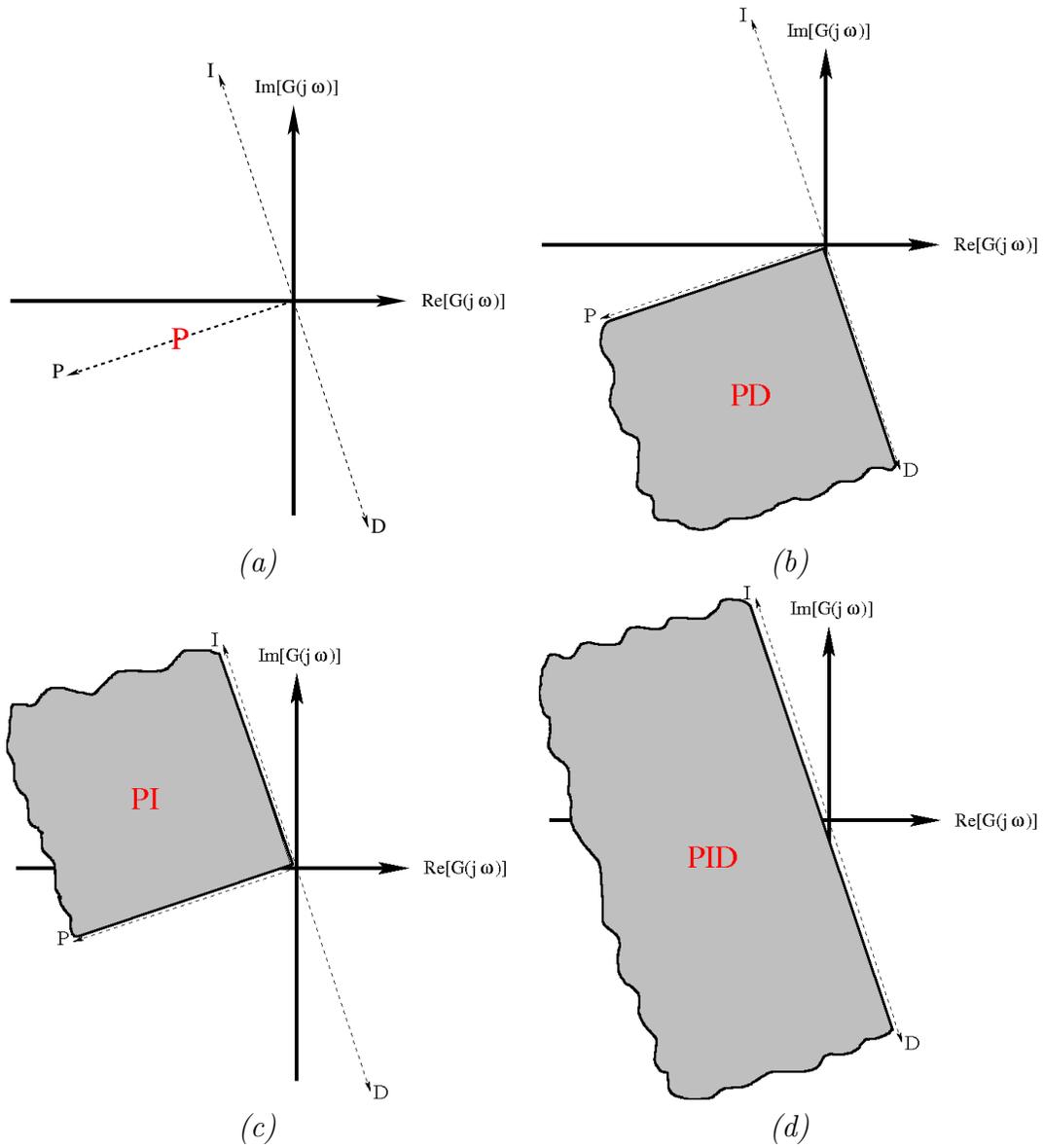


Figura 13: Posibles soluciones del desplazamiento de un punto A en el diagrama de Nyquist por la acción de (a) un controlador P , (b) un controlador PD , (c) un controlador PI y (d) un PID .

