

# Motor DC, etapa de potencia y PWM

Félix Monasterio-Huelin

6 de febrero de 2016

## Índice

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>2</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Etapa de potencia</b>	<b>3</b>
<b>3. Tipos de PWM</b>	<b>5</b>
<b>4. Motor DC</b>	<b>7</b>
<b>5. Simplificación de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación de la constante eléctrica del motor</b>	<b>10</b>
<b>6. Simplificación de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación del polo no dominante</b>	<b>11</b>
<b>7. Estimación del coeficiente de fricción viscosa <math>B_m</math></b>	<b>11</b>
<b>8. Ejemplo de modelado de un motor DC comercial</b>	<b>12</b>
<b>A. Modelo de MOSFET</b>	<b>15</b>
A.1. Explicación del funcionamiento de los MOSFET de potencia en dispositivos de conmutación a alta frecuencia. . . . .	17
<b>B. PWM bipolar real</b>	<b>18</b>
B.1. Zonas $Z_0^+$ y $Z_0^-$ . . . . .	18
<b>C. Modelo CVS de fricción de un motor DC</b>	<b>20</b>
<b>D. Modelo de carga de un motor DC de un grado de libertad</b>	<b>22</b>

## Índice de Figuras

2.1. Puente en H . . . . .	3
2.2. Zona $Z^+$ . . . . .	4
2.3. Zona $Z^-$ . . . . .	4
3.1. Ejemplo de señal PWM unipolar ideal . . . . .	5
3.2. Secuencia lógica del puente en H con PWM unipolar ideal . . . . .	6
3.3. Ejemplo de señal PWM bipolar ideal . . . . .	6
3.4. Secuencia lógica del puente en H con PWM bipolar ideal . . . . .	6
4.1. MotorDC . . . . .	7

4.2. Eje, Reductora y Carga del MotorDC . . . . .	7
A.1. Símbolo del MOSFET de potencia de canal N. . . . .	15
A.2. (a) MOSFET (b) Alimentación que induce el canal N, y el modelo resistivo del MOSFET en la región óhmica. . . . .	16
B.1. Señal PWM con las zonas $Z_0^+$ y $Z_0^-$ . . . . .	18
B.2. Secuencia lógica del puente en H con los instantes de transición, comenzando en $Z^+$ . . . . .	18
C.1. Par de fricción dado por C.5 en función de $\dot{\theta}_m$ . . . . .	20

## Índice de Tablas

8.1. Características del fabricante. . . . .	12
8.2. Características de un motor DC en el Sistema Internacional de unidades. . . . .	12

# 1. Introducción

El objetivo principal de este documento es obtener un modelo matemático de un motor DC que sea útil para realizar el diseño e implementación de un sistema de control realimentado.

En primer lugar, se hace una introducción a una etapa de potencia, basada en la técnica de Modulación de Anchura de Pulso (PWM), necesaria para acondicionar la señal de control obtenida con un controlador digital, a la señal de entrada física del motor DC.

En segundo lugar, se estudian las ecuaciones electromecánicas de un motor DC hasta la obtención de su función de transferencia y su simplificación a un sistema dinámico de primer orden, y orden relativo la unidad.

Se verá un ejemplo de modelado de un motor DC comercial, a partir de las características que ofrece el fabricante.

# 2. Etapa de potencia

En la Figura 2.1 se representa un esquema de la etapa de potencia de un motor DC cuyo objetivo es la generación de una señal modulada en anchura de pulso (señal PWM en lo sucesivo,  $u_m(t)$ ) que se corresponda con la señal de control discreta  $u_k$  generada por un sistema de control digital.

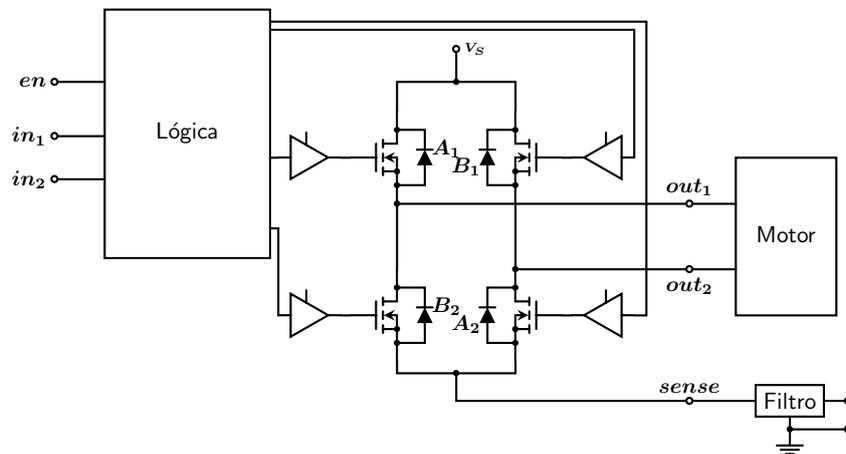


Figura 2.1: Puente en H

La implementación hardware consiste en un puente en H de dispositivos MOSFET. En el Apéndice A se detalla el funcionamiento de los MOSFET.

El puente en H tiene dos cargas importantes: la del motor DC cuyas ecuaciones se recogen en la Sección ?? y la de un filtro paso bajo cuya finalidad es servir de sensor de la corriente eléctrica en el motor. En este escrito no se estudia este filtro. La carga del motor es fundamentalmente inductiva.

Llamaremos **Zona  $Z^+$**  al periodo de tiempo en que los MOSFET,s  $A_1$  y  $A_2$  se encuentren en su región óhmica y los MOSFET,s  $B_1$  y  $B_2$  se encuentren en su región de corte, y **Zona  $Z^-$**  al periodo de tiempo en que los MOSFET,s  $B_1$  y  $B_2$  se encuentren en su región óhmica y los MOSFET,s  $A_1$  y  $A_2$  se encuentren en su región de corte.

En las Figuras 2.2 y 2.3 se representan las corrientes que circulan por el puente en H cuando los MOSFET se encuentran en las zonas  $Z^+$  y  $Z^-$  respectivamente.

