

Ejemplo de sistema de control de dos grados de libertad.

Félix Monasterio-Huelin y Álvaro Gutiérrez

25 de abril de 2012

Índice

1. Introducción	3
2. Funciones de transferencia del motor.	3
3. Sistema de control de dos grados de libertad para un motor DC.	5
4. Funciones de transferencia de lazo cerrado.	7
5. Condiciones de estabilidad del sistema de control.	8
6. Condiciones del régimen permanente.	9
7. Elección de los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ según las especificaciones de régimen permanente.	12
7.1. Ejemplo de selección de los controladores.	16

8. Comentario sobre la técnica de asignación de ceros.	19
9. Comentario sobre la causalidad de los controladores.	20
10. Estudio de la respuesta de régimen transitorio.	21
10.1. Imposición de un polo de lazo cerrado p^H	24
10.2. Cálculo de los parámetros de diseño	26
11. Comentarios sobre el diseño.	31

Índice de figuras

1. Esquema de bloques de un motor DC. $G_w(s) = \frac{Ls + R}{k_m}$ y $G_u(s) = \frac{k_m}{s((Ls + R)(Js + B) + k_b k_m)}$	4
2. Sistema de control de dos grados de libertad para un motor DC.	6
3. Lugar de raíces generalizado (hay tres polos en el origen). . . .	23

Índice de Tablas

1. Datos de diseño.	30
-----------------------------	----

1. Introducción

A continuación se desarrolla un ejemplo de diseño de un sistema de control de posición para el motor DC estudiado en el documento “motor_dc.pdf”. Seguiremos la misma notación que en ese documento.

Este escrito está dirigido a los alumnos con el fin de que tengan a mano una metodología de diseño para el trabajo que deben realizar en el curso académico.

Por lo tanto en este escrito no se resuelven completamente todos los problemas de diseño planteados sino que debe servir de orientación para alcanzar los objetivos.

2. Funciones de transferencia del motor.

Podemos escribir la salida del motor (bajo condiciones iniciales nulas) en la forma

$$\Theta_m(s) = G_u(s)(U(s) + W(s)) \quad (2.1)$$

donde

$$G_u(s) = \frac{\Theta_u(s)}{U(s)} = \frac{k_m}{s((Ls + R)(Js + B) + k_b k_m)}$$
$$W(s) = -G_w(s)T_c(s) \quad (2.2)$$
$$G_w(s) = \frac{Ls + R}{k_m}$$

En la Figura 1 se muestra el esquema del motor en el que puede apreciarse que $\tau_c(t)$ puede ser interpretado como una señal de perturbación.

Podemos ver que los polos de ambas funciones de transferencia son los mismos: un polo en el origen $p_0 = 0$ y

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_m}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_m}\right)^2 - 4\frac{k_m k_b}{LJ}} \quad (2.3)$$

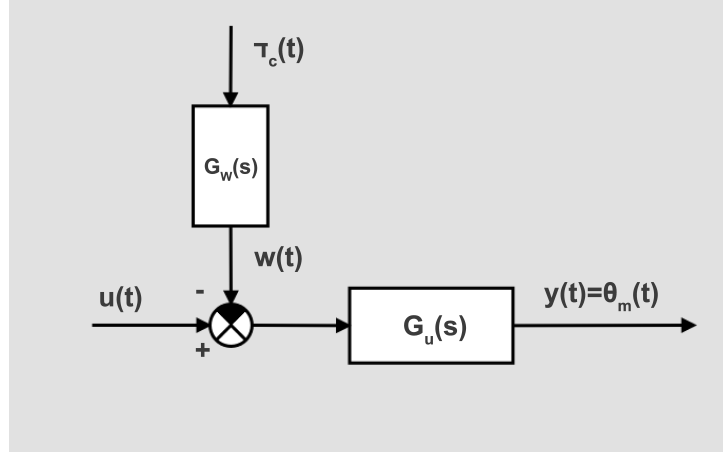


Figura 1: Esquema de bloques de un motor DC. $G_w(s) = \frac{Ls + R}{k_m}$ y $G_u(s) = \frac{k_m}{s((Ls + R)(Js + B) + k_b k_m)}$.

donde τ_e y τ_m son las constantes eléctrica y mecánica del motor respectivamente,

$$\tau_e = \frac{L}{R} \quad (2.4)$$

$$\tau_m = \frac{J}{B}$$

Consideremos que la carga está unida al eje del motor a través de un mecanismo reductor de factor de reducción $r \in (0, 1)$ y rendimiento $\eta \in (0, 1)$. Entonces la velocidad angular $\theta_L(t)$ y el par de la carga $\tau_L(t)$ a la salida del reductor estarán relacionados con $\theta_m(t)$ y $\tau_l(t)$ en el eje del motor (o entrada del reductor) según las siguientes expresiones:

$$\theta_L(t) = r\theta_m(t) \quad (2.5)$$

$$\tau_L(t) = \frac{\eta}{r}\tau_l(t) \quad (2.6)$$

Consideremos que la carga es un cuerpo rígido cuya ecuación dinámica puede ser expresada en la forma

$$\tau_L(t) = J_L \frac{d^2 \theta_L(t)}{dt^2} + \tau_g(t) \quad (2.7)$$

donde J_L es el momento de inercia de la carga y $\tau_g(t)$ es una función lineal dependiente de la posición angular $\theta_L(t)$ que representa los efectos gravitacionales.

Podemos expresar esta ecuación en términos de $\theta_m(t)$ y $\tau_l(t)$,

$$\tau_l(t) = \frac{r^2 J_L}{\eta} \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} + \frac{r}{\eta} \tau_g(t) \quad (2.8)$$

Incorporando la carga a la función de transferencia del motor podemos escribir

$$G'_u(s) = \frac{\Theta_u(s)}{U(s)} = \frac{k_m}{s((Ls + R)(J_{eff}s + B) + k_b k_m)} \quad (2.9)$$

donde J_{eff} se denomina momento de inercia eficaz,

$$\boxed{J_{eff} = J + \frac{r^2 J_L}{\eta}} \quad (2.10)$$

La señal de perturbación quedaría en la forma (ver documento “motor_dc.pdf”)

$$\boxed{\tau'_c(t) = \tau_{fS} + \tau_{fC} + \frac{r}{\eta} \tau_g(t)} \quad (2.11)$$

3. Sistema de control de dos grados de libertad para un motor DC.

En la Figura 2 se muestra el esquema de un sistema de control de dos grados de libertad para un motor DC con carga.

El objetivo será diseñar un sistema de control tal que se cumplan especificaciones de régimen permanente y de régimen transitorio.

Problema 3.1. *Diseñar un sistema de control de dos grados de libertad que permita:*

1. *Suprimir la señal de perturbación en el menor tiempo posible.*

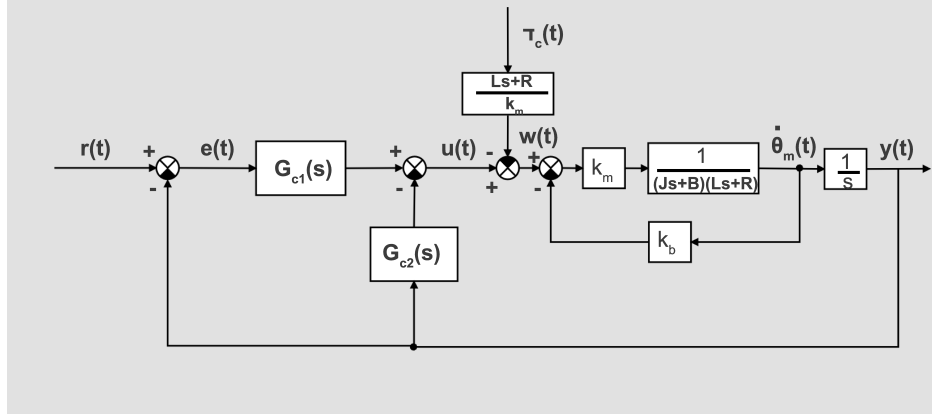


Figura 2: Sistema de control de dos grados de libertad para un motor DC.

2. Realizar un control de posición del motor que permita seguir un perfil trapezoidal de velocidad desde el arranque hasta la parada.

El problema de seguimiento exige que el error en régimen permanente al escalón, la rampa y la parábola sean nulos, pero puede permitirse que haya un error en régimen permanente a la señal polinómica de orden cuatro ($R(s) = \frac{1}{s^4}$) menor que un cierto valor $K_e^*(4)$. Exige también que pueda controlarse el tiempo de establecimiento t_s con una determinada tolerancia ν . Convendrá también diseñar el controlador de tal manera que la sobreelongación máxima M_p no supere un determinado valor.

Puesto que los polos del sistema de lazo cerrado serán los mismos para ambos problemas (supresión y seguimiento), la rapidez con que decaiga el efecto de la señal de perturbación en la salida estará relacionada con el tiempo de establecimiento. Sin embargo deberá analizarse detalladamente la respuesta a una señal de perturbación que se considerará constante en este estudio. Sabemos que esto no es cierto en la práctica ya que la perturbación es una señal dependiente de los fenómenos de fricción del motor, y estos no son lineales. En cierta forma solo estaremos considerando la supresión de los efectos gravitacionales debidos a la carga del motor.

Por otro lado la supresión de la señal de perturbación debe realizarse en cada tramo del perfil trapezoidal por lo que al pasar de un tramo a otro sus

efectos a la salida serían percibidos. El objetivo de supresión de la señal de perturbación debería ser tal que antes de que se pase al siguiente tramo su efecto sea insignificante.

Todas las especificaciones deberían satisfacerse en cada tramo del perfil trapezoidal. No obstante en este escrito no se resolverá el problema completo ya que el objetivo es presentar una metodología de diseño.

Tampoco se va a hacer aquí el estudio que sería necesario de la incorporación de condiciones iniciales no nulas. Es necesario porque se diseñará un sistema de control que funcione adecuadamente en cada tramo del perfil trapezoidal, pero el paso de uno a otro no se dará en la práctica bajo condiciones iniciales nulas.

4. Funciones de transferencia de lazo cerrado.

Expresaremos la función de transferencia del motor sin carga en la forma

$$G_u(s) = \frac{N_u(s)}{D_u(s)} = \frac{K_M}{sP_u(s)} \quad (4.1)$$

donde $P_u(s)$ es tal que $P_u(0) \neq 0$. Si se utiliza el modelo del motor simplificado escribiremos $P_u(s) = (s + p_M)$ y si se utiliza el modelo de tercer orden escribiremos $P_u(s) = (\tau_e s + 1)(s + p_M)$.

La señal de control o de salida del controlador para el sistema de control de la Figura 2 cumple que:

$$U(s) = G_{c1}(s)E(s) - G_{c2}(s)Y(s) \quad (4.2)$$

Llamaremos,

$$\boxed{F_1(s) = G_{c1}(s)} \quad (4.3)$$

$$\boxed{F_2(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s)}$$

De esta manera podemos expresar el controlador en la forma general de un sistema de control de dos grados de libertad:

$$U(s) = F_1(s)R(s) - F_2(s)Y(s) \quad (4.4)$$

La salida del sistema de control es:

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_w(s) = H_{yr}(s)R(s) + H_{yw}(s)W(s) \quad (4.5)$$

donde

$$\boxed{H_{yr}(s) = \frac{F_1(s)G_u(s)}{1 + F_2(s)G_u(s)}} \quad (4.6)$$

$$\boxed{H_{yw}(s) = \frac{G_u(s)}{1 + F_2(s)G_u(s)}}$$

son las funciones de transferencia de lazo cerrado en relación a $R(s)$ y $W(s)$ respectivamente.

Escribiremos las funciones de transferencia de los controladores genéricos en la forma de una función racional de dos polinomios en s :

$$F_1(s) = \frac{N_{F1}(s)}{D_{F1}(s)} \quad (4.7)$$

$$F_2(s) = \frac{N_{F2}(s)}{D_{F2}(s)}$$

donde los polinomios de numerador y denominador son coprimos (no tienen factores comunes).

Para que los polos en lazo cerrado de $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$ sean los mismos consideraremos que

$$\boxed{D_{F2} = D_{F1}(s)D'_{F2}(s)} \quad (4.8)$$

donde $D'_{F2}(s)$ es algún polinomio en s . Esta condición no es imprescindible pero la impondremos en este estudio salvo que sea imposible admitirla.

5. Condiciones de estabilidad del sistema de control.

Para que el sistema de control sea estable debe elegirse $F_2(s)$ de tal manera que el polinomio característico $P(s)$ sea estable en el sentido de Hurwitz,

$$P(s) = D_{F2}(s)D_u(s) + N_{F2}(s)N_u(s) \quad (5.1)$$

Para el motor

$$\boxed{P(s) = sD_{F2}(s)P_u(s) + K_M N_{F2}(s)} \quad (5.2)$$

Podemos comprobar que

$$P(0) = K_M N_{F2}(0) \quad (5.3)$$

6. Condiciones del régimen permanente.

1. Estudio del problema de supresión de la señal de perturbación.

La forma de las funciones de transferencia de lazo cerrado sugiere que los controladores sean diseñados de tal manera que el controlador $F_2(s)$ sea el responsable de suprimir la señal de perturbación, ya que $H_{yw}(s)$ solo depende de $F_2(s)$.

Si la señal de perturbación es constante de valor w , entonces $F_2(s)$ deberá tener al menos un polo en el origen. De esta manera $y_w(\infty) = 0$. Podemos comprobar que esto es así aplicando el teorema del valor final a $y_w(t)$,

$$y_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{yw}(s) W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{N_u(s) D_{F2}(s)}{P(s)} W(s) \quad (6.1)$$

Si $F_2(s)$ tiene al menos un polo en el origen, y de acuerdo con 5.3,

$$P(0) \neq 0 \quad (6.2)$$

ya que $N_{F2}(s)$ y $D_{F2}(s)$ son coprimos. De aquí que

$$y_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_M D_{F2}(s)}{P(s)} \frac{w}{s} = \frac{K_M w}{P(0)} \lim_{s \rightarrow 0} D_{F2}(s) \quad (6.3)$$

Teniendo en cuenta que $P(0)$ viene dado por 5.3, $y_w(\infty)$ para una señal de perturbación constante satisface la relación

$$\boxed{y_w(\infty) = \frac{w}{G_{F2}(0)}} \quad (6.4)$$

La señal de perturbación que estamos considerando no tiene por qué ser constante. Se obtendrá el mismo resultado si

$$\boxed{W(s) = \frac{w\tilde{W}(s)}{s}} \quad (6.5)$$

donde $\tilde{W}(s)$ es un polinomio tal que $\tilde{W}(0) = 1$. En el caso del motor

$$W(s) = -\frac{Ls + R}{k_m} T'_c(s) \quad (6.6)$$

por lo que la suposición que estamos haciendo es que el par $\tau'_c(t)$ sea constante. En este caso

$$\boxed{w = -\frac{\tau'_c R}{k_m}} \quad (6.7)$$

En resumen, $F_2(s)$ **debe tener al menos un polo en el origen, y** $P(0) \neq 0$.