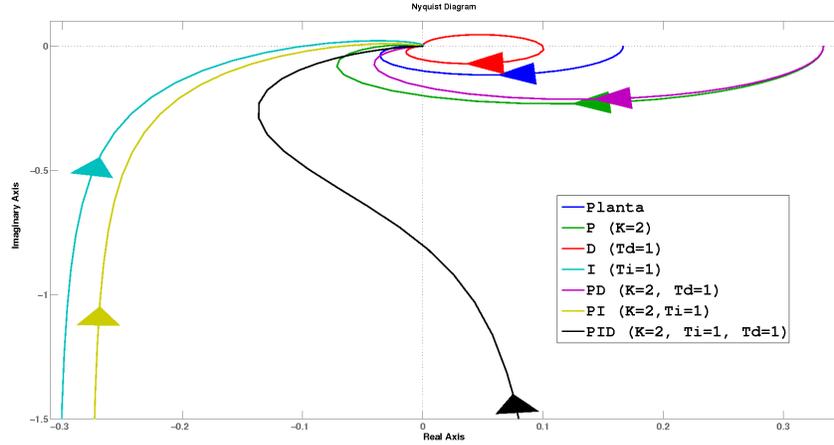


Figura 14: Diagrama de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$, con $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ y $G_c(s)$ distintos controladores.

distintos controladores.

4.2. Interpretación del Segundo Método de Ziegler-Nichols en el Dominio de la Frecuencia

El segundo método de Ziegler-Nichols está basado en la respuesta en frecuencia de un sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional, que presente oscilaciones permanentes para un valor de $K = K_{cr}$ frente a una entrada escalón.

Teniendo en cuenta ese valor de K_{cr} y el periodo de oscilación P_{cr} , Ziegler-Nichols desarrollaron la Tabla 4.2 para el cálculo de los valores de un P, PI o PID.

Se puede interpretar el segundo método de Ziegler-Nichols, como el desplazamiento del punto de corte con el eje real negativo $A \equiv -\frac{1}{K_{cr}} + j0$ radialmente con respecto al origen, hasta que se sitúa sobre el punto $-1 + j0$, siendo $K_{cr} = \frac{1}{MG}$. Si aplicamos la Tabla 4.2, podemos ver cómo el punto

	K_P	τ_I	τ_D
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

$A \equiv (-\frac{1}{K_{cr}} + j0)$ es desplazado a los puntos $-0.45 + j0$ o al punto $-0.6 - j0.28$ para el caso de un PI o PID respectivamente.

4.2.1. Ejemplo

Sea

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (34)$$

Si incorporamos un controlador proporcional $G_c(s) = K \mid K > 0$ con K variable, y aumentamos K hasta que $K = K_{cr} = 60$, observamos cómo la respuesta a la entrada escalón presenta cada vez más oscilaciones hasta que presenta oscilaciones permanentes (ver Figura 15). El diagrama de Nyquist refleja un desplazamiento hasta que corta el eje real imaginario negativo en $-1 + j0$ (ver Figura 15).

Si resolvemos el desplazamiento del punto $A \equiv G(j\omega_{cr})$ para el caso de un controlador PI y un PID, en función de los valores de la Tabla 4.2, obtenemos:

- PI: $G(j\omega_{cr}) = -1/K_{cr} \rightarrow G(j\omega_{cr})G_c(j\omega_{cr}) = -0.45 + j0.08$
- PID: $G(j\omega_{cr}) = -1/K_{cr} \rightarrow G(j\omega_{cr})G_c(j\omega_{cr}) = -0.6 - j0.28$

4.3. Método de Ziegler-Nichols Modificado

El método de Ziegler-Nichols modificado representa un procedimiento general para la sintonización de los parámetros de PID en base al desplazamiento de un punto cualquiera del diagrama de Nyquist.

