LABORATORIO DE SISTEMAS DE CONTROL (Memoria)

Ariadna García Estívaliz
Daniel García Loria

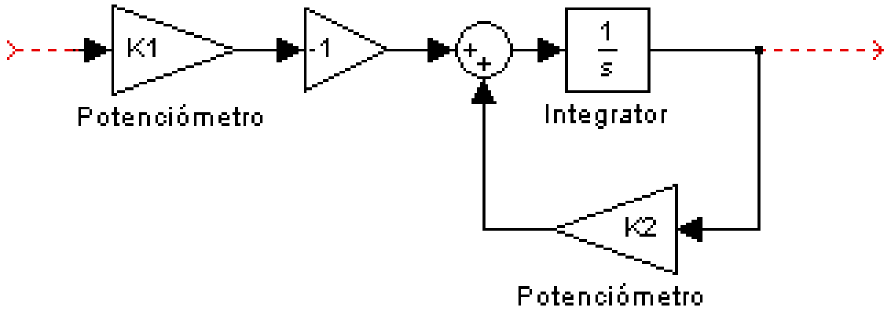
ÍNDICE

MEMORIA DE LSIC

MODELADO DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

Método 1) Estudio de un sistema de primer orden en el dominio del tiempo

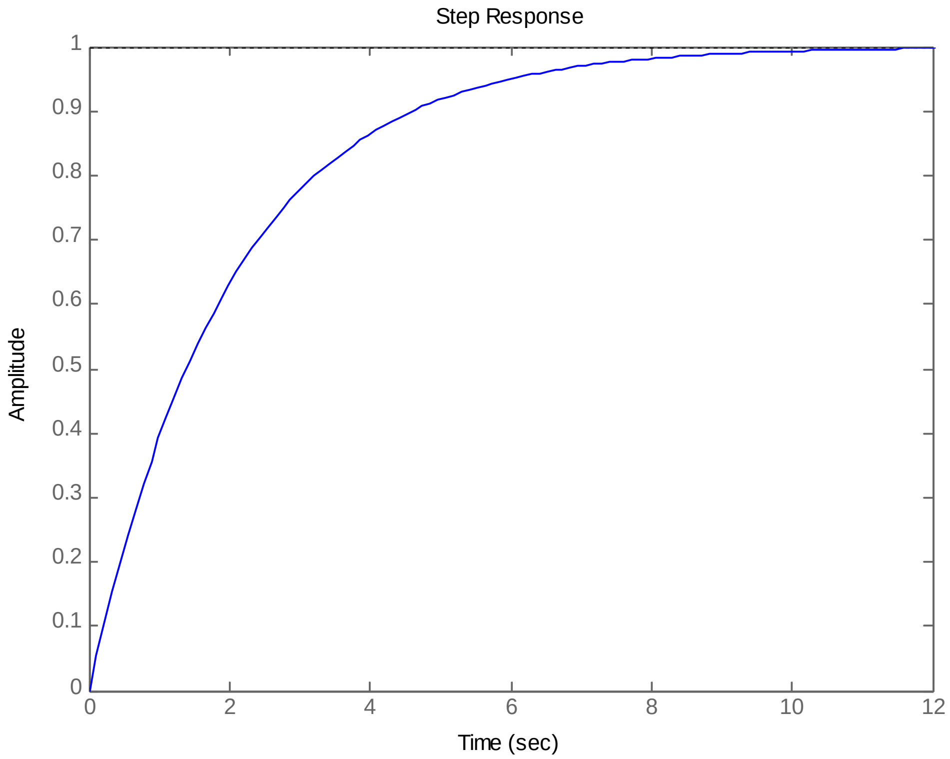
Nuestro primer estudio corresponde al siguiente circuito:



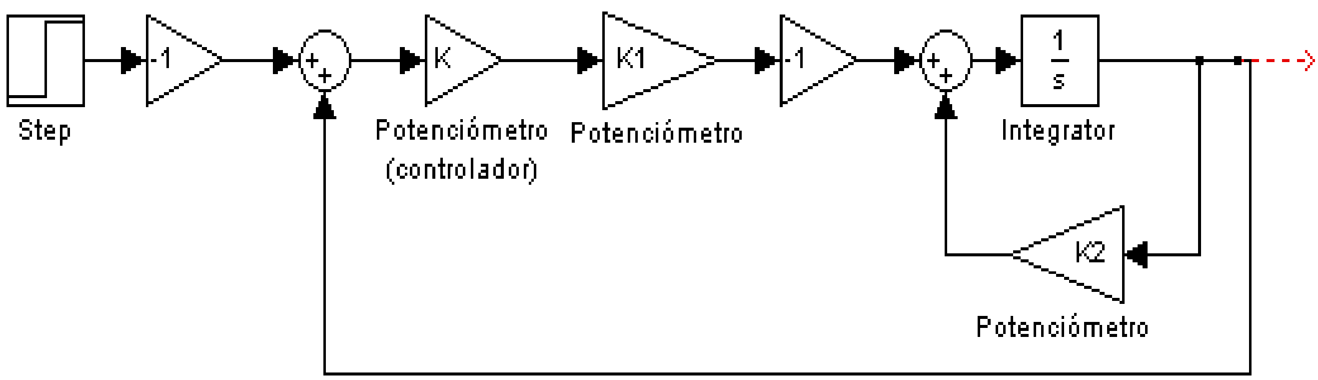
Si hallamos la función de transferencia de éste circuito, tomando como valores ideales $K_1 = K_2 = 0.5$, obtenemos:

$$G(s) = \frac{0.5}{s + 0.5}$$

la cual vemos que tiene ganancia unidad. Si dibujamos la respuesta al escalón de ésta función utilizando MATLAB con los citados valores ideales tenemos:



Si no tuviéramos los valores de K_1 y K_2 , vamos a demostrar que se podría obtener la ganancia de éste sistema de primer orden (y de cualquiera) realimentando el circuito con un controlador proporcional. Es lo que llamaremos Método realimentado con control proporcional. Para ello nuestro esquema será el siguiente:



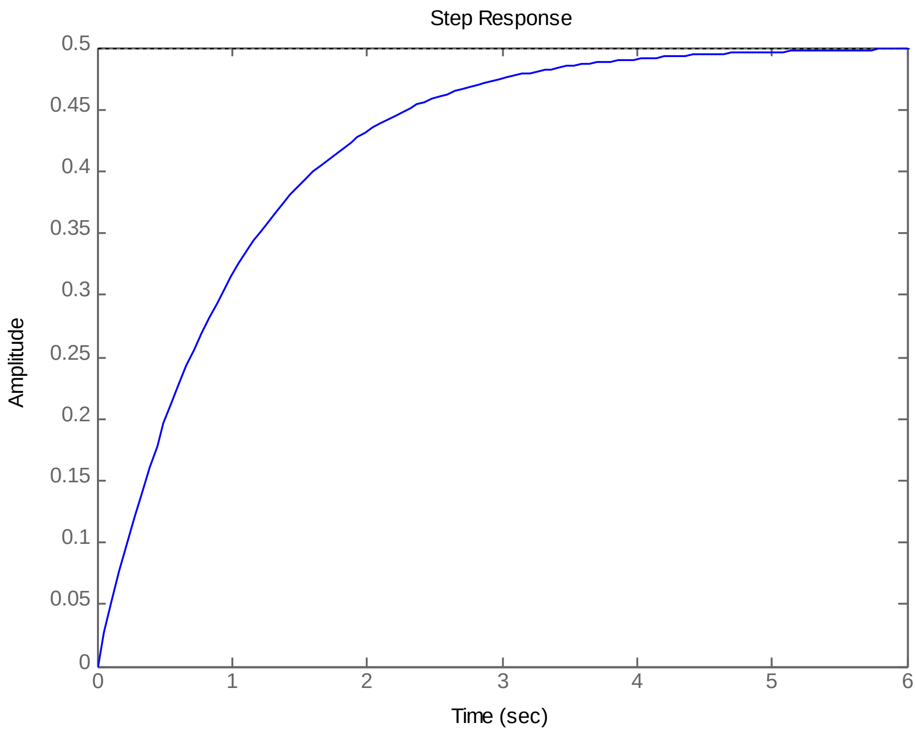
Si llamamos *r(t)* a la señal de entrada que vamos a introducir nosotros (el escalón), *y(t)* a la salida y *e(t)* a la entrada al circuito de primer orden con su controlador K, podemos deducir la función de transferencia de éste nuevo circuito realimentado con un controlador proporcional de ganancia K=1. Partiendo de éstas dos ecuaciones:

$$\mathrm{r}(t) - \mathrm{y}(t) = \mathrm{e}(t)$$

$$\mathrm{Y}(s) = \mathrm{E}(s)\, K\, \mathrm{G}(s)$$

Operando, la función de transferencia quedará: $\mathrm{H}(s) = \dfrac{K\,K1}{s + K2 + K\,K1}$

Si calculamos la respuesta ideal al escalón de ésta función con MATLAB obtenemos el siguiente resultado:



Que si la comparamos con la entrada al escalón apreciamos que hay una diferencia de 0.5 V en el régimen permanente, lo que corresponde al error en régimen permanente. Si calculamos éste error mediante el teorema del valor final aplicado sobre la señal de entrada *e(t)*, podremos relacionarlo con la ganancia del circuito de primer orden para poder calcularla:

Sabiendo además que: $E(s) = \dfrac{R(s)}{1 + K\,G(s)}$

Por el teorema del valor final: $err = \lim\limits_{t \to \infty} e(t)$

Si pasamos al dominio de Laplace y hacemos que *r(t)* sea el escalón:

$$err = \lim_{s \to 0} s\,E(s)$$

$$err = \lim_{s \to 0} \frac{s\,R(s)}{1 + K\,G(s)}$$

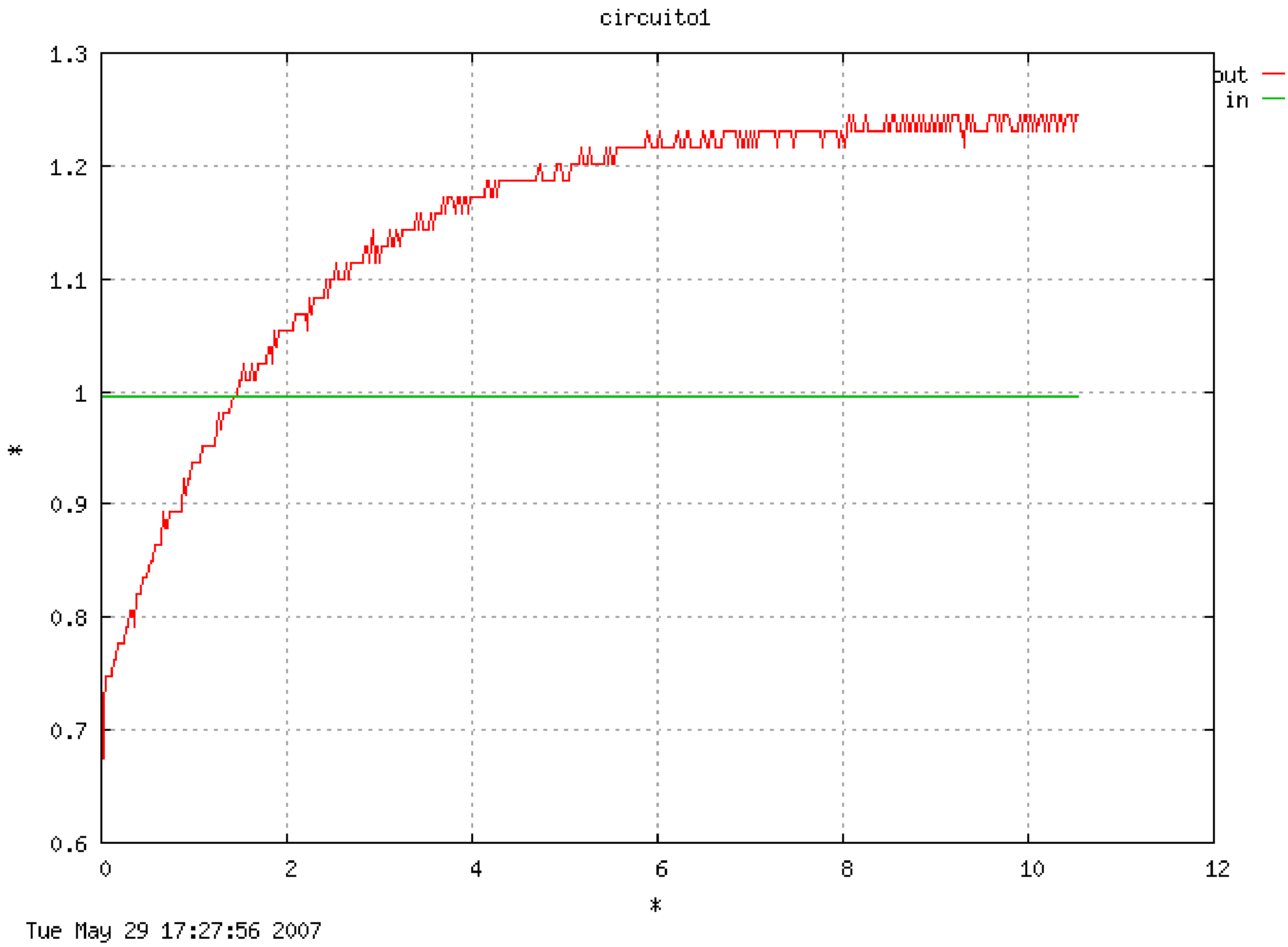
$$err = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + K\,G(s)}$$

$$\frac{1}{1 + G(0)} = \frac{1}{2}$$

De donde obtenemos por fin que la ganancia es G(0)=1, como queríamos demostrar.

Utilizando valores reales en el laboratorio, podemos ver que el resultado se parece bastante a lo que hemos hecho con valores ideales en MATLAB. Montamos el circuito de primer orden con los siguientes valores de los potenciómetros medidos con el osciloscopio: $K_1 = 0.480\ V$, $K_2 = 0.505\ V$ y K = 1 (ganancia del controlador proporcional). Y obtuvimos la respuesta al escalón que aparece en la página siguiente.

En la gráfica se puede apreciar la respuesta del circuito realimentado al escalón y la propia señal escalón de entrada. Se ve que al igual que con los valores ideales la diferencia se entre las dos señales se aproxima bastante a 0.5 *V*. Luego por el mismo método de cálculo del error la ganancia sigue siendo G(0) = 1



Método 2) Modelado de un sistema de primer orden en el dominio de la frecuencia

Éste método consistirá en el estudio de la respuesta del circuito de primer orden a una entrada sinusoidal en lazo abierto, que nos permitirá estimar la ganancia (K/T) y el polo (T) de un sistema de primer orden, mediante el cálculo del desfase entre la señal de entrada y la de salida. Con éste método podremos calcular la función de transferencia del motor, si lo modelamos como un sistema de primer orden de tipo:

$$H(s)= \frac{K}{s+T}$$

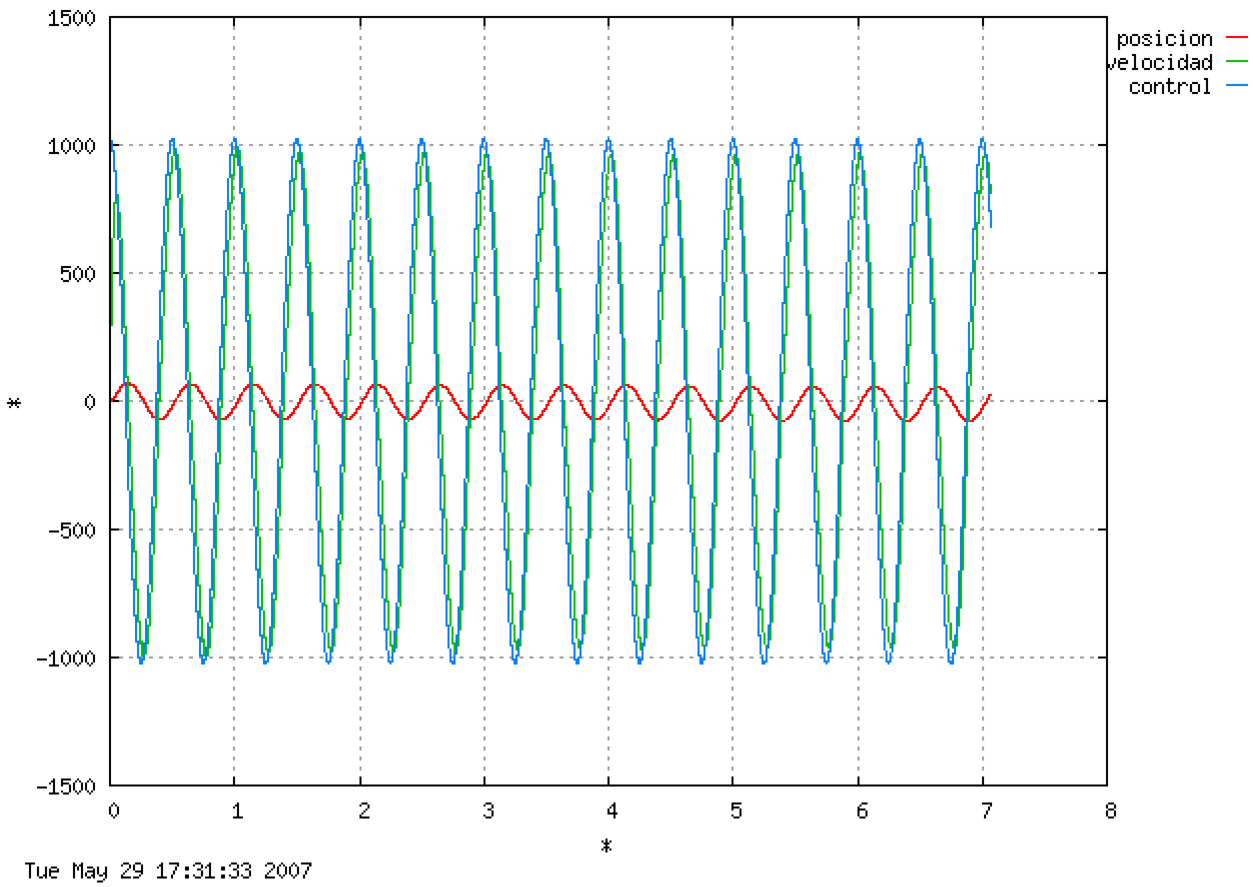
Vamos a introducir señales senoidales de diferente frecuencia para realizar una estimación del polo con los diferentes valores que obtengamos para distintas frecuencias.