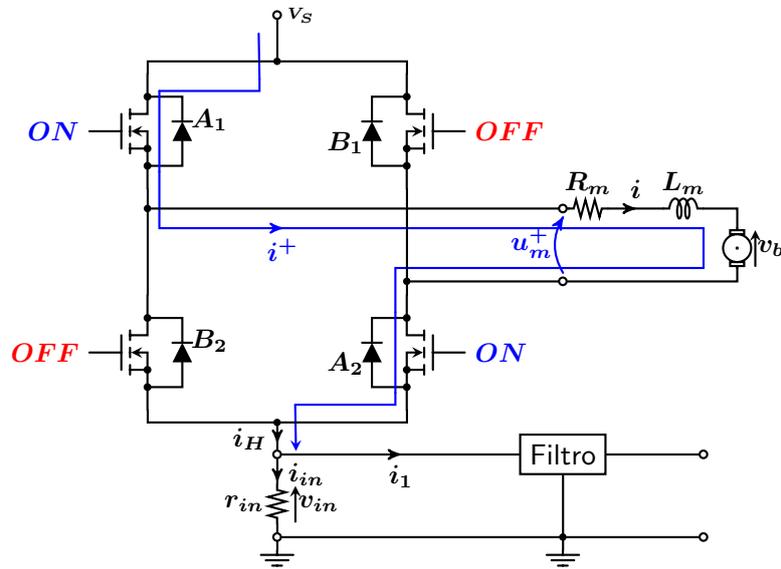


Figura 2.2: Zona  $Z^+$

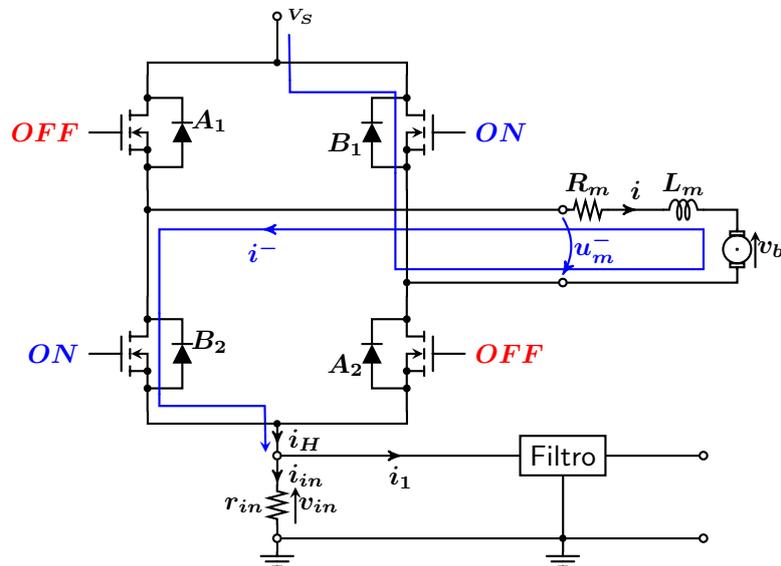


Figura 2.3: Zona  $Z^-$

Llamaremos **Zona  $Z_1$**  al periodo de tiempo en que los MOSFET,s  $A_1$  y  $B_1$  se encuentren en su región óhmica y los MOSFET,s  $A_2$  y  $B_2$  se encuentren en su región de corte, y **Zona  $Z_2$**  al periodo de tiempo en que los MOSFET,s  $A_2$  y  $B_2$  se encuentren en su región óhmica y los MOSFET,s  $A_1$  y  $B_1$  se encuentren en su región de corte.

La zona  $Z_1$  es preferible a la zona  $Z_2$  cuando haya una resistencia para la medida de la corriente, ya que se reducen las pérdidas en ella. No obstante, en ambos casos se logra un cortocircuito entre las bornas del motor, ya que ellas se encuentran, idealmente, a la misma tensión. Hay que tener en cuenta que aunque la tensión sea nula a la entrada del motor, puede circular corriente eléctrica, ya que se trata de un sistema dinámico con condiciones iniciales no nulas.

Lo que nunca se debe hacer es cortocircuitar la fuente de alimentación. Esto puede ocurrir cuando todos los MOSFET,s estén simultáneamente en la región óhmica. Como consecuencia, si se realiza una PWM que exija conmutar de las zonas  $Z^+$  a  $Z^-$  o al revés, se corre el riesgo de que se produzca esta situación. En este caso debe introducirse un tiempo muerto intermedio, definido como la situación en que todos los MOSFET,s se encuentren en corte. Este tiempo muerto debe ser lo más pequeño posible para que no produzca un excesivo rizado en la corriente eléctrica. Por esta razón llamaremos **Zona  $Z_0$**  al periodo de tiempo en que todos los MOSFET,s se encuentren en corte. En el Apéndice B se habla con más detalle de esta zona.

La PWM que consideraremos en este escrito, consiste en la conmutación periódica entre algunas de estas zonas. En la Sección siguiente se verán dos tipos de PWM con formas de conmutación distintas.

La parte lógica del puente en H se encarga de generar las señales adecuadas a los MOSFET con el fin de que se encuentren en la región óhmica o en la región de corte, o lo que es lo mismo, de la lógica de conmutación entre zonas. Sus entradas principales son dos señales  $in_1$  e  $in_2$  que representan las señales PWM de baja potencia generadas, normalmente, por un microcontrolador.

### 3. Tipos de PWM

Para la generación de la señal PWM es necesario conocer el periodo de modulación constante  $T_m$  y la anchura del pulso  $\gamma_k T_m$ , donde  $\gamma_k \in [0, 1]$ . La anchura del pulso se calcula a partir de la señal generada por el controlador  $u_k$ , de tal manera que la entrada al motor o señal PWM,  $u_m(t)$ , satisfaga ciertas condiciones. En lo que sigue solo se contempla el caso en que el promedio temporal de la señal  $u_m(t)$  coincida con la señal de control  $u_k$  en cada periodo de modulación, es decir, que se satisfaga la relación siguiente:

$$u_k = \frac{1}{T_m} \int_{kT_m}^{(k+1)T_m} u_m(t) dt \quad (3.1)$$

Aplicando este criterio se obtiene la anchura del pulso  $\gamma_k T_m$  en cada periodo de modulación  $T_m$ . Este criterio solamente garantiza que las señales  $u_m(t)$  y  $u_k$  coinciden a bajas frecuencias, es decir, en el régimen permanente. Normalmente, en la práctica, la señal de control  $u_k$  se mantendrá constante durante un periodo de muestreo  $T$ , donde  $T = NT_m$ , siendo  $N$  una constante. Por lo tanto, se producirá una secuencia de  $N$  pulsos idénticos en la señal  $u_m(t)$ . Si  $N$  es suficientemente elevado el criterio del promedio, dado por 3.1, será una buena aproximación de la reconstrucción analógica de la señal muestreada  $u_k$ , ya que la señal PWM será aproximadamente una señal periódica de periodo  $T_m$ , y la PWM funcionará como una aproximación causal de un filtro paso bajo ideal.

Para cualquier tipo de modulación PWM que se considere se producirá una señal discontinua en los instantes de tiempo  $kT_m$ , y un paso por cero en los instantes de tiempo  $\mathcal{T}_k$  excepto en los casos en que  $\gamma_k = 0$  o  $\gamma_k = 1$ ,

$$\mathcal{T}_k = (\gamma_k + k)T_m, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (3.2)$$

La anchura del pulso en cada periodo de modulación es  $\gamma_k T_m = \mathcal{T}_k - kT_m$ .

En este documento se van a considerar dos tipos de PWM, según sea la forma de generar la señal PWM,  $u_m(t)$ .

#### 1. PWM de tres niveles o PWM unipolar.

En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo de señal PWM,  $u_m(t)$ , con PWM unipolar, donde la señal generada por el controlador es  $u_k$ . Esta clase de PWM es de tres niveles  $\{U_m, 0, -U_m\}$ . La señal  $u_m(t)$  es positiva o nula cuando  $u_k \geq 0$ , y es negativa o nula cuando  $u_k \leq 0$ .

Aplicando la expresión dada por 3.1 se obtiene la ecuación que permite obtener la anchura del pulso  $\gamma_k T_m$ ,

$$|u_k| = \gamma_k U_m \quad (3.3)$$

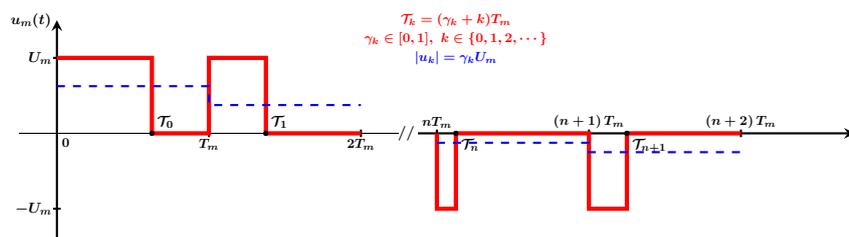


Figura 3.1: Ejemplo de señal PWM unipolar ideal

En la Figura 3.2 se muestra la secuencia lógica de conmutación de este tipo de PWM ideal. Las zonas  $Z_1$  y  $Z_2$  se han subdividido cada una de ellas en dos zonas, zonas  $Z_1^+$  y  $Z_1^-$  según que se haya dado inmediatamente antes la situación de las zonas  $Z^+$  y  $Z^-$ , respectivamente, y zonas  $Z_2^+$  y  $Z_2^-$  según que se haya dado inmediatamente antes la situación de las zonas  $Z^+$  y  $Z^-$ , respectivamente. La zona  $Z_2^+$  solo opera cuando se realiza una conmutación de  $Z^+$  a  $Z^-$ , y la zona  $Z_2^-$  solo opera cuando se realiza una conmutación de  $Z^-$  a  $Z^+$ .

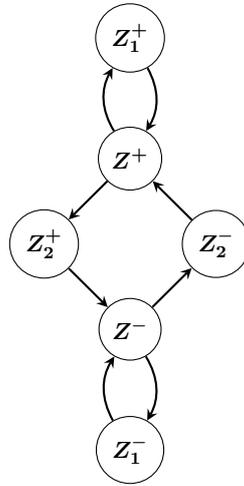


Figura 3.2: Secuencia lógica del puente en H con PWM unipolar ideal

## 2. PWM de dos niveles o PWM bipolar.

En la Figura 3.3 se muestra un ejemplo de señal PWM con PWM bipolar, donde la señal generada por el controlador es  $u_k$ . Esta clase de PWM es de dos niveles  $\{U_m, -U_m\}$ .