2. Estudio del problema de seguimiento de la señal de referencia.

La señal de error es

$$e(t) = r(t) - y(t) = e_r(t) - e_w(t) \quad (6.8)$$

donde $e_r(t) = r(t) - y_r(t)$ y $e_w(t) = y_w(t)$, por lo que si $y_w(\infty) = 0$ el error en régimen permanente dependerá exclusivamente de la componente $e_r(t)$.

La función de transferencia de la componente del error $e_r(t)$ es

$$H_{er}(s) = \frac{N_e(s)}{D_e(s)} = 1 - H_{yr}(s) = \frac{P(s) - N_u(s)N_{F1}(s)D'_{F2}(s)}{P(s)} \quad (6.9)$$

La expresión de la componente del error $e_r(t)$ en régimen permanente tendrá la forma

$$e_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{P(s) - N_u(s)N_{F1}(s)D'_{F2}(s)}{P(s)} R(s) \quad (6.10)$$

o

$$e_r(\infty) = \frac{1}{P(0)} \lim_{s \rightarrow 0} s(P(s) - K_M N_{F1}(s)D'_{F2}(s)) R(s) \quad (6.11)$$

Puesto que se desea que el error en régimen permanente al escalón, la rampa y la parábola sean nulos, entonces se deberá cumplir que

$$\boxed{N_e(s) = P(s) - K_M N_{F1}(s) D'_{F2}(s) = s^3 N'_e(s)} \quad (6.12)$$

donde $N'_e(s)$ debe ser algún polinomio tal que $N'_e(0) \neq 0$. En general $N'_e(0)$ puede ser nulo, pero la especificación de que el error en régimen permanente a la señal de referencia de orden cuatro sea menor que la constante $K_e^*(4)$ nos permite imponer la condición de que $N'_e(0) \neq 0$ si admitimos que $y_w(\infty) = 0$.

De esta manera se cumple que para la señal de referencia de orden cuatro,

$$\boxed{K_e(4) = \frac{N'_e(0)}{K_M N_{F2}(0)} < K_e^*(4)} \quad (6.13)$$

Puesto que $P(0) = K_M N_{F2}(0)$ se deberá cumplir que

$$\boxed{N_{F1}(0) D'_{F2}(0) = N_{F2}(0) \neq 0} \quad (6.14)$$

Por lo tanto $F_1(s)$ no puede tener un cero en el origen y $D'_{F2}(0) \neq 0$.

Puesto que hemos impuesto la condición 4.8, es decir que $D_{F2}(s) = D_{F1}(s) D'_{F2}(s)$, y que se satisface la especificación de régimen permanente para $y_w(t)$, o equivalentemente que $F_2(s)$ tiene al menos un polo en el origen ($D_{F2}(0) = 0$), podemos concluir que $F_1(s)$ deberá tener al menos un polo en el origen ($D_{F1}(0) = 0$).

Escribiremos $D_{F1}(s)$ en la forma

$$D_{F1}(s) = s D'_{F1}(s) \quad (6.15)$$

donde $D'_{F1}(s)$ es algún polinomio en s .

De aquí que

$$D_{F2}(s) = s D'_{F1}(s) D'_{F2}(s) \quad (6.16)$$

donde $D'_{F2}(0) \neq 0$.

En resumen, $F_1(s)$ **debe tener al menos un polo en el origen y** $D'_{F2}(0) \neq 0$.

7. Elección de los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ según las especificaciones de régimen permanente.

Pretendemos diseñar los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ de tal manera que sean estables, causales, de fase mínima (ceros estables) y de orden mínimo n_{c1} y n_{c2} respectivamente. También sería deseable que estos controladores tuviesen el máximo grado relativo para que el número de parámetros de diseño fuese mínimo.

Teniendo en cuenta que $F_2(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$ y que $G_{c1}(s) = F_1(s)$, podemos comprobar que G_{c2} tiene la forma

$$G_{c2}(s) = \frac{N_{F2}(s) - N_{F1}(s)D'_{F2}(s)}{D_{F2}(s)} \quad (7.1)$$

Los polos de $G_{c2}(s)$ serán los de $F_2(s)$ salvo que haya cancelaciones, posibilidad que debe contemplarse de manera general, ya que tanto $F_1(s)$ como $F_2(s)$ no son propiamente controladores físicos, sino que se han introducido para hacer el estudio matemático de diseño. Las cancelaciones no son físicas sino matemáticas.

Escribiremos

$$N_{c2}(s) = N_{F2}(s) - N_{F1}(s)D'_{F2}(s) \quad (7.2)$$

Substituyendo $P(s)$ dado por 5.1 en la ecuación 6.12, obtenemos la relación

$$s^3 N'_e(s) = s^2 P_u(s) D'_{F1}(s) D'_{F2}(s) + K_M N_{c2}(s) \quad (7.3)$$

donde $N_{c2}(s)$ es el numerador del controlador $G_{c2}(s)$ dado por la expresión 7.2.

Podemos ver que $N_{c2}(0) = 0$, es decir que G_{c2} deberá tener al menos un cero en el origen.

Los polos de $G_{c1}(s)$ son los polos de $F_1(s)$, pero los polos de $G_{c2}(s)$ no tienen por qué ser los de $F_2(s)$ ya que como se ha comentado puede producirse alguna cancelación matemática. De hecho como G_{c2} debe tener al menos un cero en el origen y $F_2(s)$ al menos un polo en el origen entonces necesariamente deberán

cancelarse algunos. En consecuencia $G_{c2}(s)$ **deberá tener al menos dos ceros en el origen** para que después de la cancelación siga teniendo al menos uno.

Por lo tanto, podremos escribir

$$\boxed{N_{c2}(s) = s^2 N'_{c2}(s)} \quad (7.4)$$

donde $N'_{c2}(s)$ es algún polinomio en s .

Teniendo en cuenta que se debe cumplir la condición de régimen permanente para $e_r(t)$ dada por 7.3, entonces para el motor,

$$sN'_e(s) = P_u(s)D'_{F1}(s)D'_{F2}(s) + K_M N'_{c2}(s) \quad (7.5)$$

por lo que

$$K_M N'_{c2}(0) = -p_M D'_{F1}(0)D'_{F2}(0) \quad (7.6)$$

Puesto que también deseamos que los ceros de los controladores sean estables (sin considerar los del origen), entonces todos sus coeficientes deben ser necesariamente positivos. Si se hiciese $D'_{F2}(0) < 0$, entonces $F_2(s)$ sería inestable. En principio no hay ningún problema con que $F_2(s)$ sea inestable ya que $F_2(s)$ es un controlador matemático, pero los polos inestables deberán ser cancelados matemáticamente para que $G_{c2}(s)$ sea estable. En cualquier caso aunque haya cancelaciones de los polos inestables de $F_2(s)$ habría ceros inestables en la función de transferencia del error $H_{er}(s)$ ya que serían raíces de la ecuación $N'_e(s) = 0$, según puede observarse de la relación 7.5 al sacar factor común las raíces comunes de $D'_{F2}(s)$ y $N'_{c2}(s)$. Este hecho debe evitarse. Para ello podemos seguir dos métodos.

1. Consideración de que $N'_{c2}(0) < 0$. Esto es posible siempre que todos los coeficientes de $N_{c2}(s)$ sean negativos de tal manera que sacando factor común -1 se garantice que los ceros de $G_{c2}(s)$ sean estables. Escibiremos

$$N'_{c2}(s) = -\tilde{N}'_{c2}(s) \quad (7.7)$$

donde $\tilde{N}'_{c2}(s)$ es un polinomio de coeficientes positivos tal que $\tilde{N}'_{c2}(0) \neq 0$.