1.- Introducimos un seno de frecuencia 2 Hz y amplitud 5 V. La gráfica la podemos ver en la figura motorseno. Observamos con una ampliación que la ganancia es 0.94 y que el desfase $\phi = 2\pi f \Delta t = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 0.02 = 0.25$ rad. Con éste desfase podemos calcular el polo utilizando la siguiente expresión:

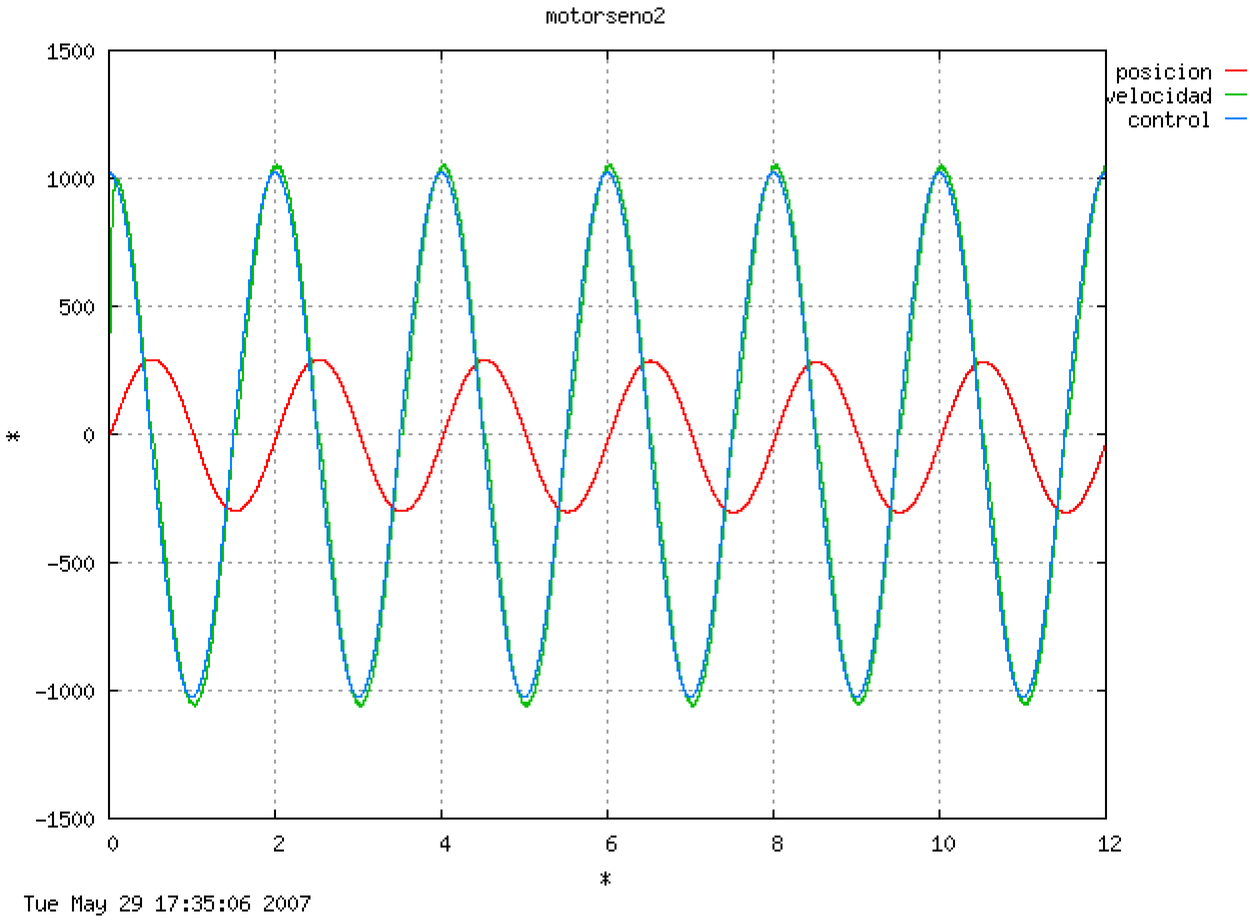
$$T = \frac{\omega}{\mathrm{tg}\ \phi}$$

Así tenemos finalmente el polo en T=-49.21.

motorseno



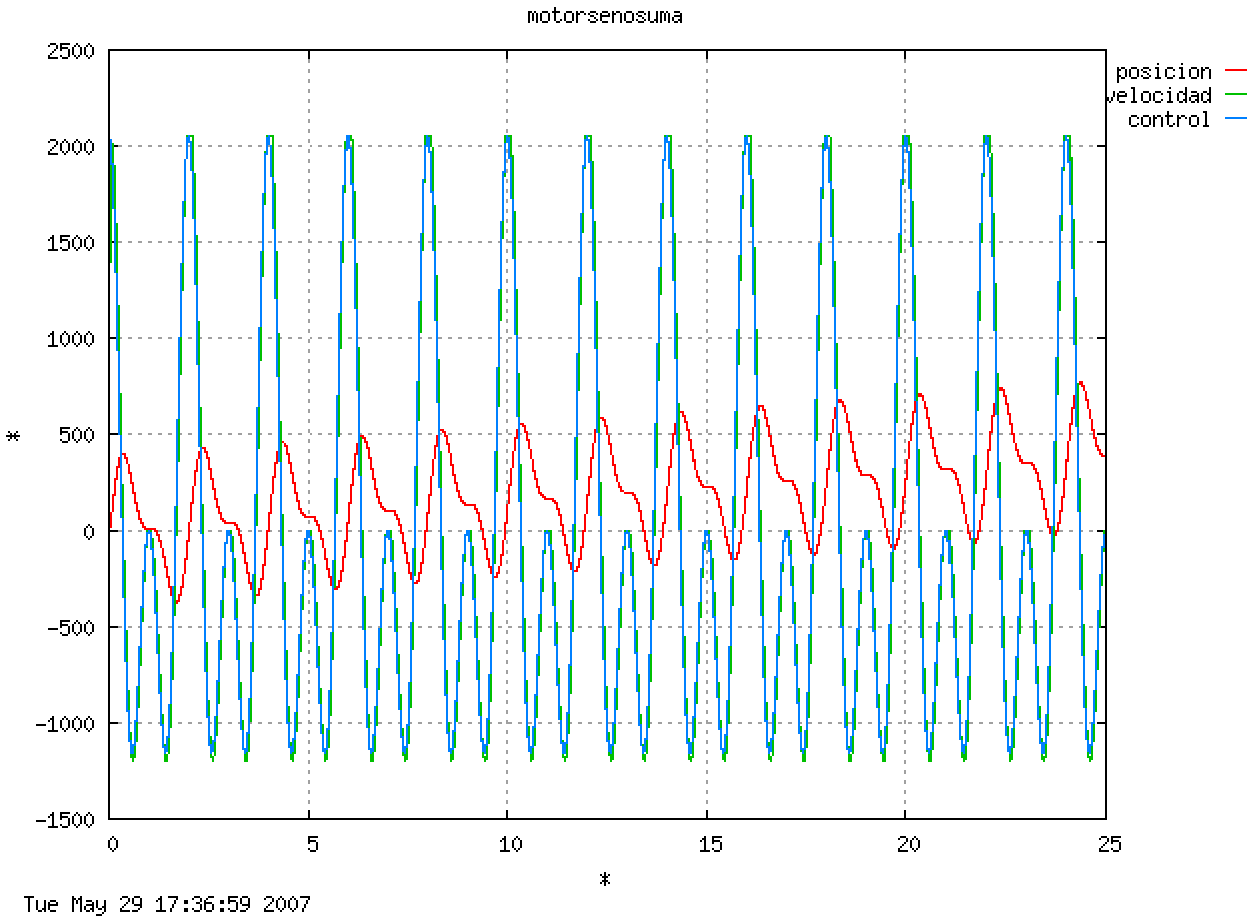
2.- Ahora aplicamos una señal senoidal de frecuencia 0.5 Hz y 5 V de amplitud. Obteniendo un valor de ganancia de 0.92 y el polo situado en T= -44.45. Como se puede observar en la gráfica motorseno2.