Aplicando la expresión dada por 3.1 se obtiene la ecuación que permite obtener la anchura del pulso  $\gamma_k T_m$ ,

$$u_k = (2\gamma_k - 1)U_m \quad (3.4)$$

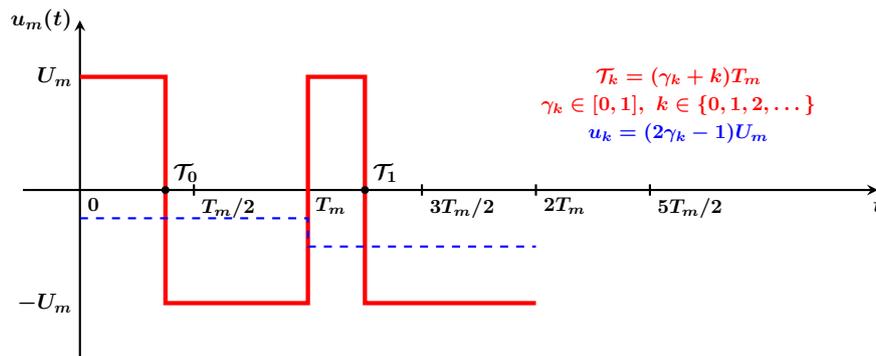


Figura 3.3: Ejemplo de señal PWM bipolar ideal

En la Figura 3.4 se muestra la secuencia lógica de conmutación de este tipo de PWM ideal.

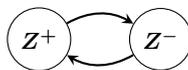


Figura 3.4: Secuencia lógica del puente en H con PWM bipolar ideal

## 4. Motor DC

En las Figuras 4.1 y 4.2 se representan esquemáticamente un motor DC, la Reductora y la Carga del motor.

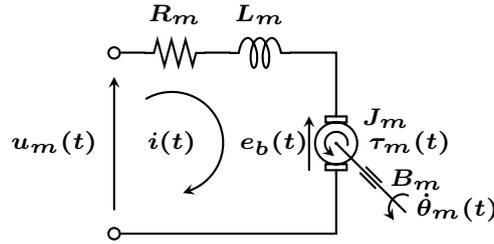


Figura 4.1: MotorDC

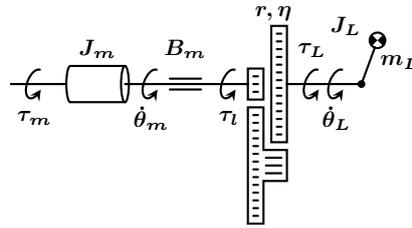


Figura 4.2: Eje, Reductora y Carga del MotorDC

La ecuación eléctrica del motor tiene la forma,

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} + e_b(t) \quad (4.1)$$

donde  $u_m(t)$  representa la tensión de entrada al motor,  $i(t)$  la corriente eléctrica del motor,  $e_b(t)$  la fuerza contraelectromotriz,  $R_m$  la resistencia terminal y  $L_m$  la inductancia del rotor.

La ecuación mecánica del motor es

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + \tau_l(t) + \tau_f(t) \quad (4.2)$$

donde  $\tau_m(t)$  representa el par motor,  $\ddot{\theta}_m(t)$  la aceleración angular del motor,  $J_m$  la inercia del rotor,  $\tau_l(t)$  el par de la carga visto desde el eje del motor y  $\tau_f(t)$  el par de fricción.

En el Apéndice C se presenta un modelo de fricción, que nos permite escribir la ecuación mecánica en la forma

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) + \tau_c(t) \quad (4.3)$$

donde  $\dot{\theta}_m(t)$  es la velocidad angular del motor,  $B_m \dot{\theta}_m(t)$  el par de fricción viscosa con  $B_m$  la constante de fricción viscosa (damping viscous constant), y  $\tau_c(t)$  el par que incorpora la carga y la fricción, a excepción del par de fricción viscosa.

En el Apéndice D se presenta un modelo de la carga de un único grado de libertad, que nos permite escribir la ecuación mecánica en la forma

$$\tau_m(t) = J_{eff} \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) + \tau'_c(t) \quad (4.4)$$

donde  $\tau'_c(t)$  representa el par que incorpora la carga y la fricción, a excepción del par de fricción viscosa, y de la inercia de la carga, y  $J_{eff}$  es el momento de inercia eficaz, cuya expresión es la siguiente:

$$J_{eff} = J_m + \frac{r^2 J_L}{\eta} \quad (4.5)$$

siendo  $r \in [0, 1]$  el factor de reducción de la reductora y  $\eta$  el rendimiento mecánico de la reductora.

En lo que sigue consideraremos un motor DC que satisface las siguientes relaciones de acoplo electromecánico:

$$e_b = k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (4.6a)$$

$$\tau_m = k_m i(t) \quad (4.6b)$$

donde  $k_b$  y  $k_m$  son constantes del motor, constante de la fuerza contraelectromotriz (back-EMF constant) y constante de par respectivamente (torque constant). Cuando se expresan en unidades del mismo sistema de unidades  $k_b = k_m$ .

Con estas ecuaciones y relaciones pueden obtenerse diversas funciones de transferencia del motor sin carga. Para ello consideraremos las ecuaciones que solo incorporen la fricción viscosa,

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} + k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (4.7a)$$

$$k_m i(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) \quad (4.7b)$$

Las más importantes son las que relacionan la velocidad angular  $\dot{\theta}_m(t)$ , la posición angular  $\theta_m(t)$  y la corriente eléctrica  $i(t)$  con la tensión de entrada  $u_m(t)$ . Las escribiremos como  $G_{\dot{\theta}_m}(s)$ ,  $G_{\theta_m}(s)$  y  $G_I(s)$  respectivamente.

Puesto que  $\dot{\theta}_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$  se cumple, bajo condiciones iniciales nulas, que

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = s G_{\theta_m}(s) \quad (4.8)$$

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones del motor bajo condiciones iniciales nulas, y eliminando la variable de la corriente eléctrica  $I(s)$  se obtiene la función de transferencia del motor:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{k_m}{(J_m s + B_m)(L_m s + R_m) + k_b k_m} \quad (4.9)$$

Se define la **constante de velocidad del motor**  $k_n$  como la ganancia a bajas frecuencias del motor. Utilizando la expresión 4.10,

$$G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{k_m}{B_m R_m + k_b k_m} \quad (4.10)$$

No obstante, es habitual definir  $k_n$  despreciando la constante de fricción viscosa, es decir, mediante la relación  $k_n = \frac{1}{k_b}$ .

Para obtener  $G_I(s)$  puede hacerse lo siguiente. Primero aplicar la Transformada de Laplace, bajo condiciones iniciales nulas, a la ecuación mecánica dada por 4.7b,

$$k_m I(s) = (J_m s + B_m) \mathcal{L}_- \left\{ \dot{\theta}_m(t) \right\} \quad (4.11)$$

Como  $\mathcal{L}_- \left\{ \dot{\theta}_m(t) \right\} = G_{\dot{\theta}_m}(s) U_m(s)$  e  $I(s) = G_I(s) U_m(s)$ , se obtiene que

$$G_I(s) = \frac{J_m s + B_m}{(J_m s + B_m)(L_m s + R_m) + k_b k_m} \quad (4.12)$$

A la corriente en régimen permanente cuando la entrada al motor carga es la **tensión nominal**  $u_m(t) = U_N$  (nominal voltage), se la denomina **corriente del motor sin carga**  $I_0$  (no-load current). Esta puede obtenerse aplicando el teorema del valor final a  $I(s) = G_I(s) U_m(s)$ ,

$$I_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s G_I(s) \frac{U_N}{s} = U_N G_I(0) = \frac{B_m U_N}{B_m R_m + k_b k_m} \quad (4.13)$$

Hay que tener en cuenta que se han despreciado todos los pares de fricción a excepción de la fricción viscosa, por lo que relación 4.13 es una expresión aproximada de  $I_0$ .