Para este método:

$$sN'_e(s) = P_u(s)D'_{F1}(s)D'_{F2}(s) - K_M \tilde{N}'_{c2}(s) \quad (7.8)$$

Deberá cumplirse que para el motor

$$K_M \tilde{N}'_{c2}(0) = p_M D'_{F1}(0) D'_{F2}(0) \quad (7.9)$$

Pero como $N'_e(0) \neq 0$ no deberá cancelarse el término del monomio en s de $Z(s) = P_u(s) D'_{F1}(s) D'_{F2}(s) - K_M \tilde{N}'_{c2}(s)$. Es decir que $Z(s) = s Z'(s)$, para algún polinomio $Z'(s)$ tal que $Z'(0) \neq 0$. De hecho $Z'(0) = N'_e(0)$.

En este caso los controladores tendrían la forma

$$G_{c1}(s) = \frac{N_{F1}(s)}{s D'_{F1}(s)} \quad (7.10)$$

$$G_{c2}(s) = -\frac{s \tilde{N}'_{c2}(s)}{D'_{F1}(s) D'_{F2}(s)}$$

donde $D'_{F2}(0) \neq 0$, $D'_{F1}(0) \neq 0$, $\tilde{N}'_{c2}(0) \neq 0$ y $N_{F1}(0) \neq 0$.

Si se hiciese $D'_{F1}(0) = 0$ estaríamos siguiendo el segundo método.

2. Aumentar el tipo (número de polos en el origen) del controlador $F_1(s) = G_{c1}(s)$. Puede hacerse

$$\begin{aligned} D'_{F1}(s) &= s D''_{F1}(s) \\ N'_{c2}(s) &= s N''_{c2}(s) \end{aligned} \quad (7.11)$$

donde $D''_{F1}(s)$ y $N''_{c2}(s)$ son polinomios en s .

De aquí que

$$N'_e(s) = P_u(s) D''_{F1}(s) D'_{F2}(s) + K_M N''_{c2}(s) \quad (7.12)$$

que para $s = 0$ queda en la forma

$$N'_e(0) = p_M D''_{F1}(0) D'_{F2}(0) + K_M N''_{c2}(0) \quad (7.13)$$

Sabemos que $N'_e(0) \neq 0$ debido a que estamos imponiendo que la constante de error $K_e^*(4) \neq 0$.

Entonces la especificación de régimen permanente quedará expresada en la forma

$$K_e(4) = \frac{p_M D''_{F1}(0) D'_{F2}(0) + K_M N''_{c2}(0)}{K_M N_{F2}(0)} \quad (7.14)$$

En este caso los controladores tendrían la forma

$$\boxed{G_{c1}(s) = \frac{N_{F1}(s)}{s^2 D_{F1}''(s)}} \quad (7.15)$$

$$\boxed{G_{c2}(s) = \frac{s N_{c2}''(s)}{D_{F1}''(s) D_{F2}'(s)}}$$

donde $D_{F2}'(0) \neq 0$ y $N_{F1}'(0) \neq 0$ (ya que $F_1(s)$ debe tener un polo en el origen y $D_{F1}(s)$ y $N_{F1}(s)$ son coprimos).

Puesto que $G_{c2}(s)$ debe tener al menos un cero en el origen debe ocurrir que si $D_{F1}''(0) = 0$ también sea $N_{c2}''(0) = 0$, por lo que $N_e'(0) = 0$ lo que no admitimos. Por lo tanto, también debe ocurrir que $D_{F1}''(0) \neq 0$ y $N_{c2}''(0) \neq 0$.

Ambos métodos permiten seleccionar el orden de los controladores, y en general el número de parámetros de diseño. Pero con el segundo se realiza un diseño del controlador $G_{c1}(s)$ de tipo dos, mientras que con el primero es de tipo uno. En cualquiera de los casos debe tenerse en cuenta que la elección de los polinomios no puede ser arbitraria, ya que deben cumplirse las relaciones 7.8 para el primer método y 7.12 para el segundo método, además de la ecuación del numerador de $G_{c2}(s)$:

$$\text{primer método: } \begin{cases} s^2 N_{c2}'(s) = N_{F2}(s) - N_{F1}(s) D_{F2}'(s) \\ s N_e'(s) = P_u(s) D_{F1}'(s) D_{F2}'(s) - K_M \tilde{N}_{c2}'(s) \end{cases} \quad (7.16)$$

$$\text{segundo método: } \begin{cases} s^3 N_{c2}''(s) = N_{F2}(s) - N_{F1}(s) D_{F2}'(s) \\ N_e'(s) = P_u(s) D_{F1}''(s) D_{F2}'(s) + K_M N_{c2}''(s) \end{cases} \quad (7.17)$$

Vamos a terminar este apartado con un diseño que satisface las especificaciones de régimen permanente siguiendo el primer método, de tal manera que el orden de los controladores sea mínimo.

7.1. Ejemplo de selección de los controladores.

Podemos hacer la siguiente elección:

$$\boxed{\begin{aligned} N_{F1}(s) &= K_{F1}(s + a) \\ D'_{F1}(s) &= 1 \\ N_{F2}(s) &= K_{F2}(s + b) \\ D'_{F2}(s) &= s + c \end{aligned}} \quad (7.18)$$

lo que supone que

$$\begin{aligned} F_1(s) &= K_{F1} \frac{s + a}{s} \\ F_2(s) &= K_{F2} \frac{s + b}{s(s + c)} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Teniendo en cuenta la primera ecuación de 7.16 se debe cumplir que

$$s^2 N'_{c2}(s) = K_{F2}(s + b) - K_{F1}(s + a)(s + c) \quad (7.20)$$

y de aquí¹

$$\begin{aligned} K_{F2} &= K_{F1}(a + c) \\ b &= \frac{ac}{a + c} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Por lo tanto

$$N'_{c2}(s) = -K_{F1} \quad (7.22)$$

Teniendo en cuenta la segunda ecuación de 7.16 se debe cumplir que

$$sN'_e(s) = P_u(s)(s + c) - K_M K_{F1} \quad (7.23)$$

¹Si se eligiese $b = p_M$ se realizaría una cancelación física del cero de $F_2(s)$ con el polo del motor $G_u(s)$. Esto supone que a y b estarán relacionados, por lo que el número de parámetros de diseño se reduce. En la práctica las cancelaciones físicas exactas son imposibles. En cualquier caso lo que supone que $b = p_M$ es que puede sacarse un factor común $(s + b)$ del polinomio característico de la función de transferencia de lazo cerrado, lo que significa que el sistema en lazo cerrado tendrá un polo en $s = -p_M$. Si este polo es de respuesta lenta entonces el decaimiento o respuesta transitoria de la señal de perturbación será lenta.

y de aquí que para el motor

$$K_{F1} = \frac{p_M c}{K_M} \quad (7.24)$$

Por lo tanto

$$N'_e = s + (p_M + c) \quad (7.25)$$

Como vemos el sistema de control ha quedado reducido al problema de sintonización de dos parámetros (a, c) . Los controladores tendrían la forma²

$$G_{c1}(s) = \frac{p_M c}{K_M} \frac{s + a}{s} \quad (7.26)$$

$$G_{c2}(s) = -\frac{p_M c}{K_M} \frac{s}{s + c}$$

Por otro lado también se debe satisfacer la condición 6.13:

$$K_e(4) = \frac{p_M + c}{p_M a c^2} < K_e^*(4) \quad (7.27)$$

Las funciones de transferencia de lazo cerrado dadas por 4.6 para el motor con el modelo simplificado quedarán en la forma

$$H_{yr}(s) = \frac{p_M c (s + a)(s + c)}{s^4 + (p_M + c)s^3 + p_M c s^2 + p_M c (a + c)s + p_M a c^2} \quad (7.28)$$

$$H_{yw}(s) = \frac{K_M s (s + c)}{s^4 + (p_M + c)s^3 + p_M c s^2 + p_M c (a + c)s + p_M a c^2}$$

La función de transferencia del error será

$$H_{er}(s) = \frac{s^3 (s + p_M + c)}{s^4 + (p_M + c)s^3 + p_M c s^2 + p_M c (a + c)s + p_M a c^2} \quad (7.29)$$

²Si se hubiese hecho $D'_{F2}(s) = 1$ con el fin de disminuir el orden de $F_2(s)$ entonces $sN'_e(s) = P_u(s) - K_M \tilde{N}'_{c2}(s)$ lo que parece ser una solución válida. Pero también debe cumplirse que $s^2 N'_{c2}(s) = K_{F1}(s + b) - K_{F2}(s + a)$ que no tiene ninguna solución para $N'_{c2}(s)$. Por la misma razón tampoco podría haberse escogido $D'_{F1}(s) = s + c$ y $D'_{F2}(s) = 1$. Cualquier otra solución que satisfaga las relaciones 7.16 aumentaría el orden de los controladores ya que estamos imponiendo la condición de que sean causales. Este comentario debe servir para saber cómo debe modificarse el diseño que estamos haciendo si se impusiese una colección de especificaciones de diseño que exigiese elevar el orden de los controladores.

Podemos observar que el numerador de $H_{yr}(s)$ coincide con la parte del polinomio característico de grado inferior al tercero. Esto significa que indirectamente hemos aplicado la técnica llamada de **asignación de ceros**.

Por último este estudio no puede quedar finalizado sin investigar la **estabilidad del sistema de lazo cerrado**. Para ello puede utilizarse el test de Routh teniendo en cuenta que el polinomio característico es:

$$P(s) = s^4 + (p_M + c)s^3 + p_M c s^2 + p_M c(a + c)s + p_M a c^2 \quad (7.30)$$

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^4 : \left\| \begin{array}{cc} 1 & p_M c & p_M a c^2 \\ p_M + c & p_M c(a + c) & \end{array} \right. \\ s^3 : \left\| \begin{array}{cc} x & p_M a c^2 \\ y & 0 \end{array} \right. \\ s^2 : \left\| \begin{array}{cc} y & 0 \\ p_M a c^2 & \end{array} \right. \\ s^1 : \left\| \begin{array}{cc} p_M a c^2 & \end{array} \right. \\ s^0 : \left\| \begin{array}{cc} p_M a c^2 & \end{array} \right. \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_M c(p_M - a)}{p_M + c} \\ y &= p_M c \left[a + c - \frac{a(p_M + c)^2}{p_M(p_M - a)} \right] \end{aligned} \quad (7.31)$$

Para que el sistema de lazo cerrado sea estable se deberá cumplir que $x > 0$ e $y > 0$ ya que hemos impuesto que $a > 0$ y $c > 0$. Además el polo del motor es estable, es decir que $p_M > 0$.

Puede verse que al ser $c > 0$ e imponiendo que $a < p_M$ (para que $x > 0$), entonces

$$y > p_M c \left[a + c - \frac{a p_M}{p_M - a} \right] = p_M c \left[c - \frac{a^2}{p_M - a} \right]$$

Por lo tanto, una **condición suficiente para que el sistema en lazo cerrado sea estable** es que se cumplan simultáneamente las siguientes relaciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < a < p_M \\ c > \frac{a^2}{p_M - a} \end{array}} \quad (7.32)$$

Puede comprobarse que $\frac{a^2}{p_M - a} < p_M$ sii $a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} p_M$.

También puede comprobarse que $\frac{a^2}{p_M - a} < a$ si $a < \frac{p_M}{2}$.

Puede comprobarse que no puede haber cortes con el eje imaginario salvo que $y = 0$, puesto que para que existan estos puntos de corte es necesario que se anule alguna fila impar de la Tabla de Routh. Para hacer este estudio construimos el polinomio auxiliar $Q(s) = xs^2 + p_M ac^2$ substituyendo la fila nula por los coeficientes de $dQ(s)/ds = 2xs$. Si $x > 0$, la primera columna será positiva (en este caso $y = 0$) y por lo tanto el polinomio será estable.

8. Comentario sobre la técnica de asignación de ceros.

No es necesario utilizar la técnica de asignación de ceros para lograr satisfacer la especificación de régimen permanente. Lo que debe ser evidente es que para satisfacer esta especificación se debe lograr expresar el polinomio del numerador de la función de transferencia del error $H_e(s)$ en la forma $N_e(s) = s^3 N'_e(s)$, donde $N'_e(s)$ es un polinomio tal que $N'_e(0) \neq 0$.

Veamos un ejemplo arbitrario.

Supongamos que el polinomio característico es

$$P(s) = s^3 + (2 + 3\alpha_1)s^2 + 6a_2s + 3a_3$$

donde (α_1, a_2, a_3) son parámetros de diseño (y $P(s)$ es estable).

Supongamos que se desea que el error de régimen permanente al escalón y a la rampa sean nulos, es decir que deseamos lograr que $N_e(s) = s^2 N'_e(s)$.

Con la técnica de asignación de ceros se escogería el polinomio del numerador $N^H(s)$ de la función de transferencia de lazo cerrado $H(s)$,

$$N^H(s) = 6a_2s + 3a_3$$

entonces

$$N_e(s) = s^2(s + (2 + 3\alpha_1))$$

Pero otra técnica podría escoger otro polinomio, como por ejemplo

$$N^H(s) = 3\alpha_1 s^2 + 6a_2 s + 3a_3$$

entonces

$$N_e(s) = s^2(s + 2)$$

En ambos casos se satisface la especificación de régimen permanente.

Podemos ver que con la técnica de asignación de ceros se estaría seleccionando un controlador tal que el número de ceros de la función de transferencia de lazo cerrado es mínimo.

9. Comentario sobre la causalidad de los controladores.

En la práctica deben diseñarse controladores que sean causales y por lo tanto realizables. Si embargo esto depende en parte de los sensores que se utilicen.

En el caso del motor si se dispone de sensores de posición y de velocidad entonces puede realizarse una realimentación de dos salidas $\theta_m(t)$ y $\dot{\theta}_m(t)$. En este caso puede diseñarse un controlador del lazo paralelo $G_{c2}(s)$ que no sea causal. Veamos como.

Supongamos que el numerador $N_{c2}(s)$ de $G_{c2}(s)$ puede escribirse en la forma

$$N_{c2}(s) = sN_{21}(s) + N_{22}(s) \quad (9.1)$$

donde $N_{21}(s)$ y $N_{22}(s)$ son polinomios tales que sus grados sean menores que el orden de $G_{c2}(s)$. Entonces

$$G_{c2}(s) = sG_{21}(s) + G_{22}(s) \quad (9.2)$$

donde $G_{21}(s)$ y $G_{22}(s)$ son causales.

La salida de control de $G_{c2}(s)$ será

$$U_2(s) = G_{21}(s)\mathcal{L}\{\dot{\theta}_m(t)\} + G_{22}(s)\mathcal{L}\{\theta_m(t)\} \quad (9.3)$$

que como se aprecia es necesario que se disponga de sensores de posición y velocidad.