3.- Probamos por último una suma de senos de diferente frecuencia a 0.5 Hz y a 1 Hz pero de igual amplitud 5V. Esto lo hicimos para poder obtener la ganancia y el polo mediante una opción del programa de representación gráfica del laboratorio. La gráfica motorsenosuma muestra el resultado. Los valores fueron:

f= 0.5Hz → ganancia= 0.9028, T= -42.92

f= 1Hz → ganancia= 0.923 , T=-42.194



Finalmente tomamos como valores definitivos:

Ganancia= 0.92

Polo= -44.5

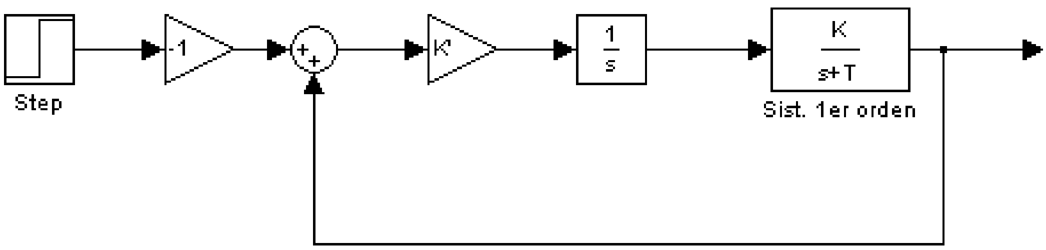
Método 3) Método realimentado con control integral. Entrada escalón.

Para éste estudio consideramos conocida la ganancia por los métodos anteriores. Vamos a estudiar el siguiente sistema de primer orden:

$$H(s)= \frac{K}{s+T}$$

Como sabemos que la ganancia del sistema es 1, podemos obtener una primera relación: $K \cdot T^{-1} = 1$.

Podríamos calcular el polo mediante el estudio de la respuesta al escalón del siguiente sistema:



Cuya función de transferencia total quedaría:

$$G(s) = \frac{K'K}{s^2 + Ts + K'K}$$

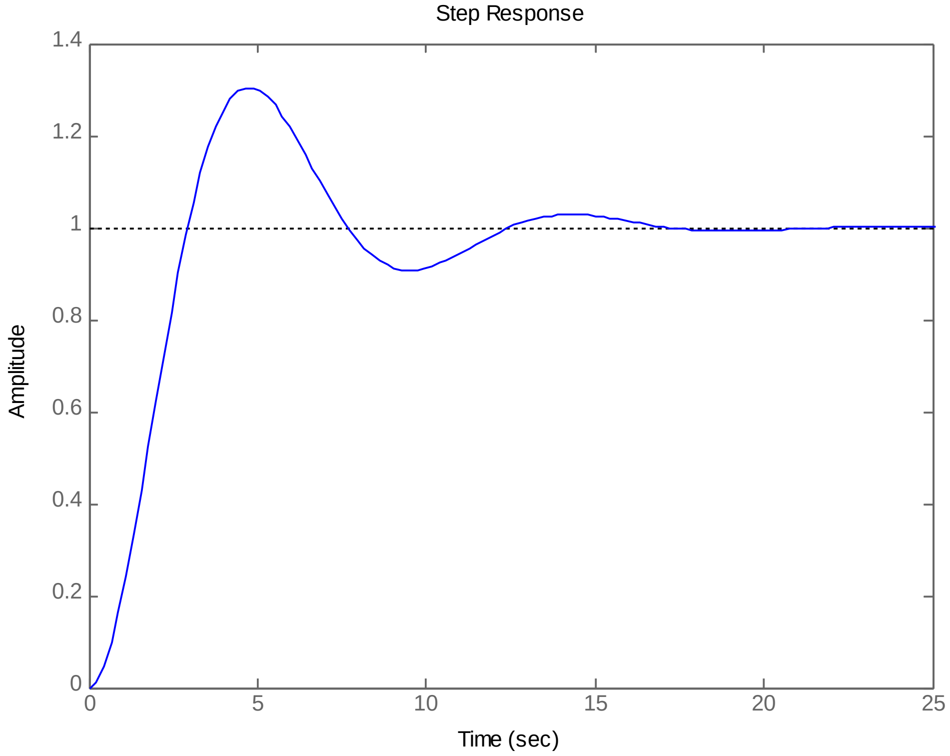
Si dibujamos las respuestas al escalón para diferentes valores de K' (gráficas siguientes para valores 1, 0.2 y 0.125, respectivamente) vemos que a partir de K'= 0.125 comenzaría a oscilar (coeficiente de amortiguamiento, $\varphi = 1$), así podemos calcular el polo mediante la expresión que obtenemos de la ecuación de transferencia general de un sistema de 2º orden:

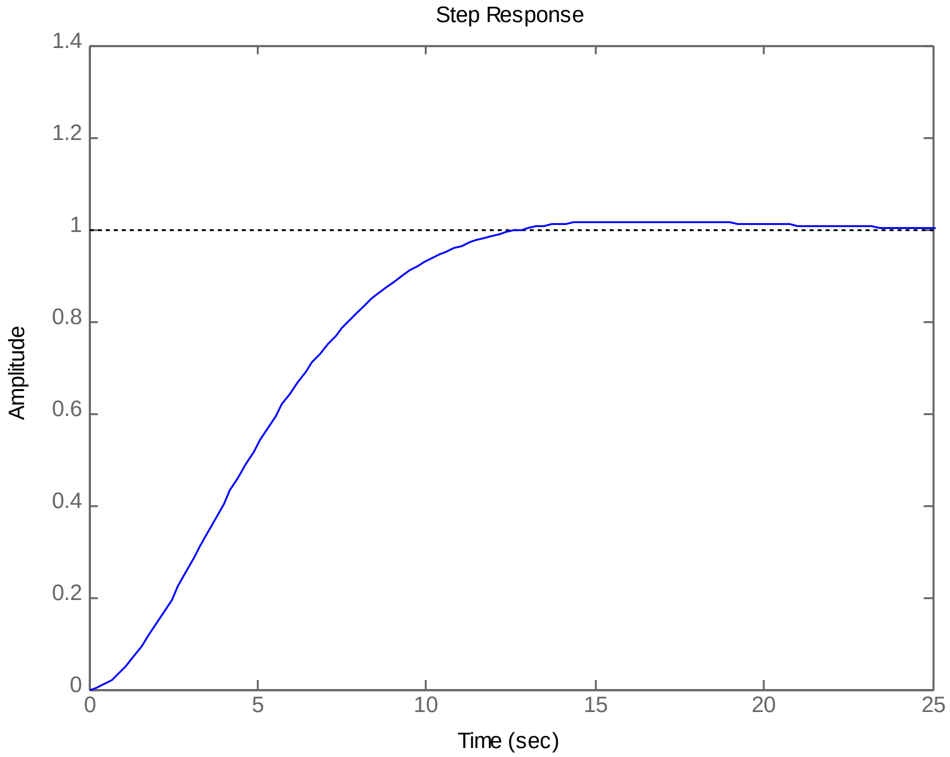
$$T = 2 \cdot \varphi \cdot \omega_n$$

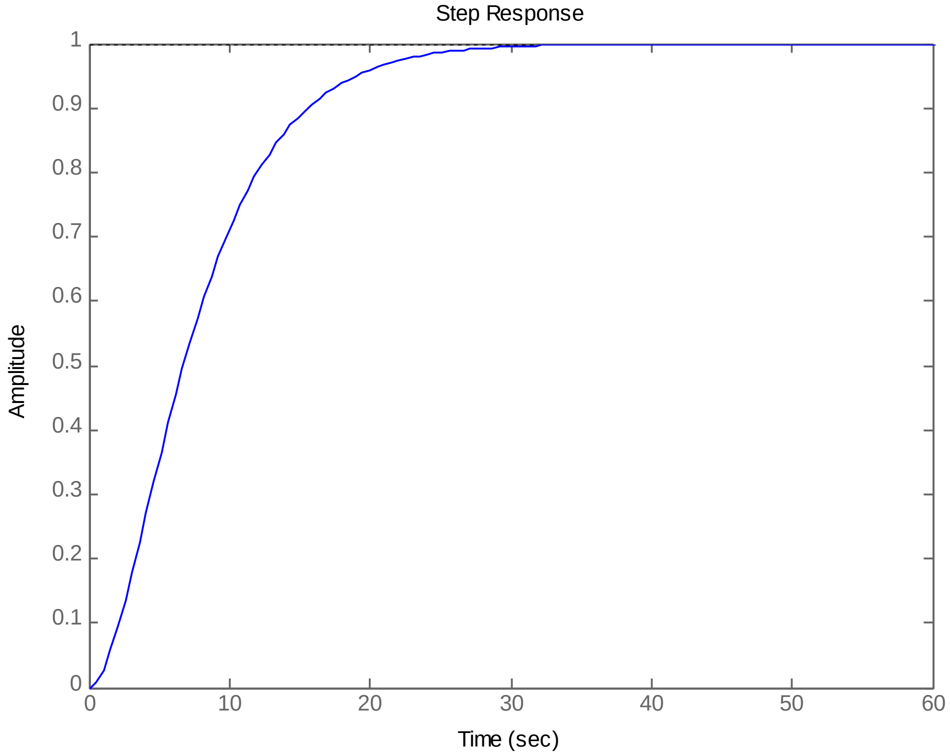
Y sabiendo que: $\omega_n = \sqrt{(K' \cdot K)}$