Podemos comprobar que se cumple que

$$k_m I_0 = B_m \dot{\theta}_{mN} \quad (4.14)$$

donde  $\dot{\theta}_{mN}$  es la **velocidad angular nominal del motor sin carga** (no-load speed), que, normalmente, se escribe como  $n_0$ . Este valor puede obtenerse aplicando el teorema del valor final a  $G_{\dot{\theta}_m}(s)$  dado por 4.10, cuando la entrada es la tensión nominal  $u_m(t) = U_N$ ,

$$\dot{\theta}_{mN} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{\dot{\theta}_m}(s) \frac{U_N}{s} = U_N G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{k_m U_N}{B_m R_m + k_b k_m} \quad (4.15)$$

Se denomina **constante de tiempo eléctrica**  $t_e$  (cuya unidad en el sistema internacional es de segundos  $s$ ), a la siguiente relación:

$$t_e = \frac{L_m}{R_m} \quad (4.16)$$

Esta relación se obtiene de eliminar el acoplo mecánico en la ecuación eléctrica del motor dada por 4.7a. Entonces  $G_I(s)$  dado por 4.12 tiene la forma  $\frac{1}{L_m s + R_m}$  cuyo polo es  $-1/t_e$ .

Se denomina **constante de tiempo mecánica**  $t_m$ , a la constante de tiempo obtenida suponiendo que la constante de tiempo eléctrica es despreciable, es decir, haciendo  $L_m = 0$ . Más adelante, en la subsección 5, se demuestra que queda definida por la siguiente expresión:

$$t_m = \frac{R_m J_m}{R_m B_m + k_b k_m} \quad (4.17)$$

Puede comprobarse que la función de transferencia de velocidad angular dada por 4.10 tiene dos polos reales (cuyas unidades en el sistema internacional son  $s^{-1}$ ) dados por la relación siguiente:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_e} + \frac{1}{t'_m} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{t_e} - \frac{1}{t'_m} \right)^2 - 4 \frac{k_m k_b}{J_m L_m}} \quad (4.18)$$

donde  $t'_m = \frac{J_m}{B_m}$ , que algunos autores también denominan constante de tiempo mecánica, puesto que se obtiene eliminando el acoplo eléctrico en las ecuaciones del motor. En este escrito se utilizará la definición dada por la relación 4.17 ya que es la que suelen utilizar los fabricantes.

Podemos entonces escribir la función de transferencia en la forma

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K'_m}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (4.19)$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son los polos dados por la relación 4.18, y

$$K'_m = \frac{k_m}{J_m L_m} \quad (4.20)$$

Normalmente los motores DC cumplen que  $t_e \ll t_m$ , además de que  $p_1 \ll p_2$ . Estos hechos sugieren dos métodos distintos de simplificación de las ecuaciones del motor: eliminar la constante de tiempo eléctrica  $t_e$  (dando lugar a la definición de constante de tiempo mecánica) (subsección 5) o eliminar el polo no dominante  $p_1$  (subsección 6). Los resultados serán distintos, aunque similares, pero ambos métodos reducen el orden de las funciones de transferencia del motor a la forma:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K}{s + p} \quad (4.21)$$

donde  $K$  y  $p$  son constantes.

La ecuación diferencial simplificada que representa al motor será por lo tanto de segundo orden en  $\theta(t)$  y de primer orden en  $\dot{\theta}(t)$ ,

$$\ddot{\theta}_m(t) + p\dot{\theta}_m(t) = K u_m(t) \quad (4.22)$$

Las constantes de tiempo eléctrica y mecánica definidas anteriormente son, aproximadamente la inversa de los polos exactos:  $t_e \approx 1/|p_1|$  y  $t_m \approx 1/|p_2|$ , siendo  $p_2$  el polo dominante.

Por otro lado, siempre que se hace alguna simplificación de los modelos matemáticos debe imponerse la restricción de que la ganancia a bajas frecuencias coincida con la del modelo no simplificado, lo que permite calcular el parámetro  $K$  de la expresión 4.21.

Aplicando la transformada de Laplace inversa a la anterior función de transferencia 4.21, teniendo en cuenta condiciones iniciales nulas y una entrada escalón de amplitud  $A$  se obtiene la salida de velocidad angular del motor:

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{AK}{p} (1 - e^{-pt}), \quad t \geq 0 \quad (4.23)$$

Si las condiciones iniciales no son nulas sino  $[\dot{\theta}(0^-)]$ , entonces para una entrada escalón de amplitud  $A$ ,

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{AK}{p} (1 - e^{-pt}) + \dot{\theta}(0^-)e^{-pt}, \quad t \geq 0 \quad (4.24)$$

Si la entrada al motor es nula y las condiciones iniciales no son nulas se obtiene una salida que decae con el tiempo según la ecuación

$$\dot{\theta}_m(t) = \dot{\theta}(0^-)e^{-pt}, \quad t \geq 0 \quad (4.25)$$

La relación 4.25 permite obtener experimentalmente el polo dominante del motor. Y con este valor, puede obtenerse  $K$  experimentalmente a partir de la ecuación 4.23 o 4.24 si se conocen las condiciones iniciales.

## 5. Simplificación de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación de la constante eléctrica del motor

Las ecuaciones del motor DC pueden simplificarse teniendo en cuenta que la constante eléctrica del motor es mucho menor que la constante mecánica, lo que se traduce en despreciar el factor de la inductancia  $L_m$  en la ecuación eléctrica.

Siguiendo este método de simplificación la ecuación eléctrica dada por 4.7a quedaría en la forma:

$$u_m(t) = R_m i(t) + k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (5.1)$$

Despejando la corriente eléctrica  $i(t)$  de la ecuación mecánica 4.7b y substituyendo en la ecuación anterior 5.1, se tiene

$$u_m(t) = \frac{R_m J_m}{k_m} \ddot{\theta}_m(t) + \left( \frac{R_m B_m}{k_m} + k_b \right) \dot{\theta}_m(t) \quad (5.2)$$

La ecuación del motor simplificada dada por 5.2 representa una ecuación diferencial de primer orden para la variable de velocidad angular y de segundo orden para la variable de posición angular.

Aplicando la transformada de Laplace a esta ecuación se obtiene la función de transferencia de velocidad angular en relación a la entrada del motor:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{\dot{\Theta}_m(s)}{U_m(s)} = \frac{k_m}{R_m J_m s + R_m B_m + k_b k_m} \quad (5.3)$$

Podemos escribir la función de transferencia de velocidad angular en la forma siguiente:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K_m}{s + p_m} \quad (5.4)$$

La ganancia a bajas frecuencias del motor es:

$$G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{k_m}{R_m B_m + k_b k_m} \quad (5.5)$$

Puede comprobarse que esta constante coincide con la del motor sin simplificar.

Puede verse también que

$$K_m = p_m G_{\dot{\theta}_m}(0) \quad (5.6)$$

La función de transferencia del motor, simplificada por este método, tiene un polo de valor

$$s = -p_m = -\frac{R_m B_m + k_b k_m}{R_m J_m} = -\frac{1}{t_m} \quad (5.7)$$

donde  $t_m$  es, por definición, la constante de tiempo mecánica.

## 6. Simplificación de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación del polo no dominante

La función de transferencia de velocidad angular del motor puede expresarse en la forma siguiente:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K'_m}{(s + |p_1|)(s + |p_2|)} \quad (6.1)$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son los polos dados por la relación 4.18.

La ganancia a bajas frecuencias del motor es,

$$G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{K'_m}{p_1 p_2} \quad (6.2)$$

Normalmente  $p_1 \ll p_2$  por lo que puede simplificarse el modelo matemático despreciando el polo no dominante. Siguiendo este método, la anterior función de transferencia quedará en la forma

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K_m}{s + |p_2|} \quad (6.3)$$

Puesto que se debe cumplir la restricción de ganancia a bajas frecuencias,

$$K_m = |p_2| G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{K'_m}{|p_1|} \quad (6.4)$$

Teniendo en cuenta la relación 4.20 se cumple que,

$$K_m = \frac{k_m}{J_m L_m |p_1|} \quad (6.5)$$

El polo de la función de transferencia de velocidad angular simplificada por este método será, por diseño, el polo dominante  $-p_2$ .

## 7. Estimación del coeficiente de fricción viscosa $B_m$

Los fabricantes no suelen dar la constante de fricción viscosa  $B_m$ , pero sí otras características que permiten estimarla.

Esto puede hacerse de dos formas, según que se disponga de una u otra información,

1. Utilizando la ecuación de la constante de tiempo mecánica,  $t_m$ , dada por 4.17,

$$B_m = \frac{J_m}{t_m} - \frac{k_b k_m}{R_m} \quad (7.1)$$

2. Utilizando la ecuación de la corriente del motor sin carga,  $I_0$ , dada por 4.14,

$$B_m = \frac{k_m I_0}{\dot{\theta}_{mN}} \quad (7.2)$$

Ambos métodos son aproximados, ya que en el estudio teórico solo se ha tenido en cuenta, del par de fricción, la fricción viscosa.

## 8. Ejemplo de modelado de un motor DC comercial

La Tabla 8.1 recoge las características de un motor comercial<sup>1</sup>.

Parámetro	Valor	Unidades
$U_N$	12	V
$R_m$	5,3	$\Omega$
$L_m$	580	$\mu H$
$J_m$	14	$g\ cm^2$
$t_m$	15	ms
$k_b$	2,3	mV/rpm
$k_m$	22	mNm/A
$I_0$	0,05	A
$n_0$	5100	rpm

Tabla 8.1: Características del fabricante.

Con esta información puede calcularse la constante eléctrica del motor  $t_e$  utilizando la relación 4.16, obteniendo  $t_e = 109,43\mu s$ . Como vemos  $t_e \ll t_m$ .

Será necesario expresar todos estos parámetros en las mismas unidades. Utilizaremos el SI de unidades como se muestra en la Tabla 8.2.

Parámetro	Valor	Unidades
$R_m$	5,3	$\Omega$
$L_m$	$5,8 \times 10^{-4}$	H
$J_m$	$1,4 \times 10^{-6}$	$kg\ m^2$
$t_m$	$1,5 \times 10^{-2}$	s
$t_e$	$1,1 \times 10^{-4}$	s
$k_b$	$2,2 \times 10^{-2}$	V s/rad
$k_m$	$2,2 \times 10^{-2}$	Nm/A
$I_0$	0,05	A
$n_0$	534,071	rad/s

Tabla 8.2: Características de un motor DC en el Sistema Internacional de unidades.

Podemos observar que las constantes del par y de la fuerza contraelectromotriz coinciden,  $k_m = k_b$ , cuando se expresan en el mismo sistema de unidades.

Puede ahora estimarse el coeficiente de fricción viscosa,  $B_m$ , con cualquiera de los métodos descritos en la Sección 7. Con el método de la constante de tiempo mecánica se obtiene el valor  $B_m = 2,01 \times 10^{-6}$  Nms, y con el método de la corriente del motor sin carga  $B_m = 2,06 \times 10^{-6}$  Nms.

Puede comprobarse con la expresión 4.18, que los polos del motor, utilizando el valor de  $B_m$  obtenido por el método de la corriente del motor sin carga, son

$$\begin{aligned} p_1 &= -9025 \\ p_2 &= -67,53 \end{aligned}$$

El polo dominante es  $p_2$  que además cumple que  $|p_2| \ll |p_1|$ .

Calculando  $K_m$  con la expresión dada por 4.20, el modelo del motor con los dos polos tiene la forma

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{27093596,06}{(s + 9025)(s + 67,53)} \quad (8.1)$$

<sup>1</sup>Se trata del motor 2842 – 012C de Minimotor, que tiene un material del magneto de AlNiCo.

Utilizando el método de simplificación de eliminación de la constante eléctrica del motor, se obtiene  $p_m = -66,67$  utilizando la expresión  $1/t_m$  dada en 5.7.

Ambos modelos simplificados deberán cumplir la condición de que la ganancia a bajas frecuencias sea la misma. En ambos casos se obtendrá un modelo de la forma

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K_m}{s + p_m} \quad (8.2)$$

1. Modelo simplificado del motor por el método de eliminación de la constante de tiempo eléctrica.

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{2963,8}{s + 66,67} \quad (8.3)$$

2. Modelo simplificado del motor por el método de eliminación del polo no dominante.

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{3002,1}{s + 67,53} \quad (8.4)$$

# Apéndices

## A. Modelo de MOSFET

En la Figura A.1(a) se muestra el símbolo que utilizaremos para un MOSFET (metal-óxido-semiconductor field-effect transistor) de potencia de canal N. En la Figura A.1(b) se ha quitado el diodo parásito para mostrar la notación de las tensiones entre los diferentes terminales: puerta (G) de óxido de silicio ( $SiO_2$ ), drenador (D) y fuente (S), semiconductores de tipo  $n^+$ . Realmente existe otro terminal llamado cuerpo (B), semiconductor de tipo p, aunque consideraremos que está conectado a la fuente (S). El cuerpo es el responsable de la existencia del diodo parásito (unión pn) que aparece en la Figura A.1(a). El MOSFET presenta también un transistor parásito del cual no hablaremos aquí, salvo para indicar que puede ser el responsable de la ruptura del componente.

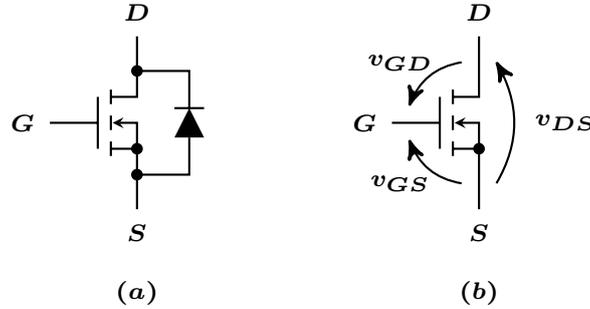


Figura A.1: Símbolo del MOSFET de potencia de canal N.

Se considera que el MOSFET de potencia de canal N puede estar en tres regiones de funcionamiento (en régimen estacionario o permanente), que se rigen por las siguientes ecuaciones:

a) Región de corte:  $v_{GS} \leq V_{GS(th)}$

$$i_{DS} \approx I_0 e^{\frac{v_{GS} - V_{GS(th)}}{nV_{GS(th)}}} \approx 0 \quad (A.1)$$

donde  $V_{GS(th)}$  es la tensión de umbral o tensión térmica entre la fuente (S) y la puerta (G) del MOSFET (puede aparecer escrita como  $V_T$ ),  $n$  es una constante capacitiva del MOSFET, e  $I_0$  la corriente cuando  $v_{GS} = V_{GS(th)}$ .

b) Región óhmica, de triodo o lineal:  $v_{GS} > V_{GS(th)}$ ,  $v_{DS} \leq v_{GS} - V_{GS(th)}$

$$i_{DS} = k(v_{DS(sat)}v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2}) \quad (A.2)$$

donde  $v_{DS(sat)} = v_{GS} - V_{GS(th)}$  y  $k$  es la constante de conductividad del MOSFET.

c) Región de saturación o activa:  $v_{GS} > V_{GS(th)}$ ,  $v_{DS} > v_{GS} - V_{GS(th)}$

$$i_{DS} = \frac{k}{2}v_{DS(sat)}^2(1 + \lambda(v_{DS} - v_{DS(sat)})) \quad (A.3)$$

donde  $v_{DS(sat)} = v_{GS} - V_{GS(th)}$  y  $\lambda \approx 0$  una constante que aparece debido a la modulación de la longitud del canal N (efecto Early).

Tanto en las regiones óhmica como saturada se induce un canal (canal N en la zona del cuerpo) de electrones libres entre drenador y fuente. En la región de corte este canal desaparece. El canal N no se forma ni desaparece de manera instantánea.

Para la región óhmica podemos adoptar un modelo matemático resistivo (resistencia del canal para valores bajos de  $v_{DS}$ ), si se hace la suposición de que  $v_{GS} - V_{GS(th)} \gg v_{DS}/2$ , ya que según la ecuación A.2,

$$i_{DS} = \frac{v_{DS}}{R_{DS(on)}} \quad (A.4)$$

donde

$$R_{DS(on)} = \frac{1}{k(v_{GS} - V_{GS(th)})} \quad (\text{A.5})$$

En la Figura A.2(a) se muestran los terminales y las capas semiconductoras (no se ha dibujado la parte de metal por encima de la capa de óxido en la puerta), y en la Figura A.2(b) un circuito con la alimentación adecuada para que se induzca el canal N, así como el modelo resistivo del MOSFET en la región óhmica.