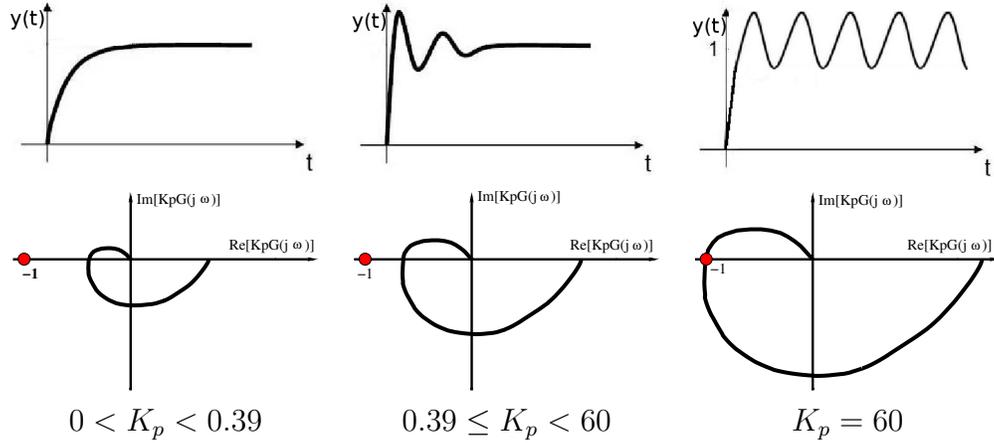


Figura 15: Respuesta en el tiempo a una entrada escalón de la función de transferencia en lazo cerrado y diagrama de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto para distintos valores de K del controlador proporcional.

Sea $A \equiv G(j\omega_0) = r_a e^{j(\pi + \phi_a)}$ un punto cualquiera del diagrama de Nyquist de un sistema en lazo abierto representado en coordenadas polares. Sea $B \equiv G(j\omega_0)G_c(j\omega_0) = r_b e^{j(\pi + \phi_b)}$ un punto del conjunto controlador + planta del diagrama de Nyquist donde se quiere desplazar el punto A . Entonces, definimos $G_c(j\omega_0) = r_c e^{j\phi_c}$ como el controlador a aplicar para cumplir dicho desplazamiento³.

Si igualamos términos entre las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 r_b e^{j(\pi + \phi_b)} &= r_a r_c e^{j(\pi + \phi_a + \phi_c)} \\
 r_c &= \frac{r_b}{r_a} \\
 \phi_c &= \phi_b - \phi_a
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Para un controlador PI, tenemos

³Es imprescindible tener en cuenta las capacidades de desplazamiento de los controladores a aplicar, tal y como se han visto previamente.

$$\begin{aligned}
G_c(j\omega_0) &= K_p \left(1 + \frac{1}{j\tau_i\omega_0} \right) \\
&= K_p \left(1 - j \frac{1}{\tau_i\omega_0} \right)
\end{aligned} \tag{36}$$

Por otro lado, sabemos que

$$G_c(j\omega_0) = r_c e^{j\phi_c} = r_c \cos\phi_c + jr_c \sin\phi_c \tag{37}$$

Por lo que igualando las Ecuaciones 36 y 37, obtenemos

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos\phi_c \\ \frac{K_p}{\tau_i\omega_0} = -r_c \sin\phi_c \end{cases} \tag{38}$$

Desarrollando la Ecuacion 38, obtenemos

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos\phi_c \\ \tau_i = -\frac{1}{\omega_0 \operatorname{tg}\phi_c} \end{cases} \tag{39}$$

De manera análoga, para un controlador PD obtenemos los valores que se muestran en la Ecuación 40

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos\phi_c \\ \tau_d = \frac{\operatorname{tg}\phi_c}{\omega_0} \end{cases} \tag{40}$$