Finalmente tenemos la segunda expresión: $T = 2 \cdot \sqrt{(K' \cdot K)}$

Así obtenemos, mediante éstas dos ecuaciones K=T= 0.5


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
5
10
15
20
25


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
5
10
15
20
25



DISEÑO DEL CONTROLADOR

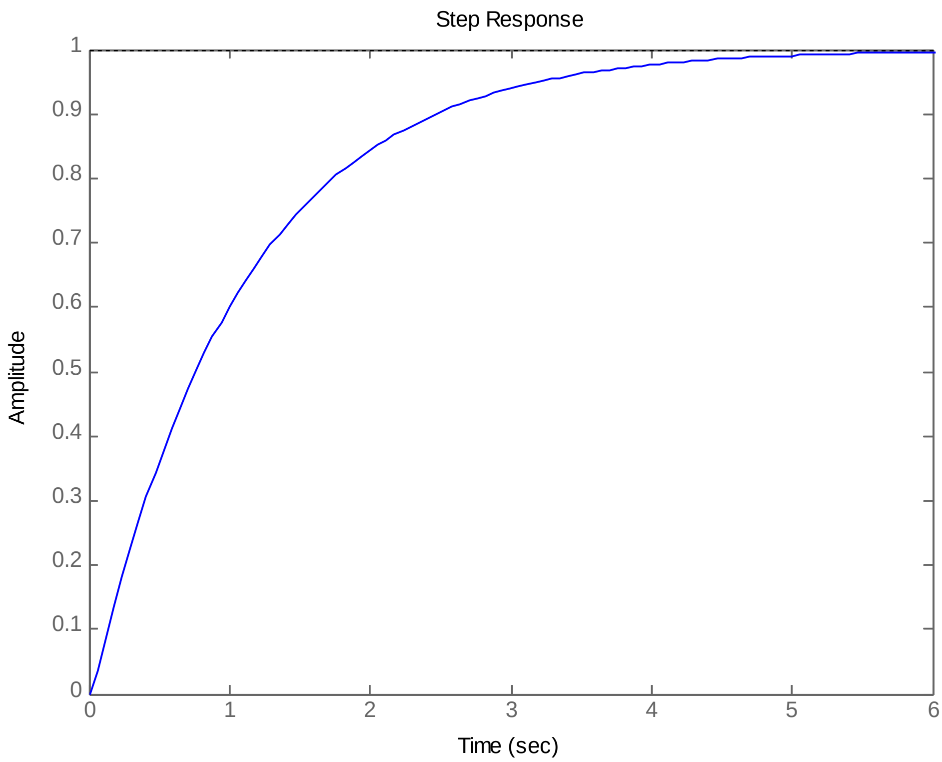
INTRODUCCIÓN

Vamos a diseñar un controlador de tipo PID para el motor en posición, a fin de obtener una respuesta que satisfaga nuestras especificaciones. Unas especificaciones razonables para la respuesta al escalón serían: una sobre-elongación entre 15-20%, y un tiempo de establecimiento lo más pequeño posible.

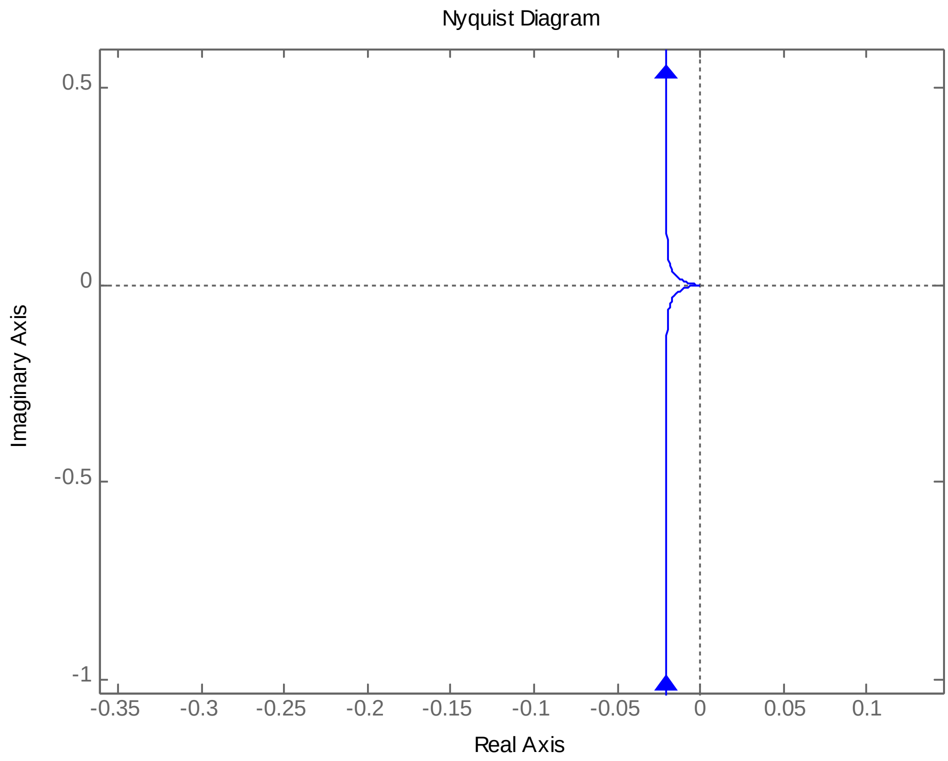
Modelando el motor hemos podido calcular su función de transferencia en lazo abierto.

$$\mathrm{H}(s) = 40.940\,\frac{1}{s\,(s+44.5)}$$

La ganancia del motor vale 0.92 y el polo estará en -44.5. Y su respuesta al escalón en lazo cerrado, utilizando MATLAB será:



Hay muchos métodos para diseñar un controlador. Vamos a diseñar el nuestro utilizando el método de Ziegler-Nichols, que ofrece un diseño de controladores de tipo PID modificando los parámetros proporcional, integral y derivativo. Para ello nos basamos en el diagrama de Nyquist de la función de transferencia del motor en posición:



DISEÑO

El procedimiento a seguir es:

- Vamos a escoger un punto A de la gráfica en función de la frecuencia de trabajo. En las prácticas se ha visto que a altas frecuencias el motor no funciona bien, así que aproximadamente sabemos que a partir de 0.2 Hz funciona bien, y al llegar a 4.5 Hz comienza a ser difícil su estudio, así que elegimos W_0=18.85 rad/s, que corresponde a una f_0= 3 Hz.

$$G_p(j\ \omega_o) = A = r_a e^{j(\pi+\phi_a)}$$

- Elegimos a ojo otro punto, que llamaremos B, de la gráfica al que suponemos que se debería desplazar A para cumplir los requisitos exigidos

$$G_l(j\ \omega_o) = B = r_b e^{j(\pi+\phi_b)}$$

- Ahora calculamos el vector complejo que desplazaría dicho punto y que sería la respuesta del controlador:

$$G_c(j\ \omega_o) = C = r_c e^{j\phi_c}$$

Este punto C cumple que:

$$r_b e^{j(\pi+\phi_n)} = r_a r_c e^{j(\pi+\phi_a+\phi_c)}$$

Si identificamos cada término, obtenemos el módulo y la fase de la respuesta del controlador en función de los puntos inicio y destino:

$$r_c = \frac{r_b}{r_a}$$

$$\phi_c = \phi_b - \phi_a$$

- En función del módulo y fase del punto C calculamos los parámetros del controlador PID:

$$K_p = r_c \cos(\phi_c)$$

$$\omega_o T_d - \frac{1}{\omega_o T_i} = tg(\phi_c)$$

Para hallar el valor de Td y Ti sólo tenemos una ecuación. Uno de los métodos que más se usan para hallarlos es usar la relación Td=αTi. Sustituyendo en la ecuación anterior y dejando como única incógnita Ti, nos queda una ecuación cuadrática, cuya solución positiva es:

$$T_i = \frac{\frac{\tan(\phi_c)}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\tan(\phi_c)}{\alpha}\right)^2 + \frac{4}{\alpha}}}{2 \cdot w}$$

Una vez hallados estos parámetros, ya puedo escribir la función de transferencia del controlador PID:

$$G_c(jw) = K_p \cdot \left(1 + s \cdot T_d + \frac{1}{T_i \cdot s}\right)$$

Estas son las pruebas que hicimos en el laboratorio:

1º) Elegimos un punto A= -0.0175-j0.0415, que corresponde a una frecuencia de 3 Hz para el diagrama de Nyquist de la función de transferencia del motor.

El módulo de A es 0.045 y su fase 4.314 rad.

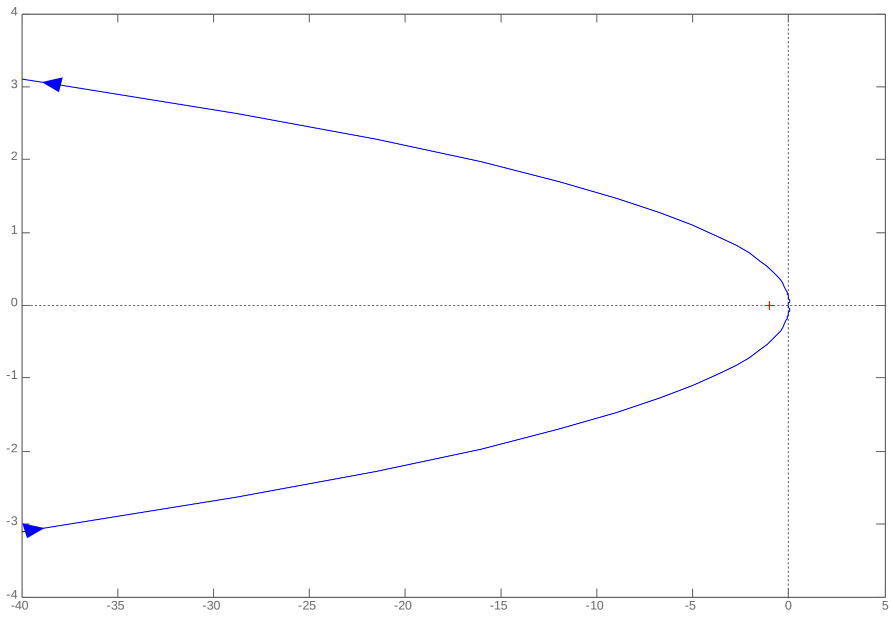
Ahora buscamos un punto B cuya fase sea mayor que la de A para asi asegurar que la tangente de la diferencia sea positiva y la constante de integración también. La fase del punto escogido es 4.5 rad. Con este valor, utilizando las ecuaciones anteriores y tomando α=0.25 hallamos el valor de T_i = 0.128 y, por tanto, también el valor de T_d = 0.032.

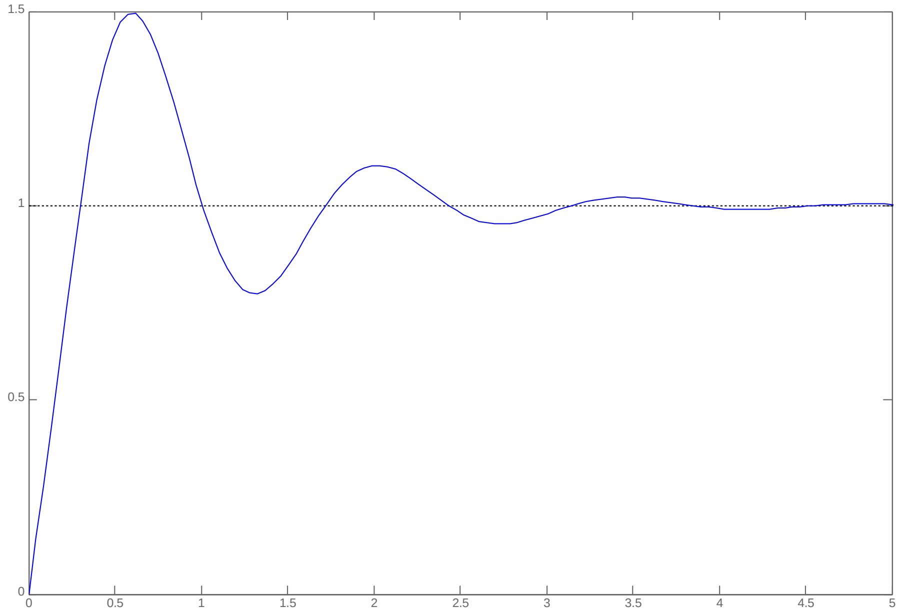
Fijamos el valor de k_p = 3 (ya que es una valor realista) y asi calculamos el módulo del punto B, cuyo valor es 0.1375.

Con estos valores de las constantes de integración y derivación, calculamos la función de transferencia del conjunto del motor y el controlador PID, obteniendo así:

$$G(s) = \frac{.0113\, s^2 + .3533\, s + 2.76}{.002876\, s^3 + .128\, s^2}$$

Cuyo diagrama de Nyquist y respuesta al escalón en lazo cerrado son:

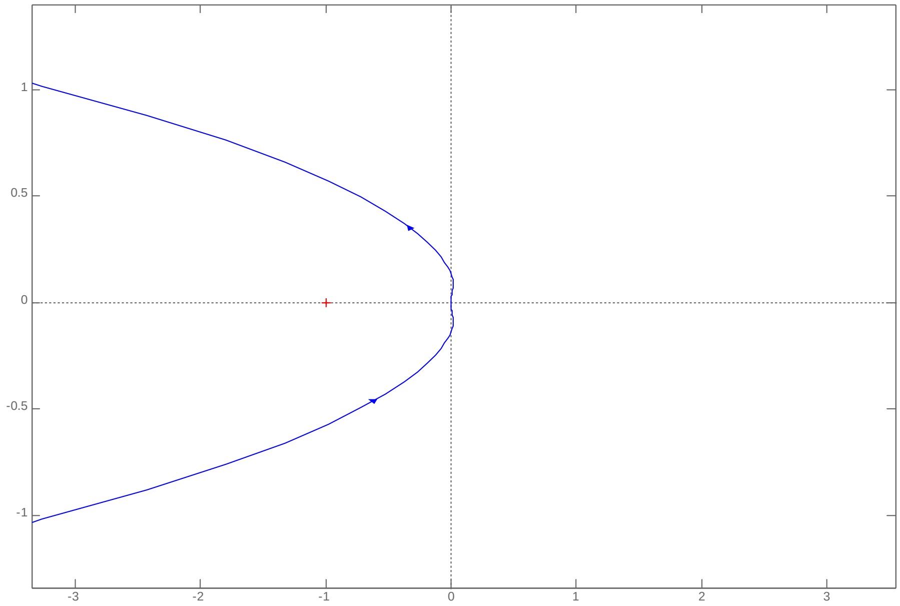


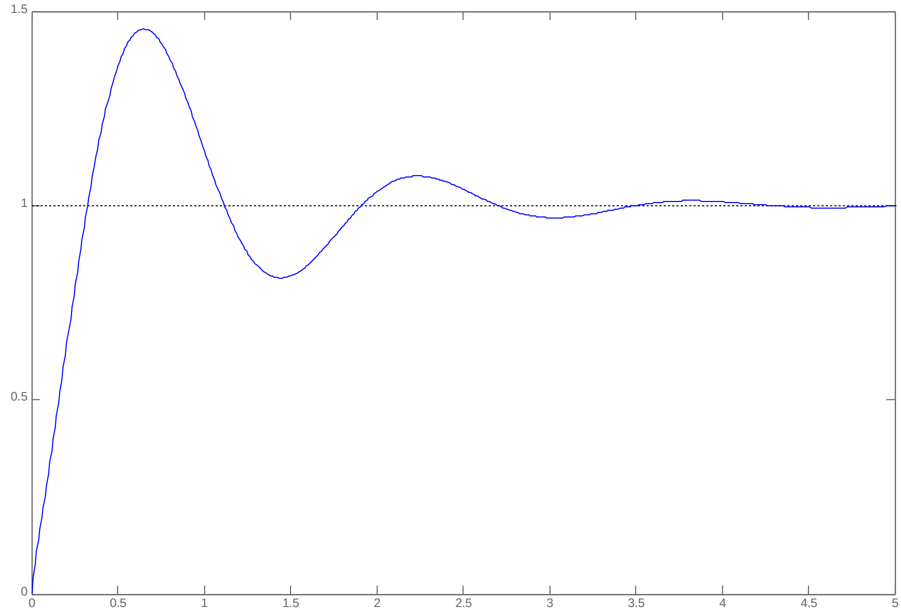


2º) Cambiamos la fase de B a 4 rad, es decir, un valor menor que el de la fase de A. Quedando B=-0.0145-j0.155. Y mantenemos el resto de parámetros. Obteniendo T_i = 0.154 y, por tanto, T_d = 0.0385. Para éstos valores la función de transferencia queda:

$$G(s) = \frac{.01636\, s^2 + .425\, s + 2.76}{.003461\, s^3 + .154\, s^2}$$

Cuyas gráficas son:





Vemos que la respuesta en el tiempo mejora pero no lo suficiente, la sobre-elongación sigue siendo demasiado alta.

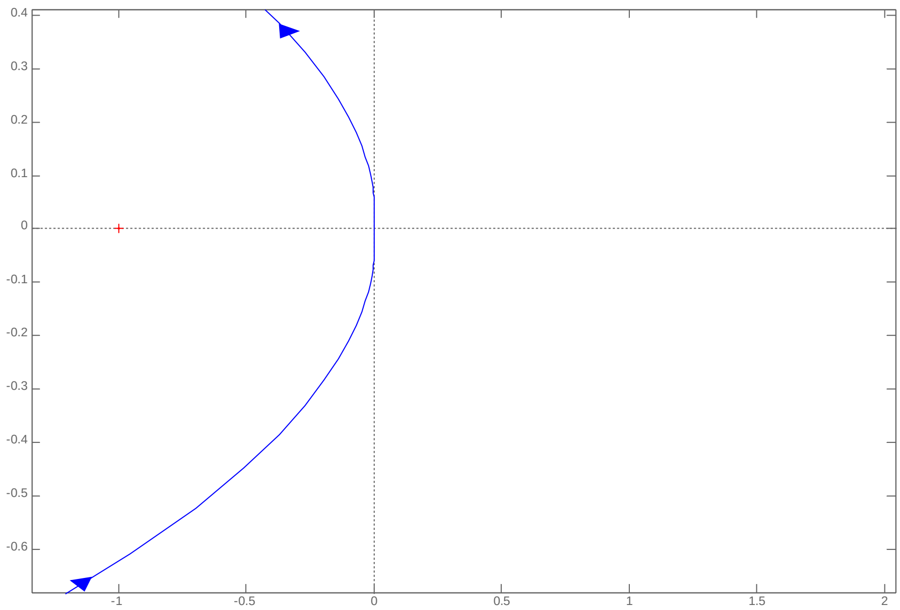
3º) Después de numerosas pruebas con un parámetro α=0.25, y no obtener mejoras considerables de la respuesta al escalón optamos por variar éste parámetro. Para ello fijamos T_i=0.18, K_p=3 y fase de B de 4.5 rad, quedando B=-0.0319-j0.135. Si despejamos α de las expresiones vistas anteriormente, tenemos:

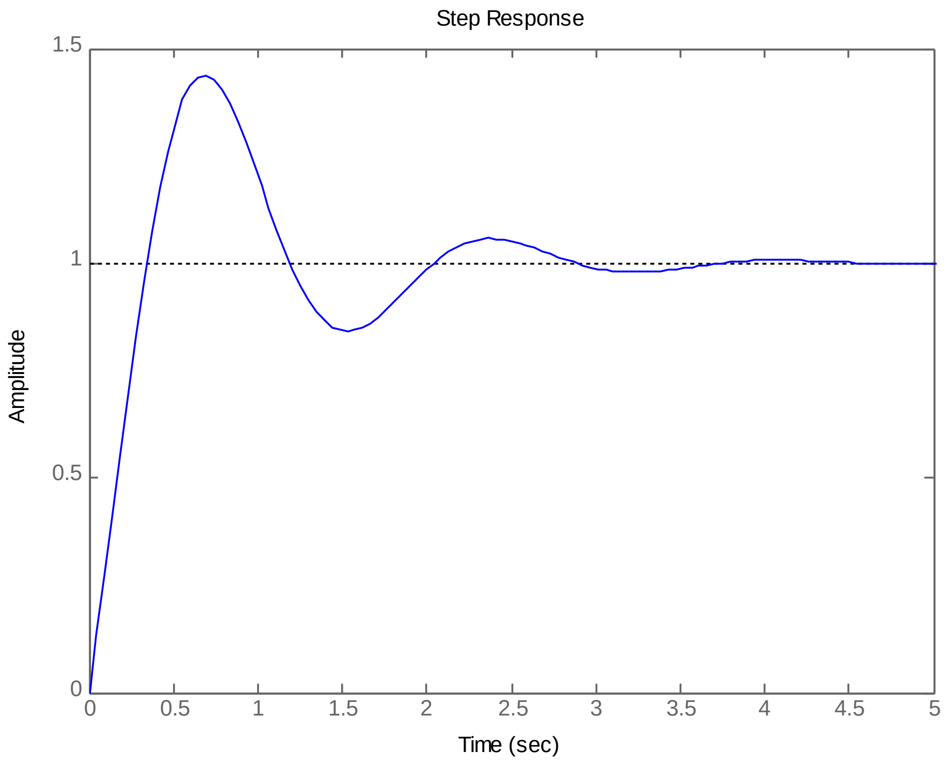
$$\alpha = \frac{1 + Wo\,Ti\,\mathrm{tg}(d)}{Wo^2\,Ti^2}$$

De donde nos queda que α=0.1423 y T_d = 0.025. Quedando una G como sigue:

$$G(s) = \frac{.01242\,s^2 + .4968\,s + 2.76}{.004045\,s^3 + .18\,s^2}$$

Obteniendo un diagrama de Nyquist y una respuesta al escalón como estos:



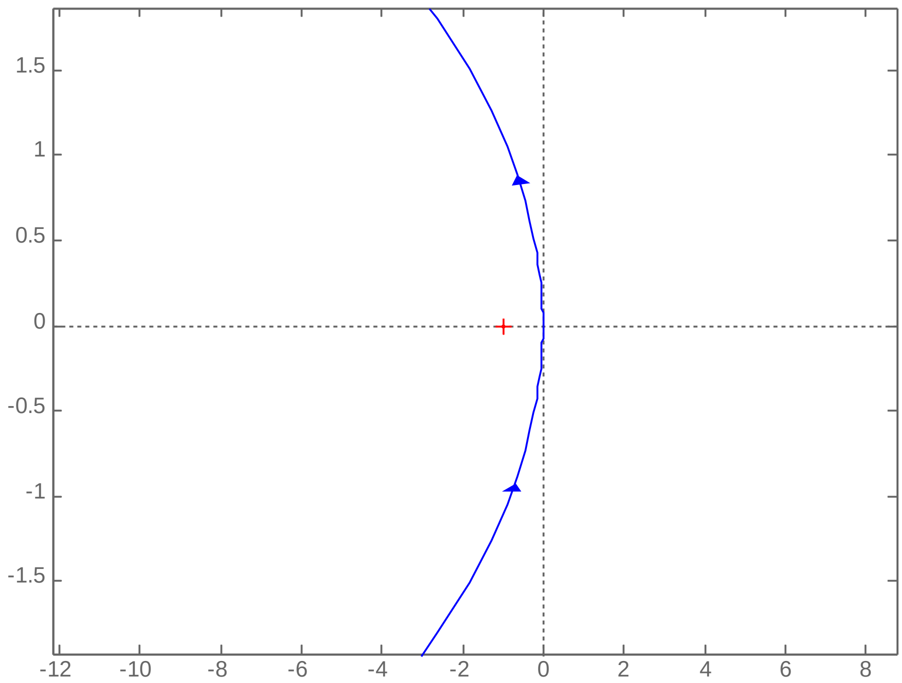


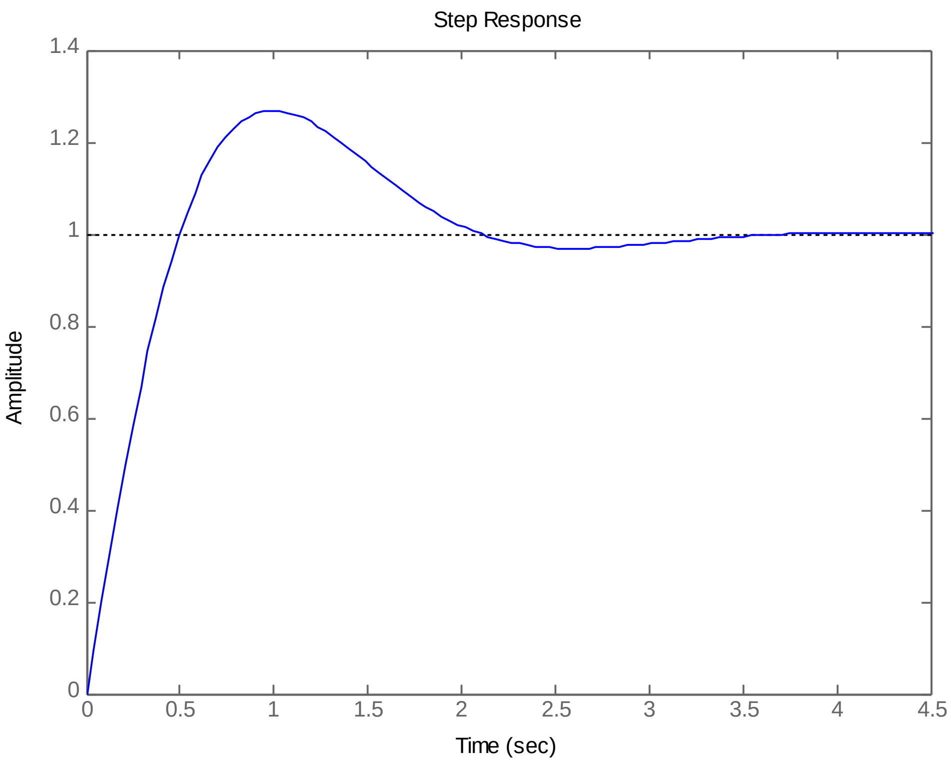
Vemos que mejora la sobre-elongación con respecto a la primera prueba que hicimos para éste punto B.

4º) De nuevo variamos el parámetro α, fijando una T_i=0.5, ostensiblemente mayor que el valor anterior. Y obtenemos los siguientes valores α=0.031, T_d = 0.0155 y un punto B=-0.0339-j0.151. G nos queda:

$$G(s) = \frac{.02139\,s^2 + 1.38\,s + 2.76}{.01124\,s^3 + .5\,s^2}$$

Quedándonos unas gráficas como las que siguen:





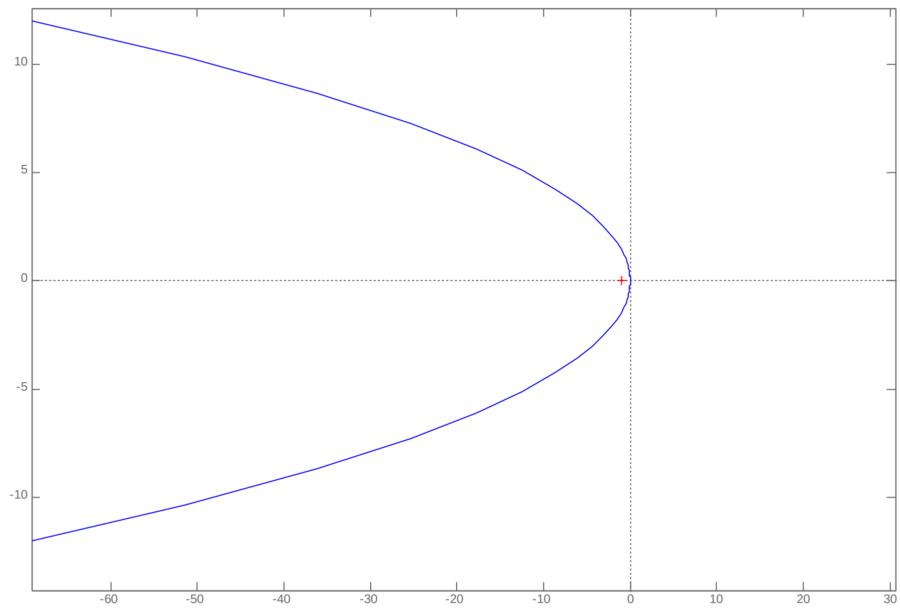
Como se puede apreciar la sobre-elongación disminuye del 45% que teníamos antes al 25% y el tiempo de establecimiento también mejora hasta llegar a 3.5 segundos.

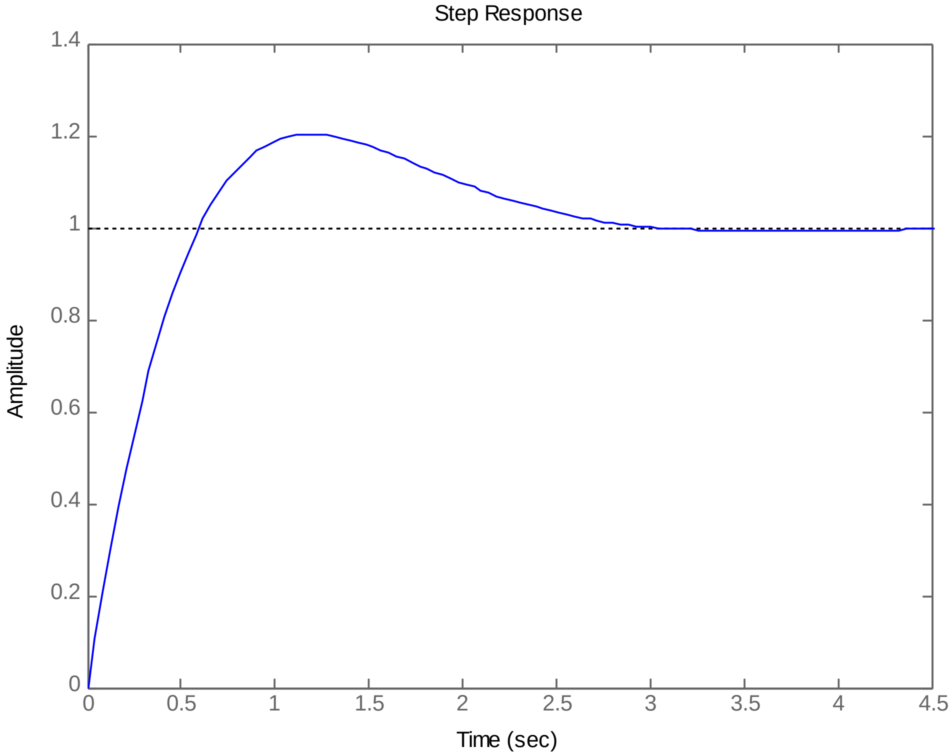
5º) Variamos la fase del punto B a un punto intermedio de los valores anteriores y también llegamos al valor máximo que podía tomar, no obteniendo mejora de las respuestas al escalón en el tiempo debido a que la diferencia de fase de A y B era muy pequeña con lo que la tangente también se reducía mucho. Esto provocaba que el valor de T_d se hiciera prácticamente nulo por lo que estaríamos usando un controlador PI en lugar de un PID.

6º) Tras realizar todas éstas pruebas optamos por elegir los siguientes valores de los parámetros T_i =0.8, α=0.027, T_d =0.022 y una ganancia del proporcional de 3. La fase del punto B es 4.5 rad. Obteniendo una G:

$$G(s) = \frac{.04858\, s^2 + 2.208\, s + 2.76}{.01798\, s^3 + .8\, s^2}$$

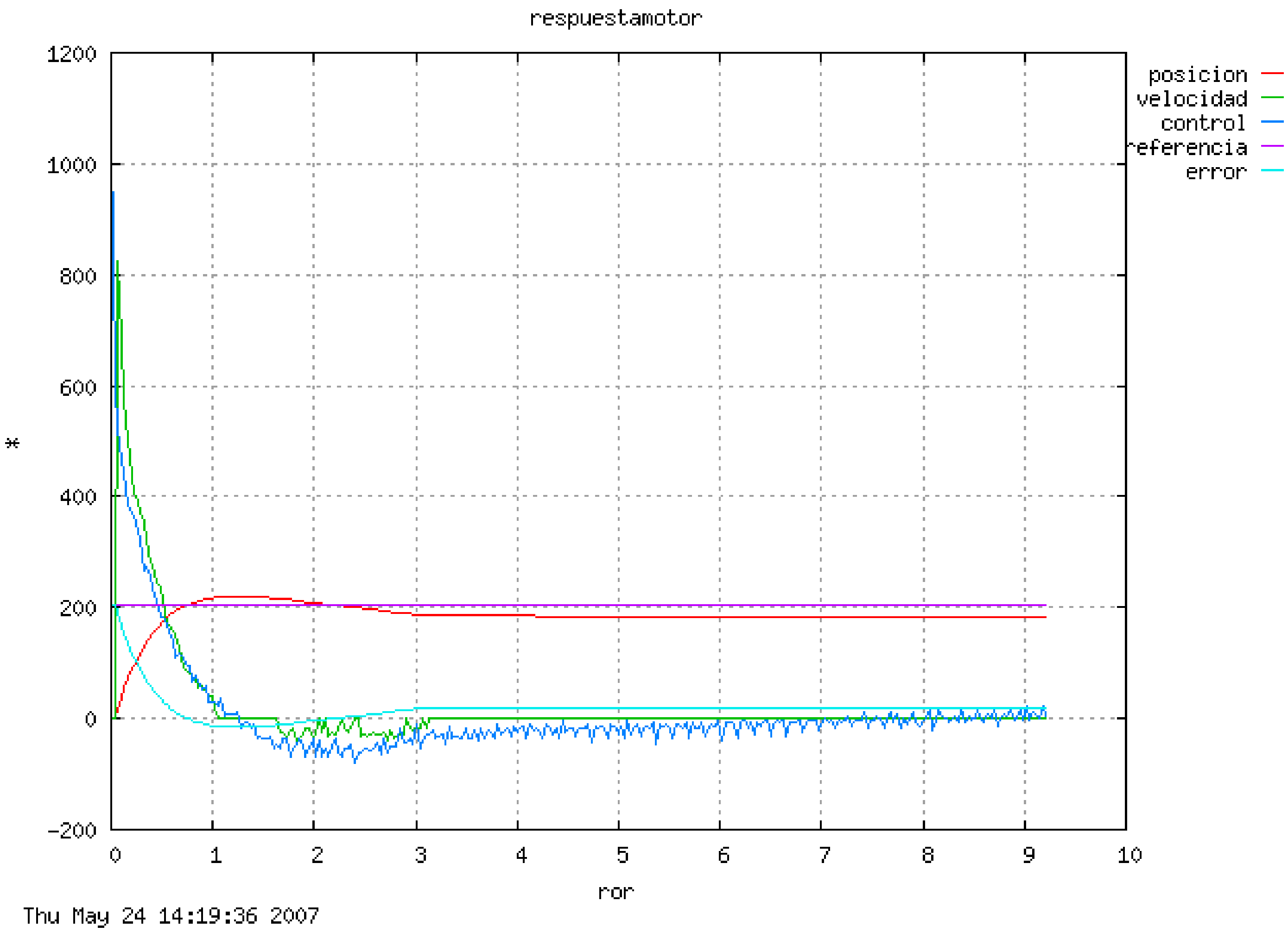
Cuyas representaciones gráficas quedarían:





Ésta respuesta al escalón es la mejor que hemos podido obtener, utilizando el método de Ziegler-Nichols, siendo probablemente mejorable por otros métodos. Finalmente tenemos una sobre-elongación del 20% y un tiempo de establecimiento de algo menos de 3 segundos. Que es lo que nos habíamos propuesto en un principio.

Todo esto ha sido el comportamiento del controlador con el motor simulado idealmente en MATLAB. Pero tenemos que probar el comportamiento real, y para ello montamos el controlador PID con los valores de los parámetros obtenidos en el último punto. Obteniendo una respuesta con entrada escalón de 1 Voltio como la que sigue:



Las variaciones de las salidas corresponden a perturbaciones lógicas del comportamiento real de los componentes de las señales. También vemos que la respuesta al escalón tiene un error en régimen permanente debido a perturbaciones como la fricción del motor. A su vez, la velocidad se anula en los puntos en que la variación de potencial de la posición es muy pequeña, lo que hace que el motor no se mueva.