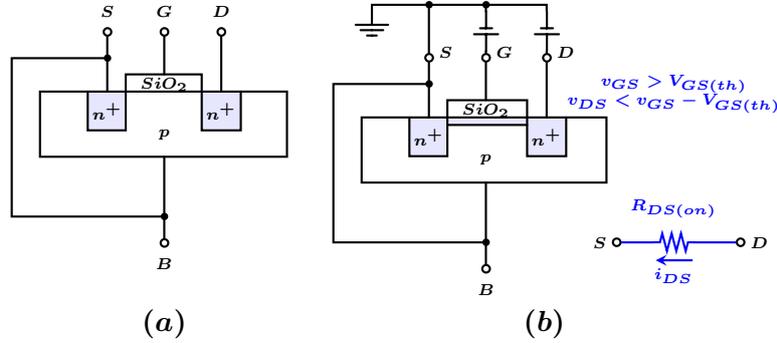


Figura A.2: (a) MOSFET (b) Alimentación que induce el canal N, y el modelo resistivo del MOSFET en la región óhmica.

El MOSFET tiene un diodo parásito o diodo del cuerpo entre cuerpo y drenador como se muestra en la Figura A.1(a). El modelo matemático de un diodo ideal, llamado modelo de Shockley, es el siguiente:

$$i_{BD} = I_{BDr} \left( e^{\frac{v_{BD}}{\eta V_{BD(th)}}} - 1 \right) \quad (\text{A.6})$$

donde  $\eta$  es un coeficiente de emisión o de calidad del diodo,  $I_{BDr}$  es la corriente de saturación y  $V_{BD(th)}$  es la tensión térmica entre el cuerpo (B) y el drenador (D) del MOSFET.

Se considera que el diodo del cuerpo puede estar en tres regiones de funcionamiento:

a) Región de corte:  $0 \leq v_{BD} \leq V_{BD(th)}$

$$i_{BD} = 0 \quad (\text{A.7})$$

b) Región directa (forward):  $v_{BD} > V_{BD(th)}$

$$i_{BD} = I_{BDr} e^{\frac{v_{BD}}{\eta V_{BD(th)}}} \quad (\text{A.8})$$

ya que  $v_{BD} \gg \eta V_{BD(th)}$  en el modelo ideal dado por A.6.

c) Región inversa (reverse):  $-V_r < v_{BD} < 0$  donde  $V_r$  la tensión de ruptura.

Puesto que  $v_{BD} \gg \eta V_{BD(th)}$  y  $v_{BD} < 0$ , entonces según el modelo ideal dado por A.6

$$i_{BD} = -I_{BDr} \quad (\text{A.9})$$

Los dispositivos semiconductores pueden ser representados mediante modelos matemáticos llamados de pequeña señal, utilizando una constante llamada punto Q o punto de sesgo (bias point) que escribiremos como  $V_Q$ .

Para el funcionamiento del diodo en su región directa podemos adoptar un modelo lineal resistivo que consiste en una aproximación lineal de la ecuación A.8:

$$i_{BD} = \frac{v_{BD} - V_{BD(th)}}{r_f} \quad (\text{A.10})$$

donde  $r_f$  representa una resistencia dada por

$$r_f = \frac{\eta V_{BD(th)}}{I_{Qf}} \quad (\text{A.11})$$

donde  $I_{Qf}$  es la corriente de sesgo (bias current o carrying current) que es el valor de la corriente que atraviesa el diodo cuando la tensión aplicada es  $V_{Qf}$ , el punto Q para el funcionamiento en la región directa del diodo.

Para deducir la relación A.11 lo que se hace es aproximar la ecuación del modelo ideal por una recta tangente a la curva en el punto de trabajo ( $V_{Qf}, I_{Qf}$ ). Es decir que la pendiente de la recta A.10 debe ser

$$\frac{1}{r_f} = \left. \frac{di_{BD}}{dv_{BD}} \right|_{v_{BD}=V_{Qf}} \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto teniendo en cuenta la ecuación A.6,

$$\frac{1}{r_f} = \frac{1}{\eta V_{BD(th)}} I_{BD} r e^{\frac{v_{Qf}}{\eta V_{BD(th)}}} \approx \frac{I_{Qf}}{\eta V_{BD(th)}} \quad (\text{A.13})$$

### A.1. Explicación del funcionamiento de los MOSFET de potencia en dispositivos de conmutación a alta frecuencia.

Para entender el funcionamiento de un puente en H implementado con MOSFET de potencia solo es necesario considerar algún modelo matemático para las regiones óhmica y de corte, así como la transición entre una y otra, ya que se supone que nunca debe estar en la región saturada (no confundir con los transistores bipolares con los que se trabaja en las regiones de corte y saturación). Diremos que un MOSFET está en *ON* cuando se encuentre en su región óhmica y en *OFF* cuando esté en su región de corte. Por otro lado el diodo parásito del cuerpo estará en ambos casos en la región de corte y por lo tanto es como si no estuviese.

Sin embargo, las anteriores ecuaciones solo son válidas cuando los MOSFET se encuentran en alguna de sus regiones de funcionamiento en régimen estacionario. En el análisis de un puente en H o cuando se utilizan los MOSFET para implementar convertidores cc-cc (continua a continua) es imprescindible tomar en consideración sus características dinámicas ya que las transiciones *ON* → *OFF* y *OFF* → *ON* no son instantáneas. Los fabricantes de estos dispositivos electrónicos suelen indicar que durante esta conmutación se produce un tiempo muerto (dead time) de una determinada duración. En esta situación algunos diodos del cuerpo del puente en H estarán en las regiones de funcionamiento directo e inverso pero ya no serán válidas las ecuaciones anteriores. Lo mismo ocurre con las ecuaciones anteriores del MOSFET. En ambos casos deberán incorporarse elementos capacitivos ya que en cualquier modo de funcionamiento de los semiconductores se inducen corrientes que quedan almacenadas de forma similar a como lo hacen los condensadores, y la descarga de estos condensadores no es instantánea. Los modelos matemáticos seguirán siendo lineales pero ya no serán simplemente resistivos.

## B. PWM bipolar real

Consideremos el tipo de PWM bipolar que se muestra en la Figura 3.3. Como se ha dicho en la Sección 2 puede presentarse un problema al conmutar de la zona  $Z^+$  a la zona  $Z^-$  o al revés, que consiste en cortocircuitar la fuente de alimentación. Esto puede producirse cuando todos los MOSFET se encuentran en su región óhmica. Para evitar esto se introduce en la señal PWM un breve tiempo muerto, que hemos llamado zona  $Z_0$ .

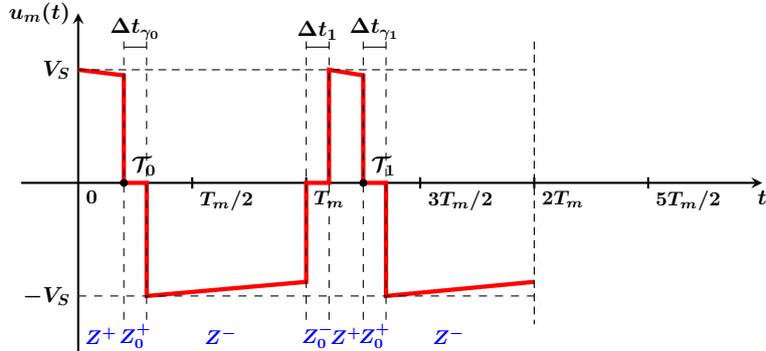


Figura B.1: Señal PWM con las zonas  $Z_0^+$  y  $Z_0^-$

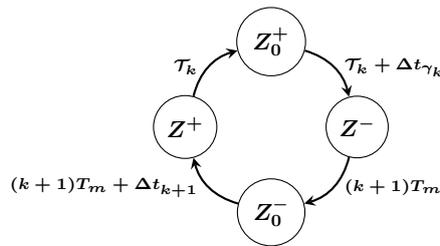


Figura B.2: Secuencia lógica del puente en H con los instantes de transición, comenzando en  $Z^+$

En la Figura B.1 se muestra una señal PWM más realista que la de la Figura 3.3. La Zona  $Z_0$  se ha subdividido en dos zonas, zonas  $Z_0^+$  y  $Z_0^-$  según que se haya dado inmediatamente antes la situación de las zonas  $Z^+$  y  $Z^-$  respectivamente. La zona  $Z_0^+$  solo opera cuando se realiza una conmutación de  $Z^+$  a  $Z^-$ , y la zona  $Z_0^-$  solo opera cuando se realiza una conmutación de  $Z^-$  a  $Z^+$ .

Ahora, las zonas  $Z_0^+$  y  $Z_0^-$  no son infinitesimales. Los tiempos  $\Delta t_{\gamma_k}$  y  $\Delta t_{\gamma_{k+1}}$  de la Figura B.1 son distintos de cero. La Figura B.2 muestra la secuencia lógica del puente en H indicando los instantes de tiempo en que se produce la conmutación de un estado a otro.

### B.1. Zonas $Z_0^+$ y $Z_0^-$

El puente en H entra en las zonas  $Z_0^+$  o  $Z_0^-$  cuando los MOSFET entran en la región de corte, es decir cuando  $I_D = 0$ .

Al entrar en la región de corte los MOSFET que estaban en la región óhmica han acumulado una carga  $Q_{rr}$  que debe desalojarse para que los MOSFET no se dañen al pasar los de la rama opuesta a la región óhmica.

Además, la armadura del motor está cargada debido a su inductancia, por lo que su carga también debe desalojarse, ya que la corriente deberá cambiar de sentido al abandonar las zonas  $Z_0^+$  o  $Z_0^-$ .

En ambos casos lo hará a través de los diodos del cuerpo de los MOSFET.

Las características de estos diodos hace que la corriente del motor tienda a cero, por lo que si no se produjese una conmutación a las zonas  $Z^+$  o  $Z^-$  el motor terminaría deteniéndose, y el filtro sensor de corriente descargaría sus condensadores, ya que  $i_H(t) = 0$ . Sin embargo la lógica del puente en H opera de tal manera que cuando transcurre un tiempo breve pone los MOSFET de una rama

en su región óhmica. Estos tiempos se representan en la Figura B.1 como  $\Delta t_{\gamma_k}$  para la zona  $Z_0^+$  y  $\Delta t_k$  para la zona  $Z_0^-$ .

No obstante, cuando se abandona las zonas  $Z_0^+$  o  $Z_0^-$  los valores de la corriente son casi nulos así como los de sus derivadas. Que el motor no se detenga se debe a que su constante de tiempo mecánica es muy grande (del orden de milisegundos) en relación al periodo de modulación (del orden de microsegundos). Sin embargo el filtro sí se verá ligeramente afectado por esta situación ya que sus constantes de tiempo son comparables a las del periodo de modulación.

El paso a la zona de corte se hace cambiando la tensión de la puerta (G) del MOSFET a un valor muy bajo o negativo. En ese momento se produce la conducción del diodo en modo directo (free-wheeling) durante un tiempo con una corriente  $I_f$ , tras el cual la corriente decaerá a cero de manera lineal y continuará hasta hacerse negativa. El diodo comienza entonces a conducir en modo inverso durante un tiempo de almacenamiento  $t_{rr}$  (reverse recovery time o storage time) en que la corriente tenderá exponencialmente a cero. Este tiempo es el que tarda en desalojar la carga en exceso  $Q_{rr} = t_{rr}I_{RM}/2$  donde  $I_{RM} < \sqrt{I_f}$  (o  $I_{rr}$ ) es la corriente de pico negativa que circula por el diodo. Cuando la corriente decae a cero tras el modo directo, la tensión en el diodo sufre una sobreelongación cuyo pico se alcanza en el tiempo  $t_{fr}$  (forward recovery time), a la que le sigue una oscilación amortiguada hasta alcanzar un valor constante. Cuanto mayor sea la duración del transitorio más lento será el desalojo de la carga.

## C. Modelo CVS de fricción de un motor DC

El modelo clásico de fricción o **modelo CVS** (Coulomb plus Viscous plus Static friction) consta de tres componentes, el par de fricción seca o fricción de Coulomb  $\tau_{fC}$ , el par de fricción viscosa  $\tau_{fV}$  y el par de fricción estática  $\tau_{fS}$  (stiction o static friction),

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + \tau_{fS}(t) \quad (\text{C.1})$$

donde

$$\tau_{fV}(t) = B_m \dot{\theta}_m(t) \quad (\text{C.2a})$$

$$\tau_{fC}(t) = \tau_C \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_m(t)) \quad (\text{C.2b})$$

$$\tau_{fS}(t) = \begin{cases} k_m i(t) - \tau_l(t), & k_m |i(t)| \leq \tau_S, \quad \dot{\theta}_m(t) = \ddot{\theta}_m(t) = 0 \\ \tau_S \operatorname{sgn}(i(t)) - \tau_l(t) - J_m \ddot{\theta}_m(t), & k_m |i(t)| > \tau_S, \quad \dot{\theta}_m(t) = 0, \quad \ddot{\theta}_m(t) \neq 0 \\ 0, & \dot{\theta}_m(t) \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.2c})$$

Los parámetros  $(B, \tau_C, \tau_S)$  representan las constantes de fricción viscosa, de Coulomb y estática respectivamente.

La función signo,  $\operatorname{sgn} x$ , para cualquier función  $x$ , se define como

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Cuando  $x \neq 0$ , la función signo puede escribirse en la forma

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} \quad (\text{C.4})$$

Un modelo de fricción, también clásico, incluye el efecto de Stribeck que se produce a velocidades angulares cercanas al cero. Incluyendo este efecto, el par de fricción  $\tau_f(t)$  suele representarse en la forma,

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + (\tau'_{fS}(t) - \tau_{fC}(t)) e^{-\left| \frac{\dot{\theta}_m(t)}{\dot{\theta}_{St}} \right|^{\delta_{St}}} \quad (\text{C.5})$$

donde ahora  $\tau'_{fS}(t) = \tau_S \operatorname{sgn}(i(t)) - \tau_l(t) - J_m \ddot{\theta}_m(t)$ , y donde  $\dot{\theta}_{St}$  es la velocidad angular de Stribeck y  $\delta_{St}$  la constante de Stribeck. El factor exponencial de la derecha es despreciable cuando las velocidades angulares superan un cierto valor pequeño.

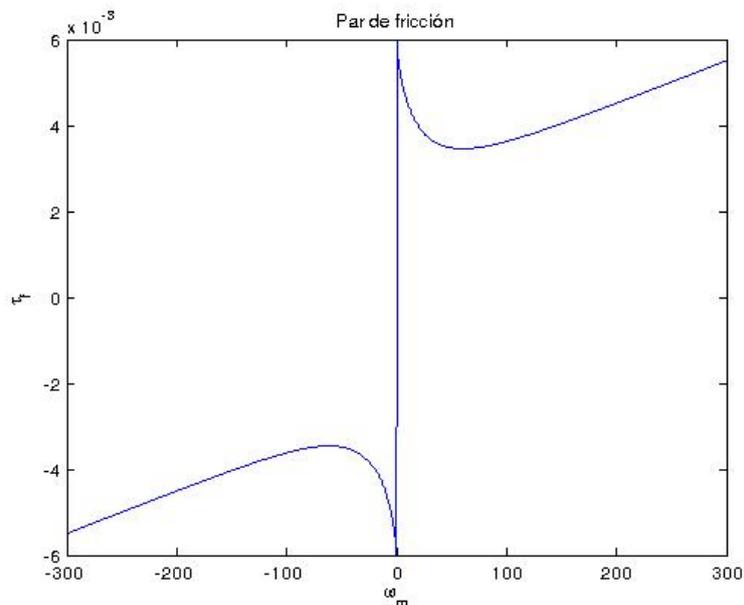


Figura C.1: Par de fricción dado por C.5 en función de  $\dot{\theta}_m$

En la Figura C.1 se muestra la curva del par de fricción  $\tau_f$  en función de  $\dot{\theta}_m$ , dado por la función C.5. Esta curva se ha obtenido con valores arbitrarios, concretamente con  $\tau_S = 0,006$ ;  $B_m = 0,00001$ ;  $\tau_C = 0,0025$ ;  $\dot{\theta}_{St} = 20rpm$ ;  $\delta_{St} = 0,75$ . Se ha supuesto también que  $\tau_l = \ddot{\theta}_m = 0$  y que  $\text{sgn}(i) = \text{sgn}(\dot{\theta}_m)$ . Puede observarse que se ha elegido  $\tau_S > \tau_C$  como suele ser el caso en los motores reales.

El modelo CVS, es decir, sin considerar el efecto de Stribeck, puede simularse aproximadamente con la ecuación,

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + (\tau'_{fS}(t) - \tau_{fC}(t)) e^{-\alpha|\dot{\theta}_m(t)|} \quad (\text{C.6})$$

donde  $\alpha$  sea un valor muy elevado.

El par de fricción estática actúa cuando el eje del motor está inmóvil o cuando hay un cambio en el sentido de giro del eje del motor (cuando la aceleración angular  $\ddot{\theta}_m(t) \neq 0$ ). Como vemos, lo que hace el par de fricción estática  $\tau_{fS}$  en la situación de arranque del motor, es impedir el movimiento del eje del motor hasta que la corriente eléctrica supere un valor constante. La variación temporal se debe a la variación de la corriente eléctrica  $i(t)$ , es decir que en el arranque,  $i(t) \neq 0$ , y puede calcularse a partir de la ecuación eléctrica del motor.

En esta situación de fricción estática la ecuación eléctrica toma la forma

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{C.7})$$

Si se hace  $u_m(t) = U_a$ , donde  $U_a$  es una constante, la corriente eléctrica tenderá en régimen permanente a un valor  $U_a/R_m$ . Si este valor es menor que  $\tau_S/k_m$  el motor permanecerá inmóvil. Esto significa que habrá una tensión de arranque (break-away voltage o starting voltage) a partir de la cual el motor comenzará a moverse, pero permanecerá inmóvil por debajo de ella. Este fenómeno puede apreciarse introduciendo al motor una tensión en forma de rampa de pequeña pendiente. Se producirá entonces un retardo temporal en la velocidad angular del motor, que durará hasta que la corriente eléctrica alcance un determinado valor.

Llamaremos  $\tau_c(t)$  a

$$\tau_c(t) = \tau_{fS}(t) + \tau_{fC}(t) + \tau_l(t) \quad (\text{C.8})$$

Con esta definición la ecuación mecánica del motor queda representada en la forma

$$k_m i(t) = J_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} + \tau_c(t) \quad (\text{C.9})$$

## D. Modelo de carga de un motor DC de un grado de libertad

Consideremos que la carga está unida al eje del motor a través de un mecanismo reductor de factor de reducción  $r \in (0, 1)$  y rendimiento  $\eta \in (0, 1)$  (o expresado en tanto por ciento). Entonces la velocidad angular  $\theta_L(t)$  y el par de la carga  $\tau_L(t)$  a la salida del reductor estarán relacionados con  $\theta_m(t)$  y  $\tau_l(t)$  en el eje del motor (o entrada del reductor) según las siguientes expresiones:

$$\theta_L(t) = r\theta_m(t) \quad (D.1a)$$

$$\tau_L(t) = \frac{\eta}{r}\tau_l(t) \quad (D.1b)$$

Consideremos que la carga es un cuerpo rígido cuya ecuación dinámica puede ser expresada en la forma

$$\tau_L(t) = J_L \frac{d^2\theta_L(t)}{dt^2} + \tau_g(t) \quad (D.2)$$

donde  $J_L$  es el momento de inercia de la carga y  $\tau_g(t)$  es una función no lineal dependiente de la posición angular  $\theta_L(t)$  que representa los efectos gravitacionales<sup>2</sup>.

Podemos expresar esta ecuación en términos de  $\theta_m(t)$  y  $\tau_l(t)$ ,

$$\tau_l(t) = \frac{r^2 J_L}{\eta} \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + \frac{r}{\eta} \tau_g(t) \quad (D.3)$$

Introduciendo esta ecuación en la ecuación mecánica del motor dada por 4.2

$$k_m i(t) = J_{eff} \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} + \tau_c'(t) \quad (D.4)$$

donde  $J_{eff}$  se denomina momento de inercia eficaz,

$$J_{eff} = J_m + \frac{r^2 J_L}{\eta} \quad (D.5a)$$

$$\tau_c'(t) = \tau_{fS} + \tau_{fC} + \frac{r}{\eta} \tau_g(t) \quad (D.5b)$$

A partir de estas expresiones puede rehacerse el modelado del motor sin carga. La constante de tiempo mecánica del motor con carga se modificará con respecto al motor sin carga, pero los parámetros  $R_m, L_m, J_m, k_b, k_m, B_m, I_0, n_0, t_e$  seguirán siendo los mismos.

Podemos observar que el momento de inercia del motor se refleja a la entrada del reductor con un coeficiente que será tanto más pequeño cuanto menor sea el factor de reducción. Por ejemplo, un reductor que se adapta al motor estudiado en el ejemplo de la Sección 8, tiene un factor de reducción  $r = \frac{1}{18,2}$  con un rendimiento  $\eta = 73\%$  y una masa  $m_r = 71 \times 10^{-3} kg$ . Puede comprobarse que

$\frac{r}{\eta} = 0,07527$  y  $\frac{r^2}{\eta} = 0,00414$  por lo que el efecto inercial y gravitatorio de la carga visto desde el eje del motor se reducen mucho. No obstante no debe despreciarse ninguno de ellos si se desea una gran precisión, además de que normalmente el momento de inercia del motor  $J_m$  suele ser muy pequeño.

Para el cálculo de  $J_L$  puede hacerse la suposición aproximada de que la masa del reductor forma parte de ella. Por ejemplo, si la carga es un disco plano, el momento de inercia respecto de su eje central viene dado por la ecuación  $I_0 = \frac{1}{8} m d^2$ , siendo  $d$  su diámetro y  $m$  su masa. Por lo tanto, puede hacerse la aproximación

$$J_L = \frac{1}{8} (m_{disco} + m_{reductor}) d^2$$

donde  $m_{reductor}$  debe ser la masa de la parte rotatoria del reductor, es decir que no coincide con  $m_r$  que es la masa total del reductor.

<sup>2</sup>En un sistema mecánico pueden aparecer también términos de Coriolis dependientes de la velocidad angular. Si la carga es un sistema mecánico de varios grados de libertad el momento de inercia no será constante sino que dependerá de la posición angular.

En la práctica el cálculo de los parámetros de la carga no es sencillo y en muchas ocasiones no se dispone de los valores necesarios. Este hecho sugiere la necesidad de realizar estudios experimentales para el cálculo de los polos del motor con carga.

Una consecuencia de este estudio es que si se realizase un experimento para obtener el polo dominante podría estimarse el valor de  $J_{eff}$ , y de aquí, si se conociese el diámetro del disco, podría obtenerse una estimación de su masa, lo que puede resultar conveniente para conocer aproximadamente el valor del par debido a los efectos gravitacionales. Si el centro de masas de la carga se situase en el eje de rotación del motor, el efecto gravitacional será nulo. En la práctica esto no es así, pero puede suponerse en una primera aproximación nulo cuando la carga sea un disco o un cuerpo con simetría de revolución cuyo centro de masas cae en el eje del motor.

En el ejemplo de la Sección 8, con el reductor seleccionado anteriormente, se obtiene un valor de  $J_{eff} = 1,47 \times 10^{-6} Kg/m^2$ . Estos calculos se han realizado suponiendo que la carga es un disco de aluminio de anchura  $a = 1,5mm$  y diámetro  $d = 7,5cm$ , y se ha calculado de manera arbitraria  $m_{reductor} = 0,1m_r$  ya que no se dispone de información. La densidad del aluminio es  $\rho = 2700Kg/m^3$ . La constante de tiempo mecánica eficaz es  $t_{meff} = 0,0158s$ , por lo que el polo del modelo simplificado con el método de eliminación de la constante eléctrica es  $p_{eff} = -63,38$ .

Para el cálculo de  $t_{meff}$  se ha aplicado la expresión 4.17

$$t_{meff} = \frac{R_m J_{eff}}{R_m B_m + k_b k_m} \quad (D.6)$$