Algo similar puede decirse del controlador $G_{c1}(s)$ siempre que además de los dos sensores se disponga de la entrada de referencia $r(t)$ y $\dot{r}(t)$. De esta manera

$$G_{c1}(s) = sG_{11}(s) + G_{12}(s) \quad (9.4)$$

donde $G_{11}(s)$ y $G_{12}(s)$ son causales.

La salida de control de $G_{c1}(s)$ será

$$U_1(s) = G_{11}(s)\mathcal{L}\{\dot{e}(t)\} + G_{12}(s)\mathcal{L}\{e(t)\} \quad (9.5)$$

donde $e(t) = r(t) - \theta_m(t)$ y $\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{\theta}_m(t)$.

Se deja como ejercicio comprobar que si se dispone de dos sensores los controladores pueden ser más simples, además de que puede reducirse el orden de la función de transferencia de lazo cerrado.

10. Estudio de la respuesta de régimen transitorio.

Hemos realizado un estudio en el que es posible diseñar unos controladores que satisfagan especificaciones de régimen permanente pero no hay ninguna garantía de que tales controladores satisfagan a su vez especificaciones de régimen transitorio. Hemos visto que el número de parámetros de diseño de los controladores es dos (a, c) que además están ligados por un conjunto de restricciones de desigualdad.

La función de transferencia de lazo cerrado $H_{yr}(s)$ tiene la forma

$$H_{yr}(s) = \frac{p_M c(s+a)(s+c)}{s^4 + (p_M + c)s^3 + p_M c s^2 + p_M c(a+c)s + p_M a c^2} \quad (10.1)$$

y la función de transferencia de lazo cerrado $H_{yw}(s)$,

$$H_{yw}(s) = \frac{K_M s(s+c)}{s^4 + (p_M + c)s^3 + p_M c s^2 + p_M c(a+c)s + p_M a c^2} \quad (10.2)$$

La función de transferencia $H_{yr}(s)$ puede ser escrita en la forma

$$H_{yr}(s) = \frac{KG'(s)}{1 + KG'(s)} \quad (10.3)$$

donde $K = p_M c$ y

$$G'(s) = \frac{(s+a)(s+c)}{s^3(s+p_M+c)} \quad (10.4)$$

Puede hacerse una representación del lugar de raíces generalizado. Para ello haremos la suposición de que no hay puntos de ruptura (excepto en el origen), aunque como es de esperar siempre podrá haber (el del origen se corresponde con polos de lazo cerrado de orden de multiplicidad tres, aunque se trata del caso en que $K = 0$, y por lo tanto $c = 0$). Esta suposición simplifica el análisis que vamos a hacer.

Pueden calcularse las dos asíntotas (el orden relativo de $G'(s)$ es dos) y el centro asíntótico σ_A ,

$$\sigma_A = -\frac{p_M - a}{2} \quad (10.5)$$

Las asíntotas forman un ángulo ϕ_A con el eje real,

$$\phi_A \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \quad (10.6)$$

De acuerdo con el estudio de régimen permanente escogeremos un valor $a < p_M$ y $c > \frac{a^2}{p_M - a}$.

En la Figura 3 se muestra un posible lugar de raíces para este problema. Supondremos que hay dos ramas reales en $[-a, 0]$ y $[-(p_M + c), -c]$, aunque realmente podría ser $c < a$ sin alterar los resultados del análisis.

Puesto que $K = p_M c$ podemos observar que el cero en $-c$ y el polo en $-(p_M + c)$ se alejan hacia la izquierda del plano complejo conforme K aumenta, por lo que el polo de lazo cerrado de esta rama real será poco significativo en la respuesta transitoria.

Sin embargo si el cero en $-a$ está muy próximo al origen, habrá un polo real en lazo cerrado muy dominante, debido a la otra rama real del lugar de raíces. Esto implica que la respuesta transitoria debida a la contribución de este polo será lenta. Además un polo muy próximo al origen puede hacerse

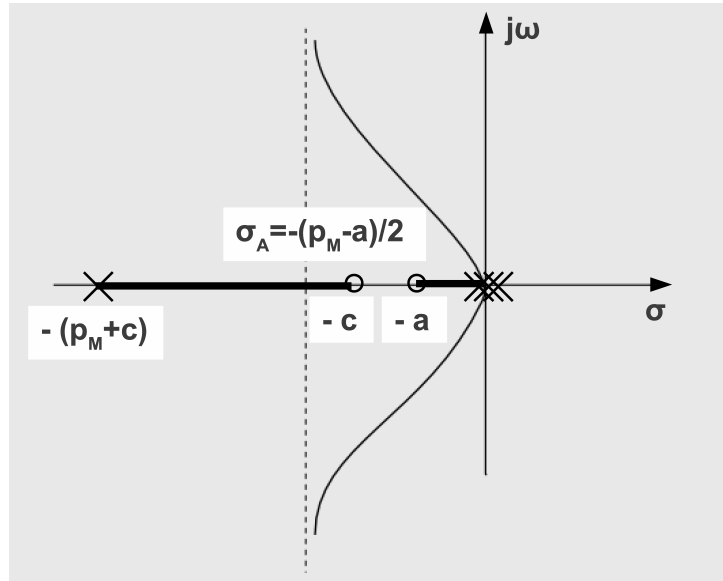


Figura 3: Lugar de raíces generalizado (hay tres polos en el origen).

inestable ante factores no contemplados en el diseño. Por lo tanto probablemente deba rehacerse completamente el diseño de los controladores. Más adelante veremos un ejemplo numérico.

Una consecuencia práctica de estos comentarios es que para el diseño de los controladores debe seguirse un procedimiento que tenga en cuenta simultáneamente las especificaciones de régimen permanente y de régimen transitorio. Antes de seleccionar los polinomios como hemos hecho en el estudio de régimen permanente deben analizarse algunas características del régimen transitorio. Una de ellas es la ubicación (cualitativa) de los polos de lazo cerrado. Otra muy importante es disponer de parámetros de diseño suficientes como para imponer todas las especificaciones de diseño. Para esto último puede hacerse un estudio de los grados de los polinomios implicados. En este sentido habíamos hecho un diseño del que tan solo disponíamos de dos parámetros de diseño (a, c). Pero como el polinomio característico es de orden cuatro es imposible imponer un valor a todos los polos de lazo cerrado. Como máximo serán dos polos reales o dos complejos conjugados. Si se impusiese un polo dominante complejo conjugado, los valores de a y c quedarán fijados.

A continuación obtendremos unas ecuaciones que permiten calcular de manera sencilla los parámetros (a, b) imponiendo valores aproximados de la sobreelongación máxima M_p y del tiempo de establecimiento t_s , a la vez que se garantiza la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

10.1. Imposición de un polo de lazo cerrado p^H .

Supongamos que deseamos que el sistema de control tenga un polo de lazo cerrado

$$p^H = -\sigma^H + j\omega^H \quad (10.7)$$

y su conjugado, siendo el polo del motor $-p_M$ muy pequeño,

$$p_M > p_M^* \gg \sigma^H \quad (10.8)$$

El polinomio característico es

$$P(s) = s^4 + (p_M + c)s^3 + p_M cs^2 + p_M c(a + c)s + p_M ac^2 \quad (10.9)$$

Este polinomio deberá tener la forma

$$P(s) = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \left((s + \sigma^H)^2 + (\omega^H)^2 \right) \quad (10.10)$$

donde $-\alpha_1$ y $-\alpha_2$ serán los polos reales de lazo cerrado.

