

**SISTEMA DE CONTROL  
DE LA POSICIÓN  
DE UN MOTOR DE CORRIENTE  
CONTINUA**

Yazan Hazem Senan  
Gonzalo Guelbenzu Villota  
Carlos Iván del Valle Morales

# ÍNDICE

	Página
1. Estructura del documento	1
2. Estudio del motor en lazo abierto como sistema de 3 <sup>er</sup> orden	2
2.1 Cálculo de las ecuaciones diferenciales	2
2.2 Cálculo de la función de transferencia en lazo abierto	4
2.3 Simulación en Matlab del motor en lazo abierto	6
2.3.1 Diagrama polos-ceros. Conclusiones	7
2.3.2 Respuesta al escalón, rampa y parábola. Conclusiones	9
2.3.3 Diagrama de Bode. Conclusiones	12
2.3.4 Diagrama de Nyquist. Conclusiones	15
3. Aproximación del motor en lazo abierto como sistema de 2 <sup>o</sup> orden	17
3.1 Justificación	17
3.2 Cálculo de la función de transferencia	18
3.3 Relación entre los parámetros del motor (R, L, B y J) y los característicos de un sistema de 2 <sup>o</sup> orden canónico ( $\xi$ y $\omega_n$ )	19
3.4 Relación de los parámetros de diseño en el tiempo y en la frecuencia con los parámetros característicos de un sistema de 2 <sup>o</sup> orden ( $\xi$ y $\omega_n$ )	20
3.4.1 Relaciones con los parámetros de diseño de la respuesta transitoria a un escalón unitario	20
3.4.2 Relaciones con los parámetros de diseño de la respuesta en frecuencia	22
4. Caracterización de los parámetros de diseño	25
4.1 Aplicación implementada: Sistema de control para duplicación de las plazas en un aparcamiento	25
4.2 Caracterización de los parámetros de diseño	26
4.2.1 Parámetros de diseño en el dominio del tiempo	26
4.2.2 Parámetros de diseño en el dominio de la frecuencia	27

5. Estudio del motor en un sistema en lazo cerrado	28
5.1 Justificación	28
5.2 Cálculo de la función de transferencia en lazo cerrado	29
5.3 Simulación en Matlab del motor en lazo cerrado	31
5.3.1 Diagrama polos-ceros. Conclusiones	31
5.3.2 Respuesta al escalón, rampa y parábola. Conclusiones	33
5.3.3 Diagrama de Bode. Conclusiones	38
5.3.4 Diagrama de Nyquist. Conclusiones	41
6. Diseño de un controlador de dos grados de libertad	44
6.1 Estructura elegida	44
6.2 Cálculo de las funciones de transferencia del controlador: $F_{yr}(s)$ , $F_{yd}(s)$ y $F_{yn}(s)$	45
6.3 Diseño con Matlab del controlador	48
7. Estudio del controlador diseñado	60
7.1 Diagrama y funciones de transferencia del diseño adoptado	60
7.2 Simulación en Matlab del sistema completo	61
7.2.1 Características del sistema en el dominio del tiempo	61
7.2.3 Características del sistema en el dominio de la frecuencia	68
8. Comentarios finales	69
9. Referencias bibliográficas	70
10. Anexo: Código de las simulaciones	71
10.1 Modelado del motor en lazo abierto como sistema de tercer orden	71
10.2 Simulación del motor en lazo abierto como sistema de tercer orden	72
10.3 Modelado del motor en lazo cerrado	74
10.4 Simulación del motor en lazo cerrado	75
10.5 Pruebas para ver cómo se relacionan los parámetros de diseño con la posición de los polos del sistema	77
10.6 Simulación del controlador diseñado	84

# ÍNDICE DE FIGURAS

	Página
Figura 1: Modelo del motor de corriente continua	2
Figura 2: Diagrama polos-ceros de la función de transferencia del motor en lazo abierto	8
Figura 3: Respuesta a un escalón unitario del motor en lazo Abierto	9
Figura 4: Respuesta a la rampa del motor en lazo abierto	10
Figura 5: Respuesta a una parábola del motor en lazo abierto	11
Figura 6: Diagrama de Bode del motor en lazo abierto	13
Figura 7: Diagrama de Nyquist del motor en lazo abierto	16
Figura 8: Estructura del sistema en lazo cerrado	29
Figura 9: Diagrama polos-ceros de la función de transferencia del motor en lazo cerrado	32
Figura 10: Respuesta a un escalón de 5 V del motor en lazo cerrado	34
Figura 11: Respuesta a la rampa del motor en lazo cerrado	36
Figura 12: Respuesta a una parábola del motor en lazo cerrado	37
Figura 13: Diagrama de Bode del motor en lazo cerrado	39
Figura 14: Diagrama de Nyquist del motor en lazo cerrado	43
Figura 15: Estructura del controlador de dos grados de libertad	44
Figura 16: Estructura del controlador de dos grados de libertad para el cálculo de $F_{yr}(s)$	45
Figura 17: Estructura del controlador de dos grados de libertad para el cálculo de $F_{yd}(s)$	46
Figura 18: Estructura del controlador de dos grados de libertad para el cálculo de $F_{yn}(s)$	47
Figura 19: Controlador de dos grados de libertad diseñado	60
Figura 20: Respuesta del sistema para $r(t)$ constante	61
Figura 21: Respuesta del sistema para $d(t)$ constante	63
Figura 22: Respuesta del sistema para $n(t)$ constante	64
Figura 23: Respuesta conjunta del sistema a $r(t)$ y $n(t)$	65
Figura 24: Respuestas del sistema a una rampa y una parábola	67
Figura 25: Diagrama de Bode del sistema	68

# **1. Estructura del documento**

Este documento pretende servir como guía de todo el procedimiento seguido para llevar a cabo el diseño de un controlador de posición de dos grados de libertad para un motor de corriente continua.

El documento está organizado del siguiente modo. Tras esta breve introducción, el apartado 2. *Estudio del motor en lazo abierto como sistema de 3<sup>er</sup> orden* comienza con un análisis del motor que utilizaremos para nuestro diseño. Este apartado proporciona el modelo matemático del motor necesario para realizar todos los estudios posteriores

Tras dicho análisis, desarrollamos el apartado 3. *Aproximación del motor en lazo abierto como sistema de 2<sup>o</sup> orden*, fundamentalmente teórico. Este apartado realiza una simplificación del modelo obtenido en el apartado anterior que nos permitirá razonar sobre la planta como un sistema de segundo orden.

En el apartado 4. *Caracterización de los parámetros de diseño* presentamos la aplicación elegida para nuestro motor y las especificaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia que esperamos cumplir en nuestro diseño.

Tras elegir nuestros objetivos y, antes de comenzar con el diseño del controlador propiamente dicho, desarrollamos el apartado 5. *Estudio del motor en un sistema en lazo cerrado*. En esta sección cerramos el lazo de realimentación de nuestro sistema y estudiamos las implicaciones. Ha sido de gran ayuda para realizar el apartado 6. *Diseño de un controlador de dos grados de libertad* en el que explicamos detalladamente los pasos seguidos para obtener nuestro controlador. El objetivo del apartado 7. *Estudio del controlador diseñado* es verificar que nuestro sistema cumple las especificaciones esperadas.

Finalmente, incluimos los apartados 8. *Comentarios finales*, 9. *Referencias bibliográficas* y 10. *Anexo: Código de las simulaciones*. En este último aparece la implementación en Matlab de los programas realizados durante el presente estudio.

## 2. Estudio del motor en lazo abierto como sistema de 3<sup>er</sup> orden

### 2.1 Cálculo de las ecuaciones diferenciales

Un motor de corriente continua puede modelarse según el siguiente esquema:

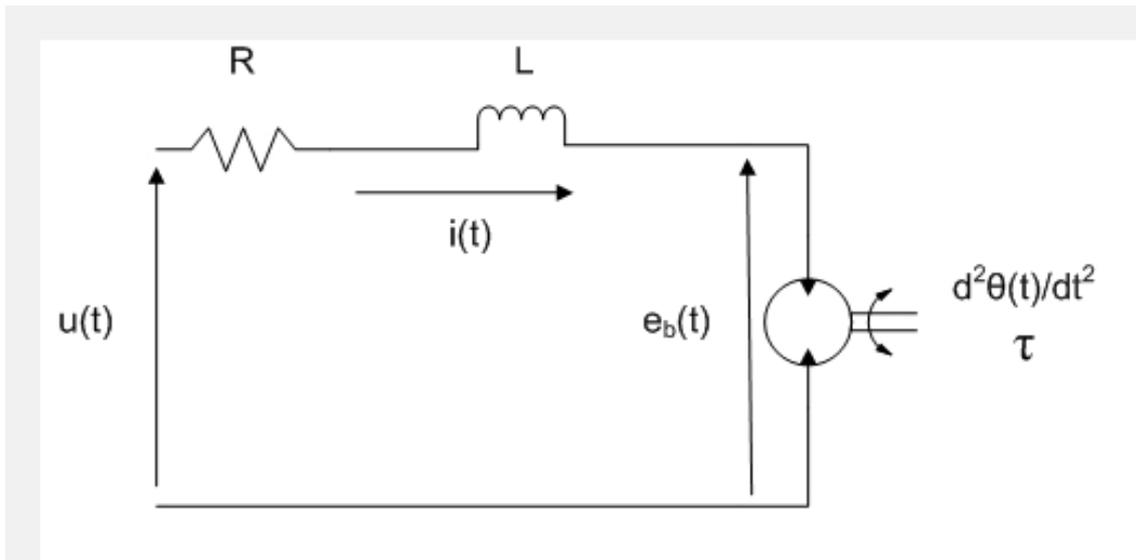


Figura 1: Modelo del motor de corriente continua

En lo sucesivo utilizaremos la siguiente nomenclatura:

- $e_b(t)$  es la tensión en bornas del motor. Se mide en V.
- $i(t)$  es la corriente que circula por el motor. Se mide en A.
- $u(t)$  es la entrada que introducimos al motor. Se mide en V.
- $\theta(t)$  es el ángulo de giro del motor. Se mide en rad.
- $R$  es la resistencia del motor. Se mide en  $\Omega$ .
- $L$  es inductancia del motor. Se mide en H
- $J$  es la inercia del motor. Se mide en  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ .
- $B$  es el coeficiente de rozamiento. Se mide en  $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}/\text{s}$ .
- $\tau$  es el par del motor. Se mide en  $\text{N}\cdot\text{m}$ .
- $\tau_L$  es el par de la carga. Se mide en  $\text{N}\cdot\text{m}$ .
- $k_1$  es la constante de FEM. Se mide en  $\text{V}\cdot\text{s}/\text{rad}$ .
- $k_2$  es la constante de par. Se mide en  $\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$ .

Sabemos que en un motor de corriente continua se verifican las siguientes relaciones para la tensión en bornas del motor,  $e_b(t)$ , y para el par del motor,  $\tau$ :

$$e_b(t) = k_1 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\tau = k_2 i(t)$$

Planteamos las ecuaciones diferenciales del circuito con ayuda del esquema de la página anterior:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$\tau = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} + \tau_L$$

Sustituyendo en estas ecuaciones diferenciales las expresiones de  $e_b(t)$  y  $\tau$  obtenemos las siguientes igualdades:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_1 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$k_2 i(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} + \tau_L$$

Por simplicidad consideramos que el par de la carga es nulo, es decir, que,  $\tau_L = 0$ . De esta forma las ecuaciones diferenciales que rigen el funcionamiento del motor de corriente continua se reducen a las siguientes expresiones:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_1 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$k_2 i(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt}$$

## 2.2 Cálculo de la función de transferencia en lazo abierto

Nuestro objetivo en este apartado es determinar en el dominio de Laplace la siguiente función de transferencia del motor:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)}$$

Esta expresión relaciona la transformada de Laplace de la salida,  $\Theta(s)$ , con la transformada de Laplace de la entrada,  $U(s)$ . Resultará indispensable para poder realizar las simulaciones oportunas en Matlab.

Para calcularla partimos de las ecuaciones diferenciales obtenidas en el apartado anterior:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_1 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$k_2 i(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Teniendo en cuenta las siguientes propiedades de la transformada de Laplace para la derivada de una función:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - s \cdot f(0) - \dot{f}(0)$$

obtenemos la transformada de Laplace de las ecuaciones diferenciales del motor:

$$U(s) = R \cdot I(s) + L[sI(s) - i(0)] + k_1[s\Theta(s) - \theta(0)]$$

$$k_2 I(s) = J[s^2\Theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0)] + B[s\Theta(s) - \theta(0)]$$

Por simplicidad consideramos condiciones iniciales nulas, es decir, que se verifican las siguientes relaciones:

$$i(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

De esta forma las expresiones anteriores se reducen mucho:

$$U(s) = R \cdot I(s) + LsI(s) + k_1 s \Theta(s)$$

$$k_2 I(s) = Js^2 \Theta(s) + Bs \Theta(s)$$

Despejamos I(s) de la segunda ecuación:

$$I(s) = \frac{Js^2 \Theta(s) + Bs \Theta(s)}{k_2} = \frac{(Js^2 + Bs)}{k_2} \Theta(s)$$

Sustituimos el resultado en la primera ecuación:

$$U(s) = R \cdot I(s) + LsI(s) + k_1 s \Theta(s) \quad \Rightarrow$$

$$U(s) = (Ls + R)I(s) + k_1 s \Theta(s) \quad \Rightarrow$$

$$U(s) = (Ls + R) \frac{(Js^2 + Bs)}{k_2} \Theta(s) + k_1 s \Theta(s) \quad \Rightarrow$$

$$U(s) = \left[ (Ls + R) \frac{(Js^2 + Bs)}{k_2} + k_1 s \right] \Theta(s) \quad \Rightarrow$$

$$U(s) = \left[ \frac{(Ls + R)(Js^2 + Bs) + k_1 k_2 s}{k_2} \right] \Theta(s) \quad \Rightarrow$$

$$U(s) = \frac{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1 k_2)]s}{k_2} \Theta(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia de posición para el motor de corriente continua es:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1 k_2)]s}$$

### 2.3 Simulación en Matlab del motor en lazo abierto

Para realizar la simulación del motor de corriente continua hemos utilizado los datos proporcionados para el servomotor 117419 de Maxon:

- $R = 4,91 \Omega$
- $L = 742,2 \mu\text{H} = 742,2 \cdot 10^{-6} \text{ H}$
- $J = 43,8 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 = 43,8 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- $B = 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad/s}$
- $k_1 = 32,18 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s/rad}$
- $k_2 = 32,18 \text{ mN} \cdot \text{m/A} = 32,18 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m/A}$

Resaltamos dos cosas:

- La constante de rozamiento  $B$  no aparece en la hoja de características por lo que hemos tomado un valor muy pequeño, aproximadamente nulo.
- Hemos obligado a que el valor de  $k_1$  sea igual al valor de  $k_2$  en unidades del S.I. puesto que sabemos que se debe cumplir.

Con estos datos y la función de  $\theta$  obtenida en el apartado anterior, 2.2 *Cálculo de la función de transferencia en lazo abierto*, hemos realizado una simulación en Matlab. Dicho entorno ha resultado una herramienta indispensable para la ejecución del presente diseño puesto que facilita enormemente la tarea de cálculos y obtención de gráficas.

Los detalles del código se pueden ver en el punto 10. *Anexo: Código de las simulaciones*

En los diferentes estudios que realicemos a lo largo del trabajo incluiremos los siguientes resultados:

- Diagrama polos-ceros de la función de transferencia.
- Respuesta del sistema al escalón, rampa y parábola.
- Diagrama de Bode.
- Diagrama de Nyquist.

### 2.3.1 Diagrama polos-ceros. Conclusiones

Para la obtención de los polos y ceros de la función de transferencia del motor en lazo abierto partimos de dicha función, calculada en el apartado 2.2 *Cálculo de la función de transferencia en lazo abierto*:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s}$$

Es inmediato ver que el sistema en lazo abierto:

- No tiene ceros, puesto que no hay valores que anulen el numerador de la función de transferencia.
- Tiene tres polos dado que el denominador es un polinomio de grado 3. Uno de ellos está en el origen. Los otros dos deben ser polos reales porque si fuesen complejos querría decir que el motor tiene una respuesta oscilatoria.

Calculamos analíticamente la posición de dichos polos mediante la conocida expresión para la resolución de ecuaciones de segundo grado:

$$[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s = 0 \quad \Rightarrow$$
$$p_1 = 0 \quad \text{y} \quad p_{2,3} = \frac{-(JR + BL) \pm \sqrt{(JR + BL)^2 - 4 \cdot JL \cdot (BR + k_1k_2)}}{2JL}$$

Sustituyendo los valores indicados anteriormente obtenemos que los polos del sistema están en:

- $p_1 = 0$
- $p_2 = -50,808$
- $p_3 = -6566,943$

Con ayuda de Matlab hemos comprobado que los resultados obtenidos de forma analítica y mediante la función *tf2zp()* coinciden, como era de esperar.

Para representar gráficamente el diagrama de polos y ceros del sistema utilizamos la función proporcionada por Matlab denominada  $pzmap()$ , que recibe como argumento nuestra función de transferencia. La gráfica obtenida es la siguiente:

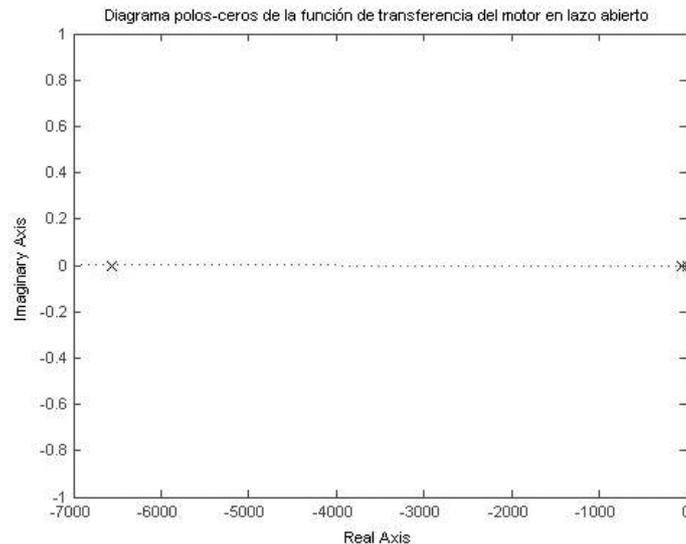


Figura 2: Diagrama polos-ceros de la función de transferencia del motor en lazo abierto

Observando la gráfica podemos comprobar de un solo vistazo que:

- Los tres polos de la función de transferencia del motor en lazo abierto son reales.
- Uno de los polos está situado en el origen. Por lo tanto el sistema es de tipo 1.
- Existe de forma clara un polo dominante. El polo dominante es el que está situado más cerca del origen, en la posición  $p_2 = - 50,808$ . Este hecho justifica la aparición en el presente estudio del apartado 3. *Aproximación del motor en lazo abierto como sistema de 2º orden*, donde eliminaremos de la función de transferencia el polo no dominante.
- Se trata de un sistema críticamente estable puesto que tiene un polo en el origen y el resto se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ .
- Se trata de un sistema de fase mínima puesto que no tiene ceros ni polos en el semiplano derecho del plano  $s$ .

### 2.3.2 Respuesta al escalón, rampa y parábola. Conclusiones

- Respuesta al escalón

La respuesta del sistema a un escalón unitario vendrá dada por la siguiente expresión, donde hemos tenido en cuenta que la transformada de Laplace de un escalón  $u(t)=1$  es  $U(s)=\frac{1}{s}$ :

$$\Theta(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s} \cdot \frac{1}{s} \quad \Rightarrow$$

$$\theta(t) = L^{-1}[\Theta(s)] = L^{-1}\left[\frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s^2}\right]$$

Aunque el cálculo de  $\theta(t)$  es complicado, podemos determinar fácilmente el valor en régimen permanente utilizando el Teorema del Valor Final:

$$\theta(t)_{R.P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s^2} = \infty$$

Este resultado nos permite concluir que si alimentamos el motor con un escalón de 1 V, el motor comenzará a girar indefinidamente. Esto es debido a que el sistema es críticamente estable. Podemos visualizar este resultado con ayuda del comando `step()` de Matlab:

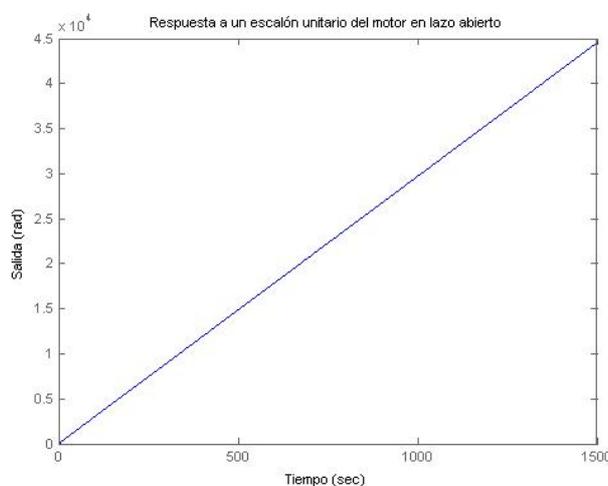


Figura 3: Respuesta a un escalón unitario del motor en lazo abierto

- **Respuesta a una rampa**

La respuesta del sistema a una rampa vendrá dada por la siguiente expresión, donde hemos tenido en cuenta que la transformada de Laplace de una rampa  $u(t)=t$  es  $U(s)=\frac{1}{s^2}$ :

$$\Theta(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s} \cdot \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$\theta(t) = L^{-1}[\Theta(s)] = L^{-1}\left[\frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s^3}\right]$$

Como hemos comentado para el caso de la respuesta al escalón, el cálculo de  $\theta(t)$  es complicado. Sin embargo podemos determinar fácilmente el valor en régimen permanente utilizando el Teorema del Valor Final:

$$\theta(t)_{R.P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s^3} = \infty$$

Para visualizar el resultado de forma gráfica utilizamos los comandos *lsim()* y *plot()* de Matlab:

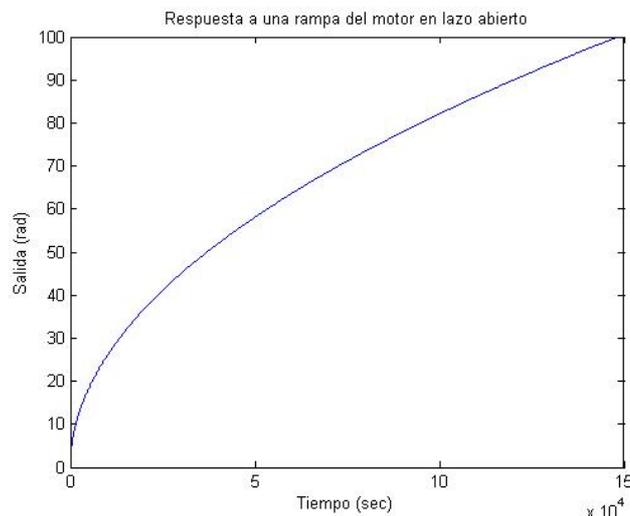


Figura 4: Respuesta a la rampa del motor en lazo abierto

Comprobamos que, efectivamente, la salida crece indefinidamente. Esto quiere decir que, para una rampa como entrada, el motor mantiene su giro indefinidamente.

- **Respuesta a una parábola**

Teniendo en cuenta que la transformada de Laplace de una parábola  $u(t)=t^2$  es  $U(s)=\frac{1}{s^3}$ , podemos obtener la salida del sistema para dicha entrada así:

$$\Theta(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s} \cdot \frac{1}{s^3} \Rightarrow$$

$$\theta(t) = L^{-1}[\Theta(s)] = L^{-1}\left[\frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s^4}\right]$$

Como hemos comentado para el caso de la respuesta al escalón y de la rampa, el cálculo de  $\theta(t)$  es complicado. Sin embargo podemos determinar el valor en régimen permanente utilizando el Teorema del Valor Final:

$$\theta(t)_{R.P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s^4} = \infty$$

Podemos visualizar este resultado con ayuda del comando `lsim()` de Matlab:

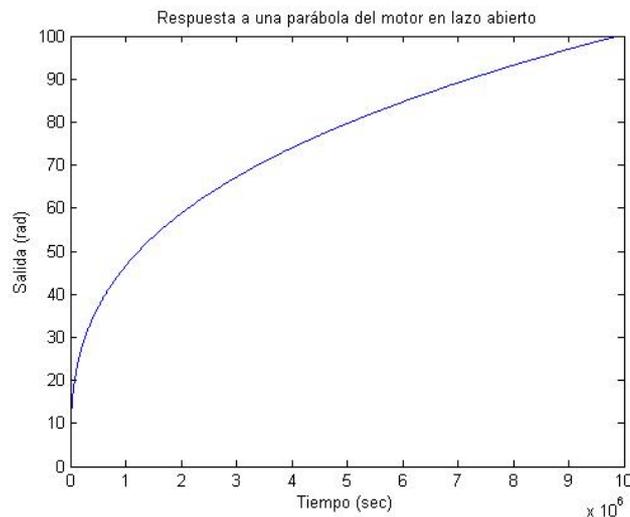


Figura 5: Respuesta a una parábola del motor en lazo abierto

Como en el caso de la rampa, también comprobamos que la salida crece indefinidamente. Por lo tanto, para una parábola como entrada, el motor nunca para de girar.

### 2.3.3 Diagrama de Bode. Conclusiones

En este apartado vamos a obtener el diagrama de Bode de la función de transferencia del motor en lazo abierto. Como es bien sabido, el diagrama de Bode representa el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia de un determinado sistema.

Para obtenerlo comenzamos calculando la respuesta en frecuencia de nuestro motor:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{k_2}{JLs^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + k_1k_2)s} \Rightarrow$$

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{k_2}{JL(j\omega)^3 + (JR + BL)(j\omega)^2 + (BR + k_1k_2)(j\omega)} \Rightarrow$$

$$G(j\omega) = \frac{k_2}{-jJL\omega^3 - (JR + BL)\omega^2 + j(BR + k_1k_2)\omega} \Rightarrow$$

$$G(j\omega) = \frac{k_2}{-(JR + BL)\omega^2 + j[(BR + k_1k_2)\omega - JL\omega^3]}$$

A partir de ella determinamos su módulo y fase:

$$|G(j\omega)| = \frac{k_2}{\sqrt{(JR + BL)^2 \omega^4 + [(BR + k_1k_2)\omega - JL\omega^3]^2}}$$

$$\arg(G(j\omega)) = -\arctg \frac{(BR + k_1k_2)\omega - JL\omega^3}{-(JR + BL)\omega^2}$$

Matlab proporciona la función *bode()* para realizar todos los cálculos anteriores y su representación gráfica de forma sencilla.

Haciendo uso de la función indicada, el resultado alcanzado es el siguiente:

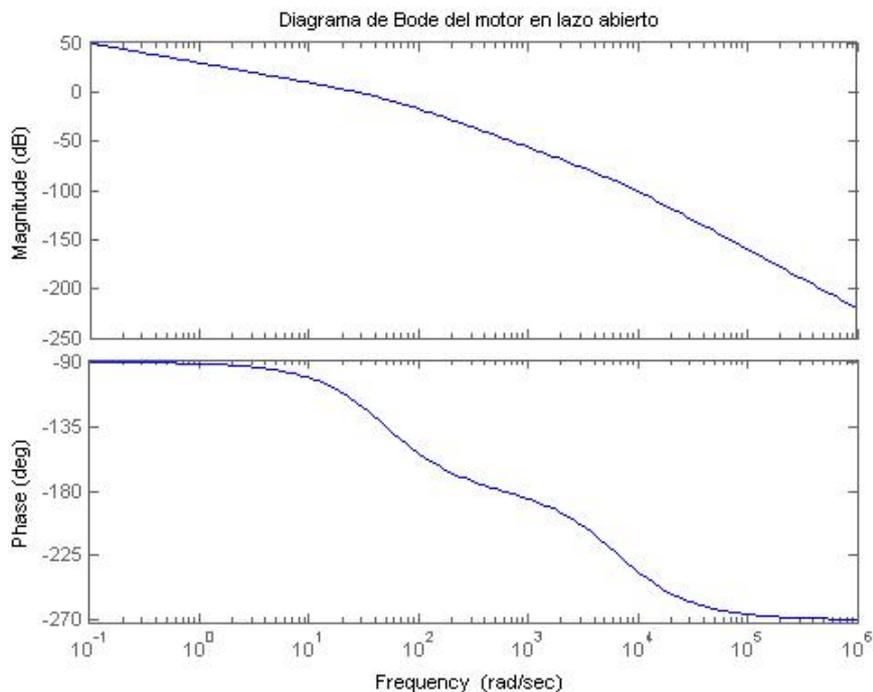


Figura 6: Diagrama de Bode del motor en lazo abierto

Del diagrama de Bode se puede extraer mucha información. Para ello hemos realizado un programa en Matlab que calcula algunos parámetros característicos de la respuesta en frecuencia del sistema:

- El motor funciona como un filtro paso bajo en frecuencia. El ancho de banda es:
  - $B = 36,97 \text{ rad/s}$
- Podemos determinar la posición de los polos buscando los puntos donde cambia de pendiente el módulo de la respuesta en frecuencia:
  - Como la gráfica del módulo empieza con una pendiente de  $-20 \text{ dB/dec}$  podemos concluir que hay un polo en  $\omega \rightarrow 0$ . En concreto, hemos visto que el polo está en  $\omega = 0$ .
  - Hay otro polo entre  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  y  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ . En el apartado *2.3.1 Diagrama polos-ceros. Conclusiones* hemos calculado que el polo está situado en  $\omega = 50,808 \text{ rad/s}$ .
  - El tercer polo está situado entre  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  y  $\omega = 10000 \text{ rad/s}$ . Teóricamente hemos calculado previamente que el polo está situado en  $\omega = 6566.943 \text{ rad/s}$ .

- Además, podemos sacar algunas conclusiones sobre la estabilidad del sistema en lazo cerrado calculando el margen de ganancia  $MG$ , el margen de fase  $MF$ , la frecuencia de cruce de fase  $\omega_{cp}$  y la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_{cg}$  (ver definiciones en el apartado 3.4.2. *Relaciones con los parámetros de diseño de la respuesta en frecuencia*)
  - $MG(dB) = 46,97dB$
  - $MF = 62,37^\circ$
  - $\omega_{cp} = 577,62rad/s$
  - $\omega_{cg} = 26,34rad/s$

Dado que se verifica que:

- $MG(dB) = 46,97dB > 0$
- $MF = 62,37^\circ > 0$

podemos concluir que el sistema en lazo cerrado tiene una estabilidad garantizada, aun cuando la ganancia en lazo abierto y las constantes de tiempo de los componentes varíen en cierto grado.

Esperamos comprobar estos resultados en el apartado 5. *Estudio del motor en un sistema en lazo cerrado.*

### 2.3.4 Diagrama de Nyquist. Conclusiones

El diagrama de Nyquist consiste en representar simultáneamente el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia de un determinado sistema.

Para obtenerlo hacemos uso de los resultados obtenidos en el apartado 2.3.1 *Diagrama polos-ceros. Conclusiones*. En dicho apartado hemos llegado a la conclusión de que el sistema en lazo abierto no tiene ceros y tiene tres polos reales, uno de ellos en el origen (es un sistema tipo 1). Por lo tanto, la función de transferencia se puede expresar de modo genérico de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{K}{s(s-p_2)(s-p_3)}$$

Entonces, la respuesta en frecuencia será:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{K}{j\omega(j\omega-p_2)(j\omega-p_3)}$$

Expresada de forma genérica es fácil determinar su módulo y fase:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{p_2^2 + \omega^2}\sqrt{p_3^2 + \omega^2}}$$
$$\arg(G(j\omega)) = -90 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{-p_2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{-p_3}\right)$$

Para dibujar el diagrama de Nyquist habría que ir dando valores a  $\omega$  y obtener el valor asociado de  $|G(j\omega)|$  y  $\arg(G(j\omega))$ .

Por ejemplo, para  $\omega = 0$  tenemos que:

$$|G(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{K}{\omega\sqrt{p_2^2 + \omega^2}\sqrt{p_3^2 + \omega^2}} \Big|_{\omega=0} = \infty$$
$$\arg(G(j\omega))_{\omega=0} = -90 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{-p_2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{-p_3}\right) \Big|_{\omega=0} = -90 - \operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(0) = -90^\circ$$

y para  $\omega = \infty$ :

$$|G(j\omega)|_{\omega=\infty} = \frac{K}{\omega\sqrt{p_2^2 + \omega^2}\sqrt{p_3^2 + \omega^2}} \Big|_{\omega=\infty} = 0$$

$$\arg(G(j\omega))_{\omega=\infty} = -90 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{-p_2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{-p_3}\right) \Big|_{\omega=\infty} = -90 - \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(\infty) = -270^\circ$$

Estos resultados coinciden con los obtenidos en el diagrama de Bode. Además, son los esperados para un sistema tipo 1 del que sabemos que:

- El término  $j\omega$  del denominador contribuye  $-90^\circ$  al ángulo de fase total de  $G(j\omega)$  para  $0 \leq \omega \leq \infty$ .
- En  $\omega = 0$ , la magnitud de  $G(j\omega)$  es infinita y el ángulo de fase se convierte en  $-90^\circ$ . En bajas frecuencias, el diagrama polar es asintótico hacia una línea paralela al eje imaginario negativo.
- En  $\omega = \infty$ , la magnitud se vuelve cero y la curva converge hacia el origen y es tangente a uno de los ejes. En este caso, es tangente al semieje imaginario positivo.

Obtenemos el diagrama de Nyquist completo con ayuda del comando `nyquist()` de Matlab. Hemos tenido cuidado para que sólo aparezca el diagrama correspondiente a la región de frecuencias positivas puesto que Matlab, por defecto, representa también la parte asociada a las frecuencias negativas, que no tienen sentido físicamente.

El resultado obtenido es el siguiente:

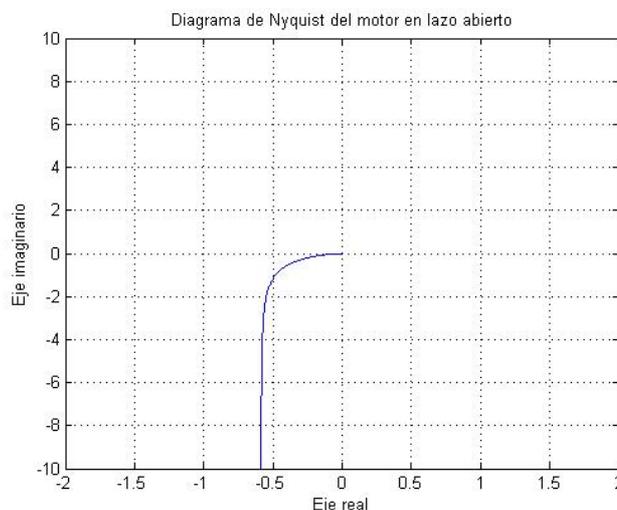


Figura 7: Diagrama de Nyquist del motor en lazo abierto

### **3. Aproximación del motor en lazo abierto como sistema de 2º orden**

#### **3.1 Justificación**

Antes de nada, reflejar que este apartado es principalmente teórico. Hemos decidido incluirlo porque nos parece importante dejar constancia de que, aunque el motor se trate de un sistema de tercer orden, podemos aproximarlo por un sistema de segundo orden.

En el apartado anterior, *2. Estudio del motor en lazo abierto como sistema de 3ª orden*, hemos obtenido entre otros resultados la función de transferencia del motor para la posición.

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s}$$

Como decíamos, esta función de transferencia pertenece a un sistema de tercer orden dado que tiene tres polos.

En el apartado *3.2. Cálculo de la función de transferencia* vamos a simplificar esta función por la de un sistema de segundo orden con sólo dos polos.

Esta simplificación nos va a permitir desarrollar el apartado *3.3 Relación entre los parámetros del motor (R, L, B y J) y los característicos de un sistema de 2º orden canónico ( $\xi$  y  $\omega_n$ )*.

La ventaja de hacer esto es que conocemos expresiones que relacionan los parámetros de diseño que fijaremos en el apartado *4. Caracterización de los parámetros de diseño* con el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  y la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  propios de un sistema de segundo orden. Hemos recogido esas expresiones en el apartado *3.4 Relación de los parámetros de diseño en el tiempo y en la frecuencia con los parámetros característicos de un sistema de 2º orden ( $\xi$  y  $\omega_n$ )*.

### 3.2 Cálculo de la función de transferencia

En el desarrollo del apartado 2.3.1. *Diagrama polos-ceros. Conclusiones* hemos determinado que los polos de la función de transferencia para la posición de un motor:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s}$$

son:

- $p_1 = 0$
- $p_2 = \frac{-(JR + BL) + \sqrt{(JR + BL)^2 - 4 \cdot JL \cdot (BR + k_1k_2)}}{2JL} = -50,808$
- $p_3 = \frac{-(JR + BL) - \sqrt{(JR + BL)^2 - 4 \cdot JL \cdot (BR + k_1k_2)}}{2JL} = -6566,943$

Como el polo  $p_3$  es dos órdenes de magnitud superior que  $p_2$ , podemos considerar que éste último es el polo dominante. De esta forma se justifica que la función de transferencia expresada como cociente de ceros y polos:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K}{s \cdot (s - p_2)(s - p_3)} = \frac{9,899 \cdot 10^6}{s \cdot (s + 50,808)(s + 6566,943)}$$

se puede simplificar por un sistema de segundo orden:

$$G(s)_{orden2} = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K}{s \cdot (s - p_2)} = \frac{9,899 \cdot 10^6}{s \cdot (s + 50,808)}$$

### **3.3 Relación entre los parámetros del motor (R, L, B y J) y los característicos de un sistema de 2º orden ( $\xi$ y $\omega_n$ )**

La expresión canónica de un sistema de 2º orden en lazo abierto viene dada por la siguiente expresión, donde  $\xi$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  es la pulsación natural no amortiguada:

$$G(s)_{canónica} = \frac{\omega_n^2}{s \cdot (s + 2\xi\omega_n)}$$

Identificando términos con la expresión de  $G(s)_{orden2}$  calculada en el apartado anterior obtenemos que el valor de la frecuencia natural no amortiguada del motor simplificado es:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= K = \frac{k_2}{JL} \quad \Rightarrow \\ \omega_n &= \sqrt{K} = \sqrt{\frac{k_2}{JL}} = \sqrt{9,899 \cdot 10^6} = 3,146 \text{ krad/s} \end{aligned}$$

y que el valor de la constante de amortiguamiento es:

$$\begin{aligned} 2\xi\omega_n &= p_2 \quad \Rightarrow \\ \xi &= \frac{p_2}{2\omega_n} = \frac{-(JR + BL) + \sqrt{(JR + BL)^2 - 4 \cdot JL \cdot (BR + k_1 k_2)}}{2JL} = \frac{50,808}{2 \cdot 3,146 \cdot 10^3} = 0,008 \end{aligned}$$

Este valor del coeficiente de amortiguamiento tan bajo clasifica nuestro sistema con una dinámica de subamortiguamiento, puesto que  $\xi = 0,008 < 1$ .

Como esperamos comprobar en el apartado 5. *Estudio del motor en un sistema en lazo cerrado*, este valor de  $\xi$  va a implicar que la respuesta al escalón tenga sobreelongación, esto es, que la salida va a sobrepasar su valor final durante el régimen transitorio.

### **3.4 Relación de los parámetros de diseño en el tiempo y en la frecuencia con los parámetros característicos de un sistema de 2º orden ( $\xi$ y $\omega_n$ )**

Este apartado es totalmente teórico. Presentamos la definición de los parámetros de diseño para la respuesta transitoria y en frecuencia de un sistema así como un conjunto de expresiones que relacionan estos parámetros con los parámetros característicos de un sistema de 2º orden. La información ha sido extraída de varias fuentes que se pueden consultar en el apartado 9. *Referencias bibliográficas.*

#### **3.4.1 Relaciones con los parámetros de diseño de la respuesta transitoria a un escalón unitario**

- **Tiempo de retardo,  $t_d$**

El tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

$$t_d \cong \frac{1+0,7\xi}{\omega_n}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$t_d \cong \frac{1,1+0,125\xi+0,469\xi^2}{\omega_n}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (\text{mejor aproximación})$$

- **Tiempo de subida,  $t_r$**

El tiempo de subida es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para sistemas subamortiguados de segundo orden, por lo general se usa el tiempo de subida de 0 a 100%. Para sistemas sobreamortiguados se usa el tiempo de subida de 0 a 100%.

$$t_r \cong \frac{0,8+2,5\xi}{\omega_n}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$t_r \cong \frac{1-0,4167\xi+2,917\xi^2}{\omega_n}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (\text{mejor aproximación})$$

- **Tiempo de pico,  $t_p$**

El tiempo de pico es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreelongación.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

- **Sobreelongación máxima (porcentaje),  $M_p$**

La máxima sobreelongación es el máximo valor del pico de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad.

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- **Tiempo de asentamiento,  $t_s$**

El tiempo de asentamiento es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final.

$$t_s \cong \frac{3,2}{\xi\omega_n}, \quad 0 < \xi < 0,69$$

$$t_s \cong \frac{4,5\xi}{\omega_n}, \quad \xi > 0,69$$

### **3.4.2. Relaciones con los parámetros de diseño de la respuesta en frecuencia**

- **Pico de resonancia,  $M_r$**

El pico de resonancia  $M_r$  es el valor máximo de la magnitud (en decibelios) de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado  $|F(j\omega)|$ .

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_r = 1, \quad \xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- **Frecuencia de resonancia,  $\omega_r$**

La frecuencia de resonancia  $\omega_r$  es la frecuencia en la cual el pico de resonancia  $M_r$  ocurre.

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}, \quad \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega_r = 0, \quad \xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- **Ancho de banda, B**

El ancho de banda B es la frecuencia en la cual  $|H(j\omega)|$  cae 3 dB por debajo de su valor en la frecuencia cero.

$$B = \omega_n \sqrt{(1-2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

- **Margen de ganancia, MG**

El margen de ganancia MG es el recíproco de la magnitud  $|G(j\omega)|$  en la frecuencia a la cual el ángulo de fase es  $-180^\circ$ . Si se define la frecuencia de cruce de fase  $\omega_{cp}$  como la frecuencia a la cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto es igual a  $-180^\circ$ , se produce el margen de ganancia MG:

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_{cp})|} \quad \text{o} \quad MG(dB) = -20 \log |G(j\omega_{cp})|$$

Un margen de ganancia positivo (en dB) significa que el sistema es estable; y si es negativo (en dB), será inestable. Si es nulo (en dB), el sistema es críticamente estable, es decir, tiende a la inestabilidad.

Para un sistema de fase mínima estable, el margen de ganancia indica en cuánto se puede incrementar la ganancia antes de que el sistema se haga inestable. Para un sistema de fase mínima inestable, el margen de ganancia nos dice en qué cantidad hay que reducir la ganancia para hacer al sistema estable.

El margen de ganancia de un sistema de primer o segundo orden es infinito, debido a que los diagramas polares de tales sistemas no cruzan el eje real negativo. Por tanto, los sistemas de primer y segundo orden en teoría no pueden ser inestables.

$$MG = \infty$$

- **Margen de fase, MF**

El margen de fase MF es la cantidad de retardo de fase adicional en la frecuencia de cruce de ganancia requerida para llevar el sistema al borde de la inestabilidad. La frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_{cg}$  es la frecuencia en la cual  $|G(j\omega)|$ , magnitud de la función de transferencia en lazo abierto, es unitaria. El margen de fase MF es de  $180^\circ$  más el ángulo de fase  $\varphi$  de la función de transferencia en lazo abierto en la frecuencia de cruce de ganancia, es decir,

$$MF = 180^\circ + \varphi$$

La relación del margen de fase con los parámetros característicos de un sistema de segundo orden es:

$$MF = 90^\circ - \arctg \frac{\omega_n}{2\xi\omega_n}$$

## **4. Caracterización de los parámetros de diseño**

### **4.1 Aplicación implementada: Sistema de control de la posición de un motor**

Antes de establecer los parámetros de diseño de nuestro motor vamos a explicar la finalidad de nuestro proyecto.

Recientemente hemos oído hablar de un sistema implantado en los aparcamientos de Alemania que consigue duplicar su número de plazas y que nos ha resultado muy interesante.

El sistema consiste en instalar en cada plaza de aparcamiento una plataforma basculante. El usuario llega con el primero de sus coches y lo aparca sobre dicha plataforma. Accionando un botón de control, la plataforma se inclina  $45^\circ$  de tal forma que el automóvil queda en pendiente. De esta manera deja un hueco bajo él permitiendo aparcar un segundo coche.

Aunque el motor que estamos utilizando no es apropiado para esta aplicación dado que no dispone de la potencia necesaria para levantar un vehículo, vamos a suponer con fines didácticos que sí es capaz.

De esta manera nuestro objetivo va a ser controlar la posición del motor de manera que en régimen permanente su ángulo de giro sea exactamente de  $45^\circ$ .

Otro parámetro importante para nuestra aplicación va a ser que la sobreelongación máxima de nuestro sistema no sea demasiado elevada. Si durante el régimen transitorio el motor girase muy por encima de  $45^\circ$  podría ser que la plataforma se inclinase demasiado y que el coche resultase dañado.

Además, nos interesa que nuestro sistema sea estable y que lo sea con suficiente margen. Por lo tanto intentaremos que el margen de ganancia y el margen de fase sean tales que aseguren la estabilidad del sistema aún cuando haya pequeñas variaciones de los componentes del sistema.

Finalmente, también es relevante para nuestro diseño conseguir que no aparezca el fenómeno de resonancia que podría dar lugar a picos de oscilación indeseables para la frecuencia de resonancia.

## **4.2 Caracterización de los parámetros de diseño**

Explicado el objetivo de nuestro diseño, a continuación presentamos un resumen de los parámetros que esperamos cumplir.

Decidimos que vamos a alimentar nuestro sistema con un escalón de 5V para que nuestro sistema sea compatible con TTL. Es decir, que la entrada al sistema de control va a ser:

$$v(t) = 5, \quad 0 < t < \infty$$

Además, vamos a considerar la presencia de posibles perturbaciones constantes de valor:

$$d(t) = 1, \quad 0 < t < \infty$$

### **4.2.1 Parámetros de diseño en el dominio del tiempo**

- **Régimen transitorio**

Como hemos explicado en el apartado *4.1 Aplicación implementada: Sistema de control de la posición de un motor* uno de los parámetros críticos de nuestro diseño es la sobreelongación máxima. Para evitar posibles daños al automóvil establecemos que:

$$M_p < 10\%$$

de tal forma que el ángulo máximo de giro de nuestra plataforma en régimen transitorio tenga un valor de:

$$\theta(t)_{\text{máx}} = 1,1 \cdot 45^\circ = 49,5^\circ$$

Este valor máximo no debe alcanzarse incluso en presencia de perturbación máxima.

El tiempo de establecimiento  $t_s$  no es un parámetro crítico de nuestro diseño. El usuario preferirá que sea lo menor posible y, por ello, fijamos como máximo un tiempo de espera de 1 segundo. Es decir,

$$t_s < 1\text{seg}$$

El resto de parámetros de diseño para el régimen transitorio: el tiempo de pico  $t_p$ , el tiempo de retardo  $t_d$  y el tiempo de subida  $t_s$  no son especialmente relevantes para nuestra aplicación y por ello los dejamos sin definir.

- **Régimen permanente**

El sistema de control diseñado debe cumplir en régimen permanente que:

- El error en régimen permanente sea nulo para la entrada de un escalón de  $\pi/4$  V, una rampa y una parábola.
- La perturbación debe anularse.

#### **4.2.2 Parámetros de diseño en el dominio de la frecuencia**

Con respecto a los parámetros de diseño en el dominio de la frecuencia vamos a tratar que:

- No aparezca el fenómeno de resonancia, es decir, que:

$$M_r = 1 \quad \text{y} \quad \omega_r = 0$$

- El margen de ganancia MG y el margen de fase MF sean suficientes para garantizar la estabilidad del sistema ante pequeñas variaciones de los componentes de nuestro sistema:

$$MG > 6dB \quad \text{y} \quad 30^\circ < MF < 60^\circ$$

- El ancho de banda B de nuestro controlador no es un parámetro crítico y por ello lo dejamos sin definir.

Sólo en el caso de que no consigamos eliminar el fenómeno de la resonancia, intentaremos que el ancho de banda sea tal que elimine la frecuencia de resonancia  $\omega_r$ , es decir, que:

$$B < \omega_r$$

## **5. Estudio del motor en un sistema en lazo cerrado**

### **5.1 Justificación**

En el apartado 2. *Estudio del motor en lazo abierto como sistema de 3<sup>er</sup> orden* hemos llevado a cabo una caracterización del motor en un sistema en lazo abierto.

Tras fijar los parámetros de diseño en el apartado anterior, 4. *Caracterización de los parámetros de diseño*, y antes de comenzar con el diseño del controlador propiamente dicho en el apartado 6. *Diseño de un controlador de dos grados de libertad*, vamos a realizar un pequeño estudio para ver como se comporta el motor por el simple hecho de cerrar el lazo de realimentación.

Para ello vamos a obtener la función de transferencia del motor en lazo cerrado en el siguiente apartado: 5.2 *Cálculo de la función de transferencia en lazo cerrado*. Una vez calculada la función de transferencia llevaremos a cabo una simulación en Matlab de nuestro sistema en lazo cerrado en el apartado 5.3 *Simulación en Matlab del motor en lazo cerrado* siguiendo el mismo esquema que durante el estudio del motor en lazo abierto en el apartado 2.3 *Simulación en Matlab del motor en lazo abierto*.

## 5.2 Cálculo de la función de transferencia en lazo cerrado

Para obtener la función de transferencia en lazo cerrado hemos de analizar la siguiente estructura:

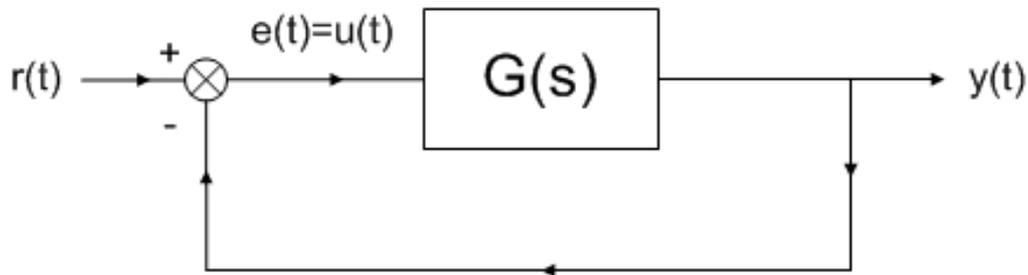


Figura 8: Estructura del sistema en lazo cerrado

donde  $G(s)$  es la función de transferencia del motor en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s}$$

Observando el esquema es fácil obtener las siguientes relaciones en el tiempo y en el dominio de Laplace:

$$e(t) = u(t) = r(t) - y(t) \quad \Rightarrow \quad E(s) = U(s) = R(s) - Y(s)$$

$$y(t) = g(t) * u(t) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s)$$

$$y(t) = f(t) * r(t) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = F(s)R(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia del sistema será:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Y(s)}{E(s) + Y(s)} = \frac{G(s)U(s)}{U(s) + G(s)U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

que es la tan conocida expresión de un sistema en lazo cerrado.

Sustituyendo la expresión de  $G(s)$  indicada más arriba obtenemos que:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s}}{1 + \frac{k_2}{[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]s}} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{k_2}{JLs^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + k_1k_2)s + k_2}$$

Dando los valores adecuados a las constantes, la función de transferencia del motor en lazo cerrado queda:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{0,03218}{3,251 \cdot 10^{-9} s^3 + 2,151 \cdot 10^{-5} s^2 + 0,001085s + 0,03218}$$

Antes de realizar la simulación de esta función de transferencia en el siguiente apartado, *5.3 Simulación en Matlab del motor en lazo cerrado*, podemos observar que al cerrar el lazo de realimentación han cambiado los polos del sistema. En concreto ya no hay un polo en el origen. Esto va a provocar que las características del sistema cambien notablemente.

## 5.3 Simulación en Matlab del motor en lazo cerrado

### 5.3.1 Diagrama polos-ceros. Conclusiones

Para la obtención de los polos y ceros de la función de transferencia del motor en lazo cerrado partimos de dicha función, calculada en el apartado anterior, 5.2 *Cálculo de la función de transferencia en lazo cerrado*:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_2}{JLs^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + k_1k_2)s + k_2}$$

Podemos sacar varias conclusiones sin más que ver esta expresión, al igual que hicimos durante el estudio del motor en lazo abierto:

- No tiene ceros, puesto que no hay valores que anulen el numerador de la función de transferencia.
- Tiene tres polos dado que el denominador es un polinomio de grado 3. Ya no tiene un polo en el origen, como sucedía con el motor en lazo abierto. Esta es la primera gran diferencia que encontramos al cerrar el lazo de realimentación.

El cálculo analítico de los polos ya no es tan sencillo como en el caso del motor en lazo abierto. Para obtenerlos hemos utilizado Maple y Matlab. Ambos resultados coinciden, como era de esperar. Sin embargo, sólo incluimos el resultado numérico porque la solución simbólica dada por Maple para cada polo ocupa media página:

$$JLs^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + k_1k_2)s + k_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

- $p_1 = - 6567,174$
- $p_2 = - 25,288 + 29,459j$
- $p_3 = - 25,288 - 29,459j$

Este resultado es bastante sorprendente. Por el simple hecho de cerrar el lazo de realimentación de nuestro sistema, hemos pasado de tener un polo en el origen y dos polos reales a tener un polo real y dos polos complejos conjugados. Esto va a provocar que tengamos una respuesta oscilatoria cuando introduzcamos como entrada un escalón.

Conociendo los valores de los polos, podemos expresar la función de transferencia en lazo cerrado de la siguiente manera:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{9,899 \cdot 10^6}{3,251 \cdot 10^{-9} s^3 + 2,151 \cdot 10^{-5} s^2 + 0,001085 s + 0,03218} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{9,899 \cdot 10^6}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{9,899 \cdot 10^6}{(s + 6567,174)(s + 25 - 29,459j)(s + 25 + 29,459j)}$$

Como hicimos durante el estudio del motor en lazo abierto, podemos obtener la representación gráfica de los polos del sistema utilizando la función *pzmap()* proporcionada por Matlab:

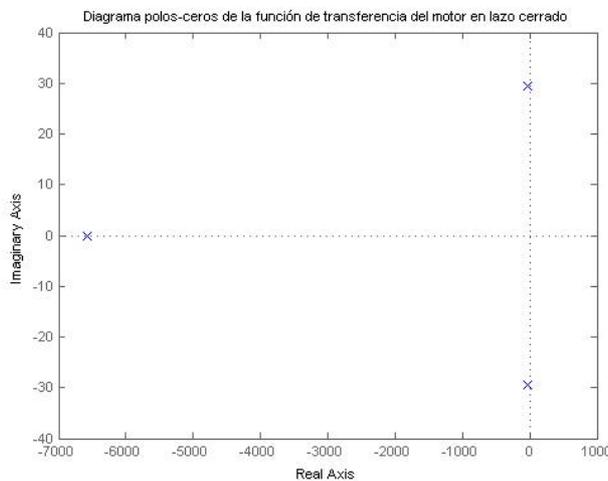


Figura 9: Diagrama polos-ceros de la función de transferencia del motor en lazo cerrado

Observando la gráfica podemos comprobar fácilmente que:

- Sólo hay un polo real como ya habíamos visto analíticamente. Este polo está muy lejos del origen por lo que influirá poco en la respuesta transitoria del sistema.
- Ahora hay dos polos complejos conjugados muy cerca del eje imaginario.
- Hemos pasado de un sistema críticamente estable en lazo abierto a un sistema estable en lazo cerrado puesto que todos los polos del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$  y ya no tenemos un polo en el origen.
- El sistema sigue siendo de fase mínima porque no contiene ceros ni polos en el semiplano derecho del plano complejo  $s$ .
- El sistema ya no es de tipo 1 por no tener un polo en el origen.

### 5.3.2 Respuesta al escalón, rampa y parábola. Conclusiones

- Respuesta al escalón

En esta ocasión no vamos a obtener la respuesta del sistema a un escalón unitario puesto que ya hemos definido en el apartado 4. *Caracterización de los parámetros de diseño* nuestros objetivos de diseño.

Aunque nuestro sistema va a ir alimentado con una señal de 5V para ser compatible con TTL, la entrada  $r(t)$  debe ser un escalón de  $\frac{\pi}{4}$  V puesto que si queremos que el error en régimen permanente sea nulo, entonces:

$$e(t)_{R.P} = r(t)_{R.P} - y(t)_{R.P} = 0 \quad \Rightarrow \quad r(t)_{R.P} = y(t)_{R.P} = \frac{\pi}{4}$$

La respuesta del sistema vendrá dada por la siguiente expresión, donde hemos tenido en cuenta que la transformada de Laplace de la entrada

$$r(t) = \frac{\pi}{4} \text{ es } R(s) = \frac{\pi/4}{s} :$$

$$Y(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{k_2}{JLs^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + k_1k_2)s + k_2} \cdot \frac{\pi/4}{s} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1} \left[ \frac{\pi/4 k_2}{JLs^4 + (JR + BL)s^3 + (BR + k_1k_2)s^2 + k_2s} \right]$$

Aunque el cálculo de  $y(t)$  es complicado, podemos determinar fácilmente el valor en régimen permanente utilizando el Teorema del Valor Final:

$$y(t)_{R.P} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\pi/4 k_2}{JLs^4 + (JR + BL)s^3 + (BR + k_1k_2)s^2 + k_2s} = \pi/4$$

Este es otro resultado sorprendente. Al cerrar el lazo de realimentación de nuestro sistema hemos conseguido que la respuesta al escalón alcance un valor constante en el régimen permanente. En el caso del circuito en lazo abierto el resultado era  $\infty$ , es decir, el motor seguía girando indefinidamente.

Por lo tanto, y para nuestra sorpresa, hemos avanzado bastante en la consecución de nuestros objetivos simplemente utilizando un sistema en lazo cerrado. Ya hemos conseguido que el motor alcance un valor en régimen permanente de  $\pi/4$ , que es el valor en radianes del giro de  $45^\circ$  que deseamos para nuestro sistema de aparcamiento.

A continuación presentamos la gráfica de la respuesta a un escalón de  $\pi/4$  V obtenida con ayuda de Matlab:

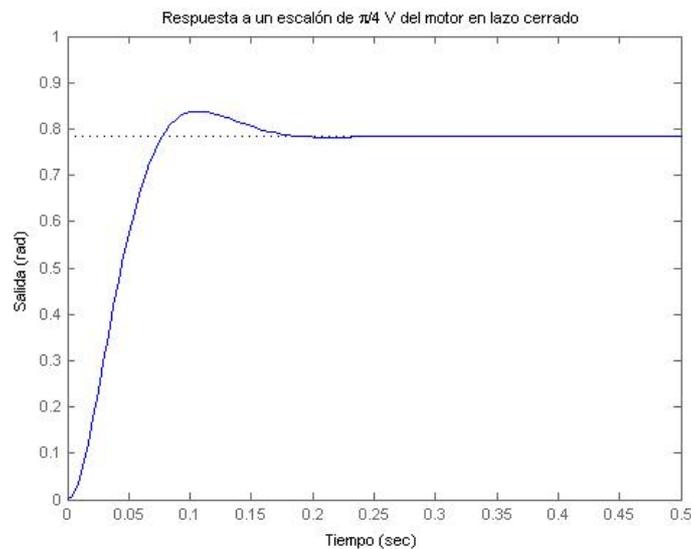


Figura 10: Respuesta a un escalón de  $\pi/4$  V del motor en lazo cerrado

Obtenemos los valores de los parámetros de diseño en régimen permanente y en régimen transitorio con ayuda de Matlab. Para ver los detalles de la programación, consultar el apartado *10.4 Simulación del motor en lazo cerrado*:

- El valor en régimen permanente coincide con el calculado con el Teorema del Valor Final, como era de esperar. Como hemos comentado en la página anterior, la respuesta en régimen permanente del sistema en lazo cerrado ya toma el valor establecido para nuestro diseño.
- Los valores de los parámetros de diseño del régimen transitorio son:
  - Tiempo de subida, calculado como el tiempo que tarda en alcanzar el 100% de su valor final:  $t_r = 0,078s$
  - Tiempo de pico:  $t_p = 0,107s$

- Sobreelongación máxima:  $M_p = 0.838rad$
- Sobreelongación máxima (porcentaje):  $M_p = 6,74\%$

Este valor ya se encuentra dentro de los límites establecido para nuestro diseño. Por lo tanto, parece ser que nuestra especificación de diseño de una sobreelongación menor del 10% ha sido muy relajada. Intentaremos disminuir ese porcentaje con nuestro controlador.

- Tiempo de establecimiento, calculado como el tiempo que tarda en alcanzar la banda del 0,98 al 1,02% del valor final:  $t_s = 0,154s$ . Este valor también se encuentra dentro de los límites establecidos en nuestro diseño. Hacemos el mismo comentario que en el punto anterior.

- Se trata de un sistema subamortiguado puesto que la salida del sistema sobrepasa el valor en régimen permanente. Este hecho no es inesperado puesto que ya lo supusimos en el apartado *3.3 Relación entre los parámetros del motor (R, L, B y J) y los característicos de un sistema de 2º orden ( $\zeta$  y  $\omega_n$ )*

- **Respuesta a una rampa**

La respuesta del sistema en lazo cerrado a una rampa vendrá dada por la siguiente expresión, donde hemos tenido en cuenta que la transformada de Laplace de una rampa  $r(t)=t$  es  $R(s)=\frac{1}{s^2}$ :

$$Y(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{k_2}{JLs^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + k_1k_2)s + k_2} \cdot \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{k_2}{JLs^5 + (JR + BL)s^4 + (BR + k_1k_2)s^3 + k_2s^2}\right]$$

Como hemos comentado para el caso de la respuesta al escalón, el cálculo de  $y(t)$  es complicado. Sin embargo podemos determinar fácilmente el valor en régimen permanente utilizando el Teorema del Valor Final:

$$y(t)_{R.P} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k_2}{JLs^5 + (JR + BL)s^4 + (BR + k_1k_2)s^3 + k_2s^2} = \infty$$

Este resultado nos permite concluir que si alimentamos el motor con una rampa, el motor comenzará a girar indefinidamente. Para visualizar el resultado de forma gráfica utilizamos los comandos `lsim()` y `plot()` de Matlab:

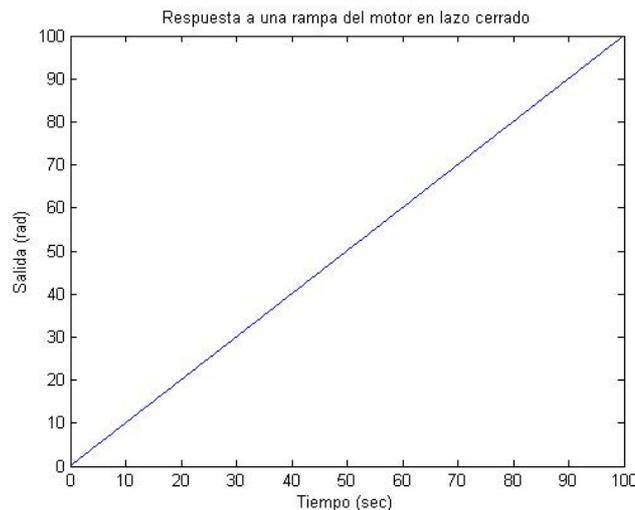


Figura 11: Respuesta a la rampa del motor en lazo cerrado

El resultado obtenido también nos sorprende. La respuesta a una rampa en lazo cerrado es, precisamente, una rampa. Esto difiere de lo obtenido durante el estudio del motor en lazo abierto.

- **Respuesta a una parábola**

Cuando introducimos como entrada de nuestro sistema en lazo cerrado una parábola, la salida tendrá la siguiente expresión, donde hemos tenido en cuenta que la transformada de Laplace de una parábola  $u(t)=t^2$  es

$$U(s) = \frac{1}{s^3} :$$

$$Y(s) = F(s) \cdot R(s) = \frac{k_2}{JLs^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + k_1k_2)s + k_2} \cdot \frac{1}{s^3} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1} \left[ \frac{k_2}{JLs^6 + (JR + BL)s^5 + (BR + k_1k_2)s^4 + k_2s^3} \right]$$

Como hemos comentado para el caso de la respuesta al escalón y de la rampa, el cálculo de  $y(t)$  es complicado. Sin embargo podemos determinar fácilmente el valor en régimen permanente utilizando el Teorema del Valor Final:

$$y(t)_{R.P} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k_2}{JLs^6 + (JR + BL)s^5 + (BR + k_1k_2)s^4 + k_2s^3} = \infty$$

Por lo tanto, al introducir una entrada en forma de parábola en nuestro sistema, el motor gira indefinidamente. Podemos visualizar este resultado con ayuda del comando `lsim()` de Matlab:

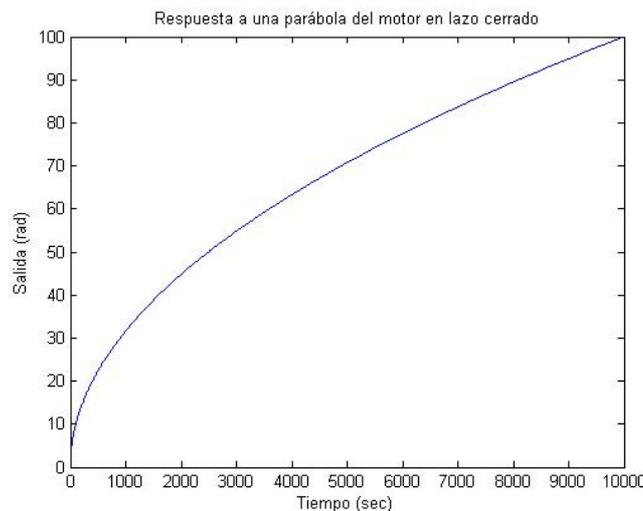


Figura 12: Respuesta a una parábola del motor en lazo cerrado

Notamos con sorpresa que, de forma análoga al caso de la rampa, al introducir una entrada parabólica en nuestro sistema en lazo cerrado, la salida también tiene forma de parábola.

### 5.3.3 Diagrama de Bode. Conclusiones

Como ya hicimos durante el estudio del motor en lazo abierto, vamos a obtener el diagrama de Bode del sistema en lazo cerrado.

Para obtenerlo comenzamos calculando la respuesta en frecuencia del motor en lazo cerrado:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_2}{JLs^3 + (JR + BL)s^2 + (BR + k_1k_2)s + k_2} \Rightarrow$$

$$F(j\omega) = F(s)_{s=j\omega} = \frac{k_2}{JL(j\omega)^3 + (JR + BL)(j\omega)^2 + (BR + k_1k_2)(j\omega) + k_2} \Rightarrow$$

$$F(j\omega) = \frac{k_2}{[k_2 - (JR + BL)\omega^2] + j[(BR + k_1k_2)\omega - JL\omega^3]}$$

Conocida la función de transferencia determinamos su módulo y fase:

$$|F(j\omega)| = \frac{k_2}{\sqrt{[k_2 - (JR + BL)\omega^2]^2 + [(BR + k_1k_2)\omega - JL\omega^3]^2}}$$

$$\arg(F(j\omega)) = -\arctg \frac{(BR + k_1k_2)\omega - JL\omega^3}{k_2 - (JR + BL)\omega^2}$$

Para la representación gráfica de estos resultados utilizamos el comando `bode()` proporcionado por Matlab.

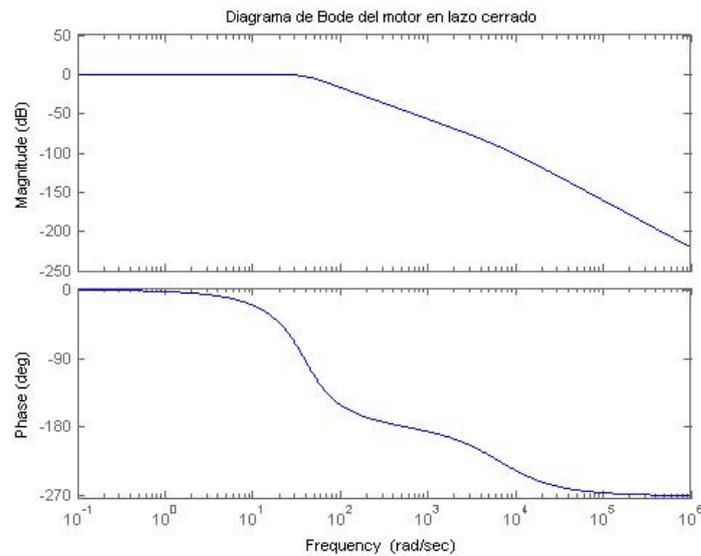


Figura 13: Diagrama de Bode del motor en lazo cerrado

Podemos extraer mucha información de este diagrama. Con ayuda de Matlab hemos obtenido algunos parámetros característicos de la respuesta en frecuencia del sistema en lazo cerrado:

- El motor sigue funcionando como un filtro paso bajo cuando cerramos el lazo de realimentación. El ancho de banda se ha incrementado un poco con respecto al sistema en lazo abierto:
  - $B = 42,426 \text{ rad/s}$
- El hecho de que el sistema en lazo cerrado no tenga un polo en el origen provoca que la ganancia del sistema permanezca constante hasta llegar a la frecuencia natural de los polos conjugados. Esto difiere de lo obtenido en el sistema en lazo abierto donde, debido al polo en el origen, el diagrama de Bode comenzaba con un cambio de pendiente de -20 dB/dec en  $\omega \rightarrow 0$ .

- Podemos determinar la posición de los polos buscando los puntos donde cambia de pendiente el módulo de la respuesta en frecuencia. En esta ocasión sólo hay dos cambios de pendiente:
  - El primer cambio de pendiente entre  $\omega = 10$  rad/s y  $\omega = 100$  rad/s es debido a la pareja de polos conjugados. Como hemos visto en el apartado 5.3.1 *Diagrama polos-ceros. Conclusiones* los polos conjugados tienen el valor  $\omega_{2,3} = -25,288 \pm 29,459j$  por lo que el cambio de pendiente ocurre a la frecuencia  $\omega = \sqrt{25,288^2 + 29,459^2} = 38,824 \text{ rad/s}$ .

Este valor tiene sentido puesto que la caída de 3 dB ocurre para la frecuencia  $\omega = 42,426$  rad/s.

  - El segundo cambio de pendiente ocurre entre  $\omega = 1000$  rad/s y  $\omega = 10000$  rad/s. Teóricamente hemos calculado que el polo está situado en  $\omega_1 = 6567.174$  rad/s.
- Además, dado que estamos estudiando el sistema en lazo cerrado, podemos obtener la frecuencia y el pico de resonancia. A primera vista parece que no aparece dicho fenómeno pero con ayuda de Matlab descubrimos que sí lo hace, aunque de forma muy leve:
  - $M_r(dB) = 0,1dB$
  - $\omega_r = 15,107 \text{ rad/s}$

### 5.3.4 Diagrama de Nyquist. Conclusiones

Como ya hemos visto durante el estudio del motor en lazo abierto, el diagrama de Nyquist consiste en representar simultáneamente el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia de un determinado sistema.

Vamos a obtenerlo haciendo uso de los resultados del apartado 5.3.1 *Diagrama polos-ceros. Conclusiones*. En dicho apartado concluíamos que el sistema en lazo cerrado no tiene ceros y posee tres polos, dos de ellos complejos conjugados. Decíamos, además, que el sistema realimentado ya no era del tipo 1. Entonces, podemos expresar la función de transferencia de la siguiente forma genérica:

$$F(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

donde  $p_1$  es un polo real y  $p_2$  y  $p_3$  son polos complejos conjugados.

Por lo tanto, la respuesta en frecuencia será:

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega} = \frac{K}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} \Rightarrow$$

$$F(j\omega) = \frac{K}{(j\omega - p_1)(j\omega + \sigma - j\omega_d)(j\omega + \sigma + j\omega_d)} \Rightarrow$$

$$F(j\omega) = \frac{K}{(j\omega - p_1)(\sigma + j(\omega - \omega_d))(\sigma + j(\omega + \omega_d))}$$

donde hemos considerado que los polos conjugados se pueden expresar de la forma  $p_{2,3} = -\sigma \pm j\omega_d$ .

Escrita la respuesta en frecuencia de esta manera es fácil determinar su módulo y fase:

$$|F(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{p_1^2 + \omega^2} \sqrt{\sigma^2 + (\omega - \omega_d)^2} \sqrt{\sigma^2 + (\omega + \omega_d)^2}}$$

$$\arg(F(j\omega)) = -\arctg\left(\frac{\omega}{-p_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega - \omega_d}{\sigma}\right) - \arctg\left(\frac{\omega + \omega_d}{\sigma}\right)$$

Para dibujar el diagrama de Nyquist hemos de ir dando valores a  $\omega$  y obtener el valor asociado de  $|F(j\omega)|$  y  $\arg(F(j\omega))$ .

Por ejemplo, para  $\omega = 0$  tenemos que el módulo de la respuesta en frecuencia vale:

$$|F(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{K}{\sqrt{p_1^2 + \omega^2} \sqrt{\sigma^2 + (\omega - \omega_d)^2} \sqrt{\sigma^2 + (\omega + \omega_d)^2}} \Big|_{\omega=0} \Rightarrow$$

$$|F(j0)| = \frac{K}{\sqrt{p_1^2} \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}} = \frac{K}{|p_1||p_2|^2} \Rightarrow$$

$$|F(j0)| = \frac{K}{|p_1||p_2|^2} = \frac{9,899 \cdot 10^6}{6567,174 \cdot (25,288^2 + 29,459^2)} = 1$$

y la fase:

$$\arg(F(j\omega))_{\omega=0} = -\arctg\left(\frac{\omega}{-p_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega - \omega_d}{\sigma}\right) - \arctg\left(\frac{\omega + \omega_d}{\sigma}\right) \Big|_{\omega=0} \Rightarrow$$

$$\arg(F(j0)) = -\arctg(0) - \arctg\left(\frac{-\omega_d}{\sigma}\right) - \arctg\left(\frac{+\omega_d}{\sigma}\right) = 0^\circ$$

Es importante notar como los dos polos complejos conjugados:

- Contribuyen de igual manera al módulo de la respuesta en frecuencia.
- Su contribución a la fase de la respuesta en frecuencia se anula para  $\omega = 0$ .

Operando de forma análoga para el caso  $\omega = \infty$  obtenemos que el módulo de la respuesta en frecuencia para el sistema en lazo cerrado vale:

$$|F(j\omega)|_{\omega=\infty} = \frac{K}{\sqrt{p_1^2 + \omega^2} \sqrt{\sigma^2 + (\omega - \omega_d)^2} \sqrt{\sigma^2 + (\omega + \omega_d)^2}} \Big|_{\omega=\infty} = 0$$

y la fase:

$$\arg(F(j\omega))_{\omega=\infty} = -\arctg\left(\frac{\omega}{-p_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega - \omega_d}{\sigma}\right) - \arctg\left(\frac{\omega + \omega_d}{\sigma}\right) \Rightarrow$$

$$\arg(F(j\infty)) = -\arctg(\infty) - \arctg(\infty) - \arctg(\infty) = -270^\circ$$

Estos resultados coinciden con los obtenidos en el diagrama de Bode. Además, son los esperados para un sistema tipo 0 del que sabemos que:

- El punto inicial del diagrama polar, que corresponde a  $\omega = 0$ , es finito y está sobre el eje real positivo. La tangente en el diagrama polar en  $\omega = 0$  es perpendicular al eje real.
- El punto terminal, que corresponde a  $\omega = \infty$ , está en el origen, y la curva es tangente a uno de sus ejes. En nuestro caso, al semieje imaginario positivo.

Obtenemos el diagrama de Nyquist para frecuencias positivas con ayuda del comando `nyquist()` de Matlab. El resultado obtenido es el siguiente:

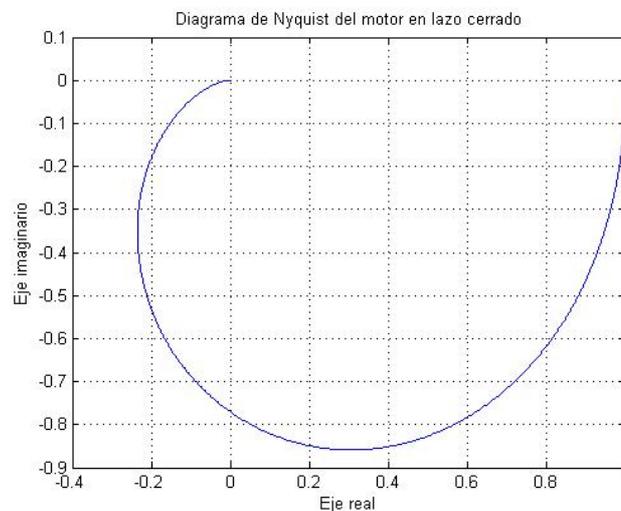


Figura 14: Diagrama de Nyquist del motor en lazo cerrado

Notamos que el sistema en lazo cerrado es estable puesto que la curva obtenida en el diagrama de Nyquist no rodea al punto  $-1 + j0$ .

## **6. Diseño de un controlador de dos grados de libertad**

### **6.1 Estructura elegida**

Para poder eliminar la perturbación  $d(t)$  y controlar la respuesta a la entrada  $r(t)$ , necesitamos diseñar un controlador de dos grados de libertad. La estructura que elegimos es la siguiente:

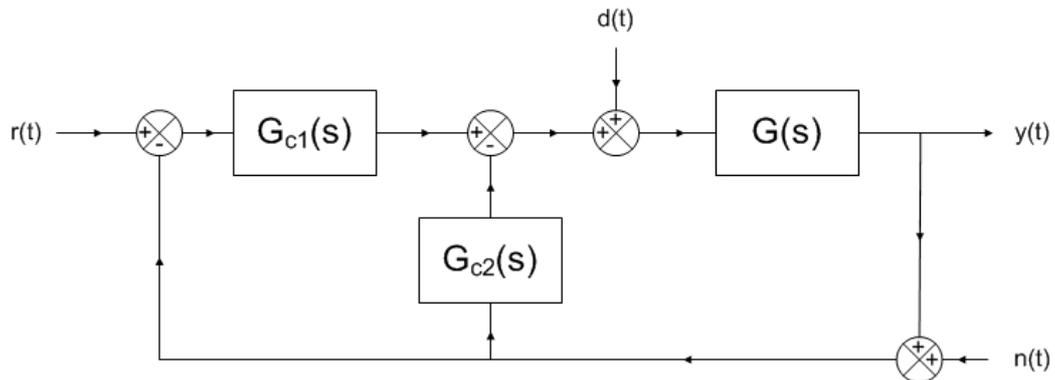


Figura 15: Estructura del controlador de dos grados de libertad

A la hora del diseño, consideraremos que la perturbación a la salida,  $n(t)$ , es nula.

## 6.2 Cálculo de las funciones de transferencia del controlador: $F_{vr}(s)$ , $F_{vd}(s)$ y $F_{vn}(s)$

### • Cálculo de la función de transferencia $F_{vr}(s)$

Para calcular la función de transferencia  $F_{vr}(s)$  anulamos las contribuciones de  $d(t)$  y  $n(t)$  en la estructura del controlador de dos grados de libertad de la página anterior y nos queda:

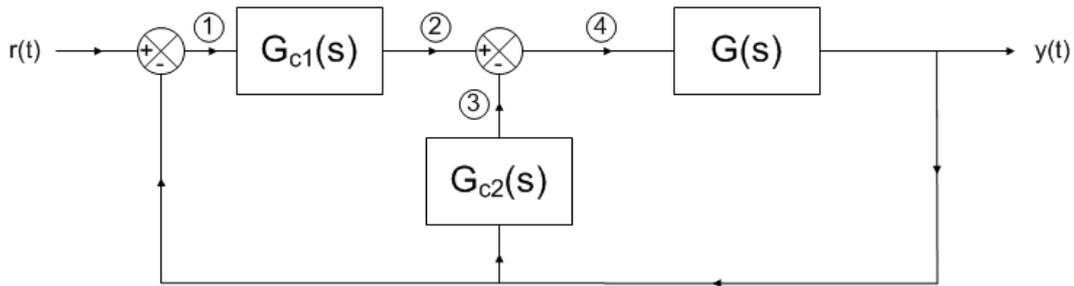


Figura 16: Estructura del controlador de dos grados de libertad para el cálculo de  $F_{vr}(s)$

Obtenemos las señales en el dominio de Laplace en cada uno de los puntos indicados en la figura:

- $Z_1(s) = R(s) - Y(s)$
- $Z_2(s) = G_{c1}(s)Z_1(s) = G_{c1}(s)[R(s) - Y(s)]$
- $Z_3(s) = G_{c2}(s)Y(s)$
- $Z_4(s) = Z_2(s) - Z_3(s) = G_{c1}(s)[R(s) - Y(s)] - G_{c2}(s)Y(s) \Rightarrow$   
 $Z_4(s) = G_{c1}(s)R(s) - [G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]Y(s)$
- $Y(s) = G(s)Z_4(s) = G(s)G_{c1}(s)R(s) - G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]Y(s)$

Ahora podemos despejar la función de transferencia buscada de la última expresión:

$$Y(s) = G(s)G_{c1}(s)R(s) - G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]Y(s) \Rightarrow$$

$$[1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]]Y(s) = G(s)G_{c1}(s)R(s) \Rightarrow$$

$$F_{vr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{d=n=0} = \frac{G(s)G_{c1}(s)}{1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]}$$

• **Cálculo de la función de transferencia  $F_{yd}(s)$**

Para determinar la función de transferencia  $F_{yd}(s)$  seguimos un procedimiento análogo al que hemos utilizado para calcular  $F_{yr}(s)$ . Anulamos las contribuciones de  $r(t)$  y  $n(t)$  en la estructura del controlador de dos grados de libertad de la figura 15 y, tras ordenarla un poco, nos queda:

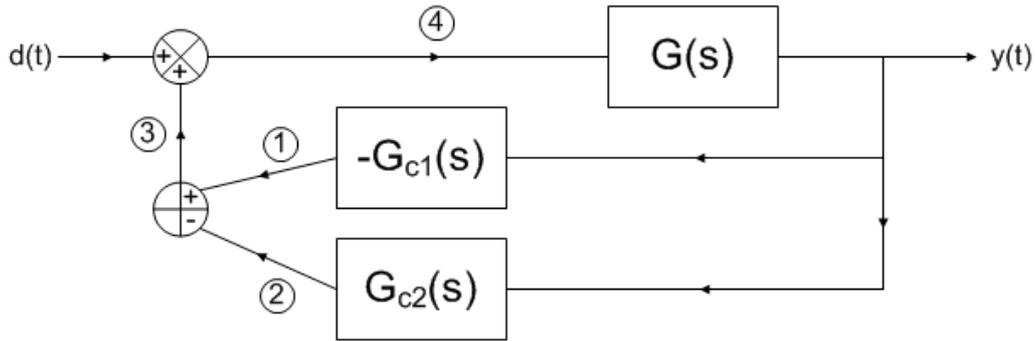


Figura 17: Estructura del controlador de dos grados de libertad para el cálculo de  $F_{yd}(s)$

Las señales en el dominio de Laplace de los puntos indicados en la figura son:

- $Z_1(s) = -G_{c1}Y(s)$
- $Z_2(s) = G_{c2}(s)Y(s)$
- $Z_3(s) = Z_1(s) - Z_2(s) = -[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]Y(s)$
- $Z_4(s) = D(s) + Z_3(s) = D(s) - [G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]Y(s)$
- $Y(s) = G(s)Z_4(s) = G(s)D(s) - G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]Y(s)$

Finalmente podemos despejar la función de transferencia deseada de la última expresión:

$$Y(s) = G(s)D(s) - G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]Y(s) \quad \Rightarrow$$

$$[1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]]Y(s) = G(s)D(s) \quad \Rightarrow$$

$$F_{yd}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} \Big|_{r=n=0} = \frac{G(s)}{1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]}$$

• **Cálculo de la función de transferencia  $F_{yn}(s)$**

Para obtener  $F_{yn}(s)$  seguimos el mismo procedimiento utilizado durante el cálculo de  $F_{yr}(s)$  y  $F_{yd}(s)$ . Anulamos las contribuciones de  $r(t)$  y  $d(t)$  en la estructura del controlador de dos grados de libertad de la figura 15 y, tras ordenarla un poco, nos queda:

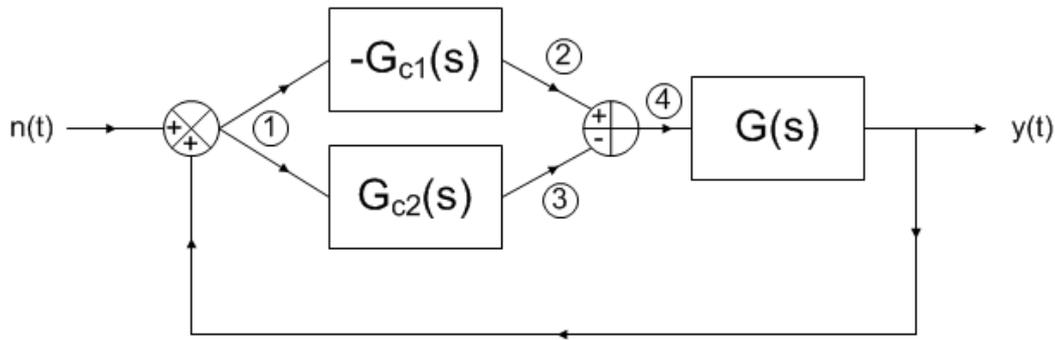


Figura 18: Estructura del controlador de dos grados de libertad para el cálculo de  $F_{yn}(s)$

Obtenemos las señales en el dominio de Laplace de cada uno de los puntos señalados en la figura:

- $Z_1(s) = N(s) + Y(s)$
- $Z_2(s) = -G_{c1}(s)Z_1(s) = -G_{c1}(s)[N(s) + Y(s)]$
- $Z_3(s) = G_{c2}(s)Z_1(s) = G_{c2}(s)[N(s) + Y(s)]$
- $Z_4(s) = Z_2(s) - Z_3(s) = -[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)][N(s) + Y(s)]$
- $Y(s) = G(s)Z_4(s) = -G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)][N(s) + Y(s)]$

Despejamos la función de transferencia buscada de la última expresión:

$$Y(s) = -G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)][N(s) + Y(s)] \quad \Rightarrow$$

$$[1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]]Y(s) = -G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]N(s) \quad \Rightarrow$$

$$F_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} \Big|_{r=d=0} = \frac{-G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]}{1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]}$$

### 6.3 Diseño con Matlab del controlador

En el apartado anterior, 6.2 *Cálculo de las funciones de transferencia del controlador*:  $F_{yr}$ ,  $F_{yd}$  y  $F_{yn}$ , hemos obtenido que las expresiones de las funciones de transferencia de la estructura de dos grados de libertad son:

$$F_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{d=n=0} = \frac{G(s)G_{c1}(s)}{1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]} = \frac{G(s)G_{c1}(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

$$F_{yd}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} \Big|_{r=n=0} = \frac{G(s)}{1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]} = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

$$F_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} \Big|_{r=d=0} = \frac{-G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]}{1 + G(s)[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]} = \frac{-G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)}$$

Es importante notar que todas las funciones de transferencia tienen el mismo denominador; esto es lógico pues un sistema tiene una única ecuación característica. Por lo tanto, todas ellas tendrán los mismos polos.

Para nuestro diseño nos interesan  $F_{yr}$  y  $F_{yd}$ , porque deseamos controlar la respuesta del motor para una entrada escalón de  $\pi/4$  V y eliminar una perturbación escalón de 1V a la entrada del motor. No consideramos que haya perturbaciones a la salida del motor.

Recordamos la función de transferencia en lazo abierto  $G(s)$  de nuestro motor calculada previamente:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{s[JLs^2 + (JR + BL)s + (BR + k_1k_2)]} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{9,899 \cdot 10^6}{s(s + 50,808)(s + 6566,943)}$$

y decidimos utilizar un controlador de tipo PID de expresión genérica:

$$G_c(s) = \frac{k(s + \alpha)(s + \beta)}{s}$$

Nuestro primer objetivo es determinar los valores de  $k$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ . Una vez conocidos estos parámetros podremos averiguar las expresiones de  $G_{c1}(s)$  y  $G_{c2}(s)$  de la estructura del controlador de dos grados de libertad que hemos decidido utilizar.

Comenzamos particularizando la función de transferencia  $F_{yd}(s)$  para las expresiones de  $G(s)$  y  $G_c(s)$  indicadas más arriba:

$$F_{yd}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_c(s)} = \frac{\frac{K}{s \cdot (s - p_2)(s - p_3)}}{1 + \frac{K}{s \cdot (s - p_2)(s - p_3)} \cdot \frac{k(s + \alpha)(s + \beta)}{s}} \Rightarrow$$

$$F_{yd}(s) = \frac{Ks}{s^2 \cdot (s - p_2)(s - p_3) + Kk(s + \alpha)(s + \beta)} \Rightarrow$$

$$F_{yd}(s) = \frac{Ks}{s^4 - (p_2 + p_3)s^3 + (Kk + p_2p_3)s^2 + Kk(\alpha + \beta)s + Kk\alpha\beta}$$

Por el método de asignación de ceros, sabemos que la función de transferencia  $F_{yr}(s)$  debe tener la siguiente expresión para que el error en régimen permanente para entradas escalón, rampa y parábola sea nulo:

$$F_{yr}(s) = \frac{(Kk + p_2p_3)s^2 + Kk(\alpha + \beta)s + Kk\alpha\beta}{s^4 - (p_2 + p_3)s^3 + (Kk + p_2p_3)s^2 + Kk(\alpha + \beta)s + Kk\alpha\beta}$$

Notamos que los coeficientes del numerador coinciden con los últimos tres del denominador.

Llamamos  $P(s)$  al denominador de ambas funciones de transferencia:

$$P(s) = s^4 - (p_2 + p_3)s^3 + (Kk + p_2p_3)s^2 + Kk(\alpha + \beta)s + Kk\alpha\beta$$

Ahora nuestro objetivo es encontrar los polos en lazo cerrado que garantizan que la respuesta de nuestro sistema es la deseada. Una vez que los conozcamos, podremos expresar  $P(s)$  como producto de dichos polos, igualar con la expresión superior y determinar los valores de  $k$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  que caracterizan nuestro controlador  $G_c(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$ . La última etapa consistirá en averiguar las expresiones de  $G_{c1}(s)$  y  $G_{c2}(s)$ .

Para obtener los polos de nuestro sistema tenemos en cuenta los resultados del apartado 5. *Estudio del motor en un sistema en lazo cerrado*. En esa sección hemos visto que la respuesta del motor en lazo cerrado se acerca bastante a nuestros objetivos de diseño.

Se trata de un sistema estable y subamortiguado con dos polos complejos conjugados dominantes y un polo real. Ahora, en lugar de tener sólo tres polos, tenemos uno más dado que el grado de  $P(s)$  es cuatro.

Por lo tanto, decidimos que nuestro sistema en lazo cerrado tenga dos polos complejos conjugados dominantes y dos polos reales. Entonces, podemos expresar el denominador  $P(s)$  de forma genérica en función de los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ :

$$P(s) = (s + a - jb)(s + a + jb)(s + c)(s + d)$$

Si operamos un poco para dejar esta expresión de  $P(s)$  en forma polinómica:

$$P(s) = (s + a - jb)(s + a + jb)(s + c)(s + d) = [(s + a)^2 + b^2](s + c)(s + d) \Rightarrow$$

$$P(s) = [s^2 + 2as + (a^2 + b^2)][s^2 + (c + d)s + cd] \Rightarrow$$

$$P(s) = s^4 + (2a + c + d)s^3 + [a^2 + b^2 + 2a(c + d) + cd]s^2 + [(a^2 + b^2)(c + d) + 2acd]s + (a^2 + b^2)cd$$

podemos hacer dos cosas:

- Expresar las funciones de transferencia  $F_{yr}(s)$  y  $F_{yd}(s)$  en función de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ :

$$F_{yr}(s) = \frac{[a^2 + b^2 + 2a(c + d) + cd]s^2 + [(a^2 + b^2)(c + d) + 2acd]s + (a^2 + b^2)cd}{s^4 + (2a + c + d)s^3 + [a^2 + b^2 + 2a(c + d) + cd]s^2 + [(a^2 + b^2)(c + d) + 2acd]s + (a^2 + b^2)cd}$$

$$F_{yd}(s) = \frac{9,899 \cdot 10^6 s}{s^4 + (2a + c + d)s^3 + [a^2 + b^2 + 2a(c + d) + cd]s^2 + [(a^2 + b^2)(c + d) + 2acd]s + (a^2 + b^2)cd}$$

- Encontrar las relaciones entre los parámetros a, b, c y d de los polos y los parámetros k,  $\alpha$  y  $\beta$  de nuestro controlador  $G_c(s)$  y los parámetros conocidos de nuestra planta (K,  $p_2$  y  $p_3$ ) igualando coeficiente a coeficiente las dos ecuaciones que tenemos de P(s):
  - $-(p_2 + p_3) = (2a + c + d)$
  - $(Kk + p_2 p_3) = [a^2 + b^2 + 2a(c + d) + cd]$
  - $Kk(\alpha + \beta) = [(a^2 + b^2)(c + d) + 2acd]$
  - $Kk\alpha\beta = (a^2 + b^2)cd$

Como hemos dicho antes, hemos reducido el problema de nuestro diseño a encontrar los valores de los parámetros a, b, c y d que fijen los polos de forma adecuada para que el sistema responda como queremos.

Para determinar con que valores de a, b, c y d empezar a probar, lo primero que hemos hecho ha sido realizar un pequeño programa en Matlab que se puede consultar en el apartado *10.5 Pruebas para ver cómo se relacionan los parámetros de diseño con la posición de los polos del sistema*. Este programa deja fijos algunos parámetros de los cuatro que buscamos y varía los restantes entre un determinado margen de valores. Los valores de los parámetros fijos y el rango del parámetro variable los hemos tomado de forma sistemática siguiendo el siguiente orden:

PRUEBA	PARÁMETROS FIJOS	PARÁMETROS VARIABLES
1	b,c,d = 1	a = 1:100
2	b,c,d = 100	a = 1:100
3	a,c,d = 1	b = 1:100
4	a,c,d = 100	b = 1:100
5	a,b = 1	c,d = 1:100
6	a,b = 100	c,d = 1:100

El programa proporciona una tabla para cada uno de los valores de a, b, c y d con los siguientes parámetros relevantes para nuestro diseño:

- Sobreelongación máxima de la respuesta al escalón de  $F_{yr}(s)$ , Mp1.
- Sobreelongación máxima de la respuesta al escalón de  $F_{yd}(s)$ , Mp2.
- Tiempo de establecimiento de la respuesta al escalón de  $F_{yr}(s)$ ,  $t_s$ .
- El valor de la constante de amortiguamiento,  $\xi$ .

Por ejemplo, