



LABORATORIO DE SISTEMAS DE CONTROL (M-906)

Diseño de controladores PID en el dominio de la frecuencia

Álvaro Gutiérrez Martín
Félix Monasterio-Huelin Maciá

Diseño de controladores

1.- Introducción:

Este ejercicio ofrece al alumno la posibilidad de analizar el diseño de controladores PID en el dominio de la frecuencia, a través de los diagramas de Nyquist.

Se pretende que al final del mismo el alumno realice un diseño de un controlador PID en posición y velocidad, atendiendo a diferentes parámetros establecidos.

2.- Aspectos teóricos

Tal y como se observó en la práctica 5, Ziegler-Nichols ofrece un diseño de controladores PID modificando los parámetros proporcional, integral y derivativo en base a una tabla establecida. Estos parámetros pueden ser interpretados desde el punto de vista del diagrama de Nyquist.

Observando el diagrama de Nyquist, las modificaciones de las variables K_p , T_i y T_d , implica un moviendo de la curva tal y como se observa en la figura 1:

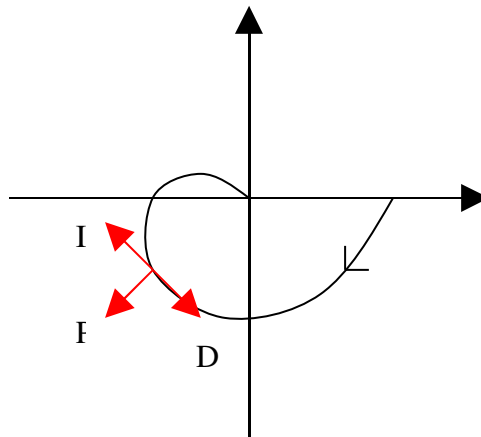


Figura 1: Implicaciones de los controladores P, I y D en el diagrama de Nyquist

Se puede observar que las modificaciones que se introduzcan mediante el controlador en el sistema, efectuarán un desplazamiento en el diagrama de Nyquist.

Partiendo del punto de corte con el eje real negativo, valor de $1/K_{cr}$ podremos observar las siguientes modificaciones efectuadas a través de los controladores diseñados por Ziegler-Nichols, en función de la tabla 1:

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	0	0
PI	$0.45K_{cr}$	$1/1.2 P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Figura 1: Tabla de parámetros de Ziegler-Nichols

Suponiendo el sistema realimentado de la figura 2:

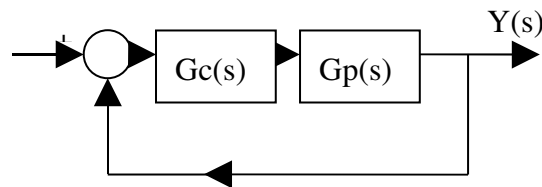


Figura 2: Sistema de control

Para un controlador PI, $K_p = 0.45K_{cr}$ y $T_i = 1/1.2 P_{cr}$. Si se obtiene la función de transferencia del controlador para la ω crítica, observamos que:

$$G_{PI}(j\omega_{cr}) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i j\omega_{cr}} \right), \quad (1)$$

donde al incluir los valores del método de Ziegler-Nichols, tenemos:

$$G_{PI}(j\omega_{cr}) = K_{cr}(0.45 - j0.08) \quad (2)$$

Por lo que observamos que el punto $(-1/K_{cr}, 0)$, se ha desplazado hasta el punto $-0.45 + j0.08$. Por lo que supone un retraso de fase ya que $\phi = -10.2^\circ$.

Para un controlador PID, se puede observar que:

$$G_{PID}(j\omega_{cr}) = K_{cr}(-0.6 - j0.28),$$

donde se obtiene un adelanto de $\phi = 25^\circ$.

Para realizar una generalización de este método, se puede definir lo siguiente:

Supóngase para una frecuencia ω_o , un punto de partida A, tal que:

$$G_p(j \omega_o) = A = r_a e^{j(\pi + \varphi_a)}$$

que se quiere que la acción del controlador le lleve a:

$$G_i(j \omega_o) = B = r_b e^{j(\pi + \varphi_b)}$$

Suponiendo la respuesta del controlador G_c como

$$G_c(j \omega_o) = C = r_c e^{j\varphi_c}$$

Se obtiene que:

$$r_b e^{j(\pi + \varphi_b)} = r_a r_c e^{j(\pi + \varphi_a + \varphi_c)}$$

Donde al identificar términos, se tiene que:

$$r_c = \frac{r_b}{r_a}$$

$$\varphi_c = \varphi_b - \varphi_a$$

Para un controlador PI, donde

$$G_{PI}(j\omega_{cr}) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i j\omega_o} \right) = r_c e^{j\varphi_c}, \text{ obtenemos que:}$$

$$K_p = \frac{r_b \cos(\varphi_b - \varphi_a)}{r_a} \quad (3)$$

$$T_i = \frac{1}{\omega_o \tan(\varphi_a - \varphi_b)} \quad (4)$$

donde se puede observar que $\varphi_a > \varphi_b$, para obtener un valor positivo de K_p y T_i , mostrando un retraso de fase.

Si se realizan las mismas operaciones para un controlador PID, se obtiene que:

$$K_p = \frac{r_b \cos(\varphi_b - \varphi_a)}{r_a} \quad (5)$$

$$\omega_o T_d - \frac{1}{\omega_o T_i} = tg(\varphi_b - \varphi_a) \quad (6)$$

En este caso sólo existe una ecuación para determinar los valores de Td y Ti, por lo que se debe especificar una condición adicional. Uno de los métodos más usados es establecer la relación Td=αTi, donde por ejemplo en el método Ziegler-Nichols se determina α=0.25, tal y como se puede observar en la tabla 1.

Si se establece en las ecuaciones (3), (4), (5) y (6), que el punto de partida es el paso del diagrama de Nyquist por el eje real negativo, donde ra=1/Kcr y φa=0, entonces se obtiene, para el PI:

$$K_p = K_{cr} * r_b \cos(\varphi_a) \quad (3')$$

$$T_i = -\frac{P_{cr}}{2\pi tg(\varphi_b)} \quad (4')$$

y para el PID

$$K_p = K_c * r_b \cos(\varphi_b) \quad (5')$$

$$\frac{2\pi}{P_{cr}} T_d - \frac{P_{cr}}{2\pi T_i} = tg(\varphi_b) \quad (6')$$

Se puede observar que existen mejores métodos de sintonización que el que impone Ziegler-Nichols. Por ejemplo Pessen sugiere acercarse al punto final -0.2 – 0.36j o -0.2 – 0.21j, correspondiendo a rb = 0.41 y φb=61° y rb=0.29 y φb=46° respectivamente.

3.- Diseño

3.1.- Control de posición mediante un PID.

Se pide realizar un controlador PID en velocidad, atendiendo a los parámetros analizados anteriormente. Para estudiar el comportamiento del mismo se debe hacer uso del diagrama de Nyquist y bode, así como la obtención de los parámetros de Margen de fase y de ganancia. Igualmente se debe ofrecer claramente el adelanto de fase obtenido,

y un estudio teórico y práctico de la señal error. Por último, en función del parámetro α que relaciona T_d con T_i , realizar una gráfica del error cuadrático medio:

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt ,$$

para conseguir obtener el parámetro α óptimo para el sistema.

3.2.- Control de velocidad mediante un PID.

Se pide realizar un controlador PID en posición, atendiendo a los parámetros analizados anteriormente. Para estudiar el comportamiento del mismo se debe hacer uso del diagrama de Nyquist y bode, así como la obtención de los parámetros de Margen de fase y de ganancia. Igualmente se debe ofrecer claramente el adelanto de fase obtenido, y un estudio teórico y práctico de la señal error. Por último, en función del parámetro α que relaciona T_d con T_i , realizar una gráfica del error cuadrático medio:

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

para conseguir obtener el parámetro α óptimo para el sistema.