Identificando términos del mismo grado de $P(s)$ obtenemos cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\sigma^H &= c + p_M \\ \alpha_1\alpha_2 + 2\sigma^H(\alpha_1 + \alpha_2) + ((\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2) &= p_M c \\ 2\sigma^H\alpha_1\alpha_2 + ((\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2)(\alpha_1 + \alpha_2) &= p_M c(a + c) \\ ((\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2)\alpha_1\alpha_2 &= p_M ac^2 \end{aligned} \quad (10.11)$$

Substituyendo $\alpha_1\alpha_2$ de la cuarta ecuación en la segunda y en la tercera,

tendremos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 &= c + p_M - a_3 \\
\alpha_1 + \alpha_2 &= p_M c \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_3 a_4} a c \right) - \frac{a_4}{a_3} \\
\alpha_1 + \alpha_2 &= p_M c \left(a + c - \frac{a_3}{a_4} a c \right) \frac{1}{a_4} \\
\alpha_1 \alpha_2 &= p_M c \frac{1}{a_4} a c
\end{aligned} \tag{10.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2\sigma^H \\
a_4 &= (\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2
\end{aligned} \tag{10.13}$$

Utilizando la primera y cuarta ecuaciones podemos observar que los polos reales en lazo cerrado deben seguir la ecuación cuadrática,

$$\alpha^2 - (p_M + c - a_3)\alpha + \frac{p_M a c^2}{a_4} = 0 \tag{10.14}$$

Al resolverla nos damos cuenta de que es posible lograr que $\alpha_1 \approx p_M + c$ y $\alpha_2 \approx 0$ bajo ciertas condiciones en los valores de los diferentes parámetros³. Pero antes de seguir con este razonamiento veamos la forma de las soluciones posibles de los parámetros de diseño (a, c) ya que, dados los valores de p_M y p^H quedarán completamente fijados.

Con la segunda y tercera ecuación 10.12 vemos que

$$p_M c \left(\left(\frac{a_3}{a_4} - \frac{1}{a_3} \right) a c - a - c + \frac{a_4}{a_3} \right) = \frac{a_4^2}{a_3} \tag{10.15}$$

Con la primera y segunda ecuación 10.12 vemos que

$$p_M c \left(\frac{1}{a_3 a_4} a c + \left(\frac{1}{p_M} - \frac{1}{a_3} \right) \right) = a_3 - p_M - \frac{a_4}{a_3} \tag{10.16}$$

Eliminando el factor $p_M c$ de estas dos últimas ecuaciones,

$$\frac{a_4}{a_3} a c + \left(\frac{a_4^2}{p_M} - \frac{a_4^2}{a_3} \right) = (a_3^2 - p_M a_3 - a_4) \left(\left(\frac{a_3}{a_4} - \frac{1}{a_3} \right) a c - a - c + \frac{a_4}{a_3} \right) \tag{10.17}$$

³Por ejemplo haciendo $p_M + c \gg a_3$, $a_4 \approx p_M$ y $4a \ll 1$. No obstante no nos interesa que haya un polo real próximo a cero pero sabemos que este resultado es casi inevitable.

Despejando a lo podemos escribir en la forma

$$a = \beta_0 + \frac{\beta_1}{c + \beta_2} \quad (10.18)$$

Substituyendo esta relación en 10.15 o 10.16 se obtiene una ecuación cúbica en c que podemos escribir en la forma

$$c^3 - v_2 c^2 + v_1 c - v_0 = 0 \quad (10.19)$$

10.2. Cálculo de los parámetros de diseño

En lo que sigue utilizaremos la siguiente relación entre a_3 y a_4 ,

$$a_3^2 = \gamma^2 a_4 \quad (10.20)$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

Puesto que $a_3 = 2\sigma^H = 2\zeta^H \omega_n^H$ y $a_4 = (\sigma^H)^2 + (\omega^H)^2 = \omega_n^2$ lo que estamos haciendo es introducir un parámetro γ relacionado con el coeficiente de amortiguamiento de los polos complejos del sistema de lazo cerrado,

$$\gamma = 2\zeta^H \quad (10.21)$$

Bajo esta condición se obtiene que⁴

$$a(c - \delta) = \delta \left(c - \frac{a_3}{\gamma^2} \right) + \tilde{\delta} \frac{a_3^2}{\gamma^4 p_M} \quad (10.22)$$

donde

$$\delta = \left(\frac{p_M - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} a_3}{p_M - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} a_3} \right) \delta_0 = \delta_0 \tilde{m}_1 \quad (10.23)$$

$$\tilde{\delta} = \left(\frac{p_M - a_3}{p_M - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} a_3} \right) \delta_0 = \delta_0 \tilde{m}_2 \quad (10.24)$$

⁴No escribiremos aquí las engorrosas operaciones algebraicas que llevan a las ecuaciones finales.

$$\delta_0 = \frac{a_3}{\gamma^2 - 1} \quad (10.25)$$

Podemos comprobar que

$$\delta - \delta_0 = -\frac{a_3^2}{\gamma^2(\gamma^2 - 1)^2(p_M - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1}a_3)} = -\frac{1}{\gamma^2(p_M - a_3)}\tilde{\delta}\delta_0 \quad (10.26)$$

Esta relación es importante desde un punto de vista numérico porque más adelante haremos la aproximación $\delta \approx \delta_0$. Lo mismo puede hacerse con $\tilde{\delta}$.

Podemos también comprobar que

$$c \left(-ac + \frac{a_3^2}{\gamma^2} \frac{p_M - a_3}{p_M} \right) = \frac{a_3^3}{\gamma^2} \frac{p_M - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}a_3}{p_M} \quad (10.27)$$

que expresaremos en la forma

$$c \left(-ac + \frac{a_3^2}{\gamma^2} m_1 \right) = \frac{a_3^3}{\gamma^2} m_2 \quad (10.28)$$

Entonces

$$c \left(-c \left(\delta(c - \frac{a_3}{\gamma^2}) + \tilde{\delta} \frac{a_3^2}{\gamma^4 p_M} \right) + \frac{a_3^2}{\gamma^2} m_1 (c - \delta) \right) = \frac{a_3^3}{\gamma^2} m_2 (c - \delta) \quad (10.29)$$

Agrupando términos del mismo grado,

$$\boxed{c^3 - v_2 c^2 + v_1 c - v_0 = 0} \quad (10.30)$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} v_0 &= \frac{a_3^3}{\gamma^2} m_2 \\ v_1 &= \frac{a_3^2}{\gamma^2} \left(m_1 + (\gamma^2 - 1) \frac{m_2}{\tilde{m}_1} \right) \\ v_2 &= \frac{a_3}{\gamma^2} \left(1 + (\gamma^2 - 1) \frac{m_1}{\tilde{m}_1} - \frac{a_3}{\gamma^2 p_M} \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{m}_1} \right) \end{aligned}} \quad (10.31)$$

Puesto que suponemos que $p_M \gg a_3$ podemos hacer las aproximaciones $m_1 = \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2 \approx 1$,

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{a_3^3}{\gamma^2} \\ v_1 &= a_3^2 \end{aligned} \tag{10.32}$$

$$v_2 = a_3 \left(1 - \frac{a_3}{\gamma^4 p_M} \right)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\boxed{\hat{c} = \frac{c}{a_3}} \tag{10.33}$$

podemos expresar el polinomio cúbico en $\hat{c}$,

$$\boxed{\hat{c}^3 - \left(1 - \frac{a_3}{\gamma^4 p_M}\right) \hat{c}^2 + \hat{c} - \frac{1}{\gamma^2} = 0} \tag{10.34}$$

que escribiremos como

$$\boxed{\hat{c}^3 - \tilde{v}_2 \hat{c}^2 + \hat{c} - \tilde{v}_0 = 0} \tag{10.35}$$

Teniendo en cuenta que $a_3 = 2\sigma^H = 2\zeta^H \omega_n^H$ y $\gamma = 2\zeta^H$ disponemos de los dos parámetros (ζ^H, ω_n^H) de los polos complejos de lazo cerrado.

Puede comprobarse utilizando el test de Routh que **esta ecuación siempre tiene una raíz real positiva** ya que admitiendo que $v_0 > 0$ habrá uno o tres cambios de signo en la primera columna de la Tabla de Routh. Si $v_2 > v_0 > 0$ entonces habrá tres raíces reales positivas o una real positiva y dos complejas con parte real positiva.

Despejando a de la ecuación 10.28,

$$a = \frac{a_3^2}{c\gamma^2} m_1 - \frac{a_3^3}{c^2\gamma^2} m_2 = \frac{cm_1 - a_3 m_2}{\gamma^2} \left(\frac{a_3}{c} \right)^2 \tag{10.36}$$

En consecuencia,

$$\boxed{a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad c > a_3 \frac{m_2}{m_1}} \tag{10.37}$$

Haciendo la aproximación $m_1 = m_2 \approx 1$, vemos que debe lograrse que $\hat{c} > 1$ en la ecuación cúbica para garantizar que el sistema de lazo cerrado sea estable⁵.

Haciendo el cambio de variable

$$\boxed{\hat{a} = \frac{a}{a_3}} \quad (10.38)$$

podemos expresar la ecuación del parámetro a en la forma

$$\boxed{\hat{a} = \frac{\hat{c} - 1}{\gamma^2 \hat{c}^2}} \quad (10.39)$$

En la Tabla 1 se presentan algunos valores calculados a partir de las expresiones de los sistemas de segundo orden con una entrada escalón unidad⁶ y

⁵Haciendo el cambio de variable $z = \hat{c} - 1$ en el polinomio cúbico y estudiando las condiciones para que haya raíces positivas quedaría concluido este estudio. No obstante no lo vamos a hacer aquí.

⁶Es decir que para una tolerancia $\nu = 2\%$,

$$t_s = \frac{4}{\sigma^H}$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\sigma^H}{\omega^H}\right)\pi}$$

También puede especificarse el tiempo de pico t_p y el tiempo de subida t_r ,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega^H}$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega^H}$$

donde

$$\tan \beta = \frac{\omega^H}{\sigma^H}$$

La salida bajo condiciones iniciales nulas de un sistema de segundo orden (sin ceros) con una señal de entrada escalón unidad es

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma^H t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega^H t + \beta)$$

p_M	σ^H	ω^H	M_p	t_s	a_3	a_4	$\tilde{v}_0$	$\tilde{v}_2$	$\hat{c}$	$\hat{a}$
100	3	10.28	0.4	4/3	6	114.6	3.18	0.39	1.36	0.62

Tabla 1: Datos de diseño.

utilizando las expresiones aproximadas de c y a . La idea de este cálculo es mostrar un ejemplo numérico ya que el cálculo de la sobreelongación máxima M_p y del tiempo de establecimiento t_s del problema del motor debe realizarse con las expresiones completas del sistema de control diseñado. No obstante los valores de a y c pueden tomarse como referencia para el diseño de los controladores.

Podemos calcular los polos de lazo cerrado del polinomio característico del sistema de lazo cerrado dado por

$$P(s) = s^4 + (p_M + c)s^3 + p_M c s^2 + p_M c(a + c)s + p_M a c^2 \quad (10.40)$$

Hemos utilizado la ecuación característica dependiente de $(a, c) = (3,72; 8,16)$ siguiente:

$$s^4 + 108,16s^3 + 816s^2 + 9700s + 24770 = 0 \quad (10.41)$$

cuyas raíces son aproximadamente

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -3 \\ \sigma_2 &= -101 \\ p^H &= -2,1 + j8,7 \\ \bar{p}^H &= -2,1 - j8,7 \end{aligned} \quad (10.42)$$

Como vemos no coinciden con los calculados con la técnica aproximada, pero pueden ser aceptables⁷. No obstante son los esperados en cuanto a su ubicación en el plano complejo según hemos visto al analizar el lugar de raíces generalizado.

Puede comprobarse que se satisfacen las condiciones suficientes de estabilidad del sistema de lazo cerrado dadas por las desigualdades 7.32: $a < p_M$ y $c > \frac{a^2}{p_M - a}$. Estas condiciones se obtuvieron suponiendo que $a > 0$ y $c > 0$.

⁷Se ha utilizado el calculador “on line” de la página <http://www.freewebs.com/brianjs/ultimaterequationsolver.htm>.

En este punto la resolución del problema no ha finalizado, ya que deben comprobarse los valores de las especificaciones de diseño, tanto de M_p y t_s como de la constante de error $K_e^*(4)$ dada por la relación 10.43,

$$K_e(4) = \frac{p_M + c}{p_M a c^2} = 4,4 \times 10^{-3} < K_e^*(4) \quad (10.43)$$

El resultado de diseño (preliminar) para un motor de función de transferencia simplificada

$$G_u(s) = \frac{1000}{s(s + 100)} \quad (10.44)$$

son las funciones de transferencia de los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ dados por las relaciones 7.26

$$G_{c1}(s) = \frac{0,816(s + 3,72)}{s} \quad (10.45)$$

$$G_{c2}(s) = -\frac{0,816 s}{s + 8,16} \quad (10.46)$$

Como se ha señalado no vamos a hacer aquí el estudio completo. Sin duda sería conveniente realizar simulaciones computacionales utilizando algún programa como OCTAVE o Matlab, por ejemplo. La recomendación general es que se haga un programa que permita variar los parámetros (a, c) en un determinado rango de valores calculando a la vez M_p y t_s del sistema de control completo para diferentes señales de referencia, especialmente la señal escalón. Hay que verificar siempre cómo responde el sistema a la rampa y a la parábola, y conviene hacerlo para la señal polinómica de tercer grado (en t).

En general se recomienda programar un perfil trapezoidal y comprobar que el seguimiento y supresión de la señal de referencia son los adecuados.

11. Comentarios sobre el diseño.

La selección de los polinomios de los controladores $F_1(s)$ y $F_2(s)$ puede no ser satisfactoria en cuanto a las satisfacción de las especificaciones de diseño.

En este caso deberán elegirse otros, lo que supondrá elevar el orden de los controladores.

Podemos ver que el polinomio característico dado por la ecuación 6.12 puede expresarse en la forma

$$P(s) = s^3 N'_e(s) + K_M N_{F1}(s) D'_{F2}(s) \quad (11.1)$$

por lo que la función $G'(s)$ definida para la representación del lugar de raíces anterior (expresión 10.4) se corresponde con

$$G'(s) = \frac{\hat{N}_{F1}(s) D'_{F2}(s)}{s^3 N'_e(s)} \quad (11.2)$$

donde $N_{F1}(s) = K_{F1} \hat{N}_{F1}(s)$.

En este caso general $K = K_M K_{F1}$.

La elección de los polinomios supone una modificación de la ubicación de los polos de lazo cerrado en el plano complejo. Es recomendable que estos polinomios se elijan teniendo en cuenta dónde se desea que estén estos polos. Hemos visto que el trazado aproximado y cualitativo del lugar de raíces generalizado podría ser una buena herramienta gráfica para el análisis de este problema.

Se recomienda realizar estos estudios desarrollando algún programa simbólico y numérico que facilite el análisis y la sintonización de los parámetros de los controladores.