Para realizar el mismo desarrollo con un controlador PID se dispone de un grado de libertad. Si definimos $\tau_d = \alpha\tau_i$, tenemos que

$$K_p \left(1 + j\omega_0\tau_d - j \frac{1}{\tau_i\omega_0} \right) = r_c \cos\phi_c + jr_c \sin\phi_c \tag{41}$$

Igualando términos, obtenemos

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ K_p \left(\omega_0 \tau_d - \frac{1}{\tau_i \omega_0} \right) = r_c \operatorname{sen} \phi_c \end{cases} \quad (42)$$

Despejando K_p , obtenemos

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \omega_0 \tau_d - \frac{1}{\tau_i \omega_0} = \operatorname{tg} \phi_c \end{cases} \quad (43)$$

Finalmente, desarrollando para $\tau_d = \alpha \tau_i$, obtenemos

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \tau_d = \alpha \tau_i \\ \tau_I = \frac{1}{2\omega_o \alpha} (\operatorname{tg} \phi_c + \sqrt{4\alpha + \operatorname{tg}^2 \phi_c}) \end{cases} \quad (44)$$

4.3.1. Ejemplo

Sea

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2})(s+\frac{1}{4})} \quad (45)$$

Diseñar un controlador mediante el método de Ziegler-Nichols Modificado, tal que el el Margen de Fase sea $MF = 50^\circ$ y el error en régimen permanente en lazo cerrado a una entrada escalón sea nulo.

El diagrama de Nyquist de la función de transferencia $G(s)$ en lazo abierto se muestra en la Figura 17a. La respuesta a la entrada escalón de la función de transferencia en lazo cerrado se muestra en la Figura 17b. Observamos que la respuesta al escalón presenta una sobrelongación máxima de $M_p = 1.52$ y un tiempo de establecimiento $t_s = 62s$. con un error en régimen permanente. Además, el Margen de Ganancia es $MG = 1.4$ y el Margen de Fase $MF = 11^\circ$.

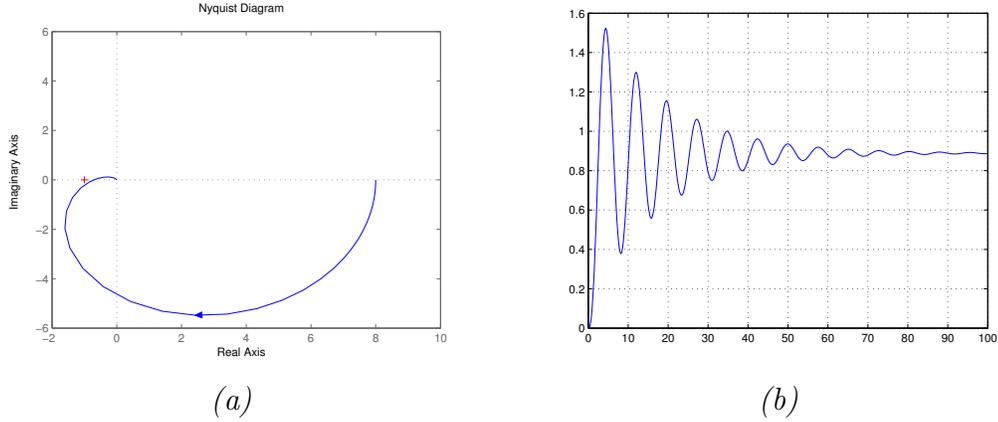


Figura 16: (a) Diagrama de Nyquist de la función de transferencia $G(s)$ y (b) repuesta en lazo cerrado a una entrada escalón unitario.

Sabemos que el Margen de Fase lo obtenemos gráficamente como el ángulo que forma el vector que une el origen con el punto de corte de la circunferencia unidad con el eje real negativo. Si definimos ese punto, como el punto $A \equiv G(j\omega_0)$, donde $\omega_0 = 0.795 \text{ rad/s}$. Queremos desplazar dicho punto a la posición $B \equiv G_c(j\omega_0)G(j\omega_0)$, tal que $MF = 50^\circ$.

Según vimos previamente, dicho punto B se encuentra en el cuadrante al cual se puede desplazar un punto gracias a un controlador PD. Sin embargo, puesto que las especificaciones requieren que $e_{ss|escalón} = 0$, es imprescindible incorporar un polo en el origen para satisfacer dicha condición. Por lo que, necesitamos un controlador PID para satisfacer ambas especificaciones.

Por lo tanto, sea

$$A \equiv G(j\omega_0) = r_a e^{j(\pi + \phi_a)} \quad (46)$$

tal que $r_a = 1$ y $\phi_a = MF = 11^\circ$

Sea

$$B \equiv G(j\omega_0)G_c(j\omega_0) = r_b e^{j(\pi + \phi_b)} \quad (47)$$

tal que $r_b = 1$ y $\phi_b = MF' = 50^\circ$

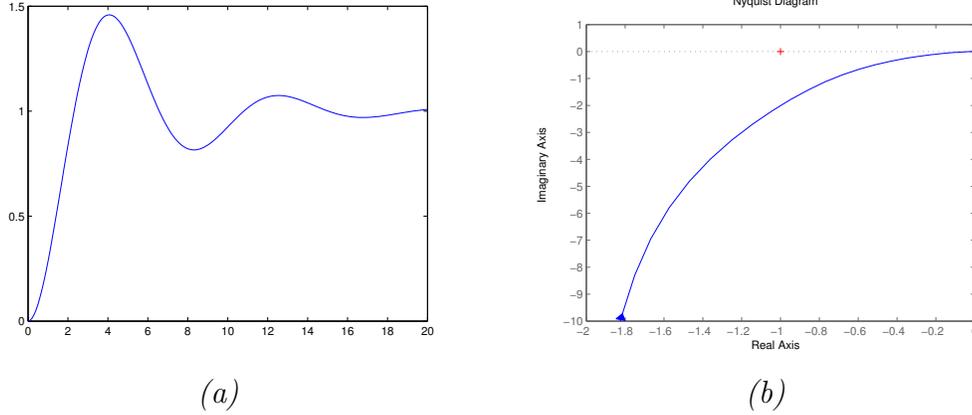


Figura 17: (a) Diagrama de Nyquist de la función de transferencia $G_c(s)G(s)$ y (b) repuesta en lazo cerrado a una entrada escalón unitario.

Definimos un controlador PID, tal que

$$K_p \left(1 + j\omega_0 \tau_d - j \frac{1}{\tau_i \omega_0} \right) = r_c \cos \phi_c + j r_c \sin \phi_c \quad (48)$$

$$\begin{cases} K_p = r_c \cos \phi_c \\ \tau_d = \alpha \tau_i \\ \tau_i = \frac{1}{2\omega_o \alpha} (tg \phi_c + \sqrt{4\alpha + tg^2 \phi_c}) \end{cases} \quad (49)$$

Definamos arbitrariamente $\alpha = 0.25$ ⁴. Sabemos que $r_c = r_b/r_a = 1$ y que $\phi_c = \phi_b - \phi_a = 50^\circ - 11^\circ = 39^\circ$. Por lo tanto, a través de la Ecuación 40 podemos calcular los parámetros del controlador, tal que:

$$\begin{cases} K_p = 0.78 \\ \tau_i = 5.26 \\ \tau_d = 1.31 \end{cases} \quad (50)$$

⁴Al igual que el segundo método de Ziegler-Niechols.

Observamos que la respuesta al escalón al conjunto de planta más controlador presenta una sobreelongación máxima de $M_p = 1.19$, un tiempo de establecimiento $t_s = 5.9s$. y error en régimen permanente nulo. Además, el Margen de Ganancia es $MG = \infty$ y el Margen de Fase $MF = 50^\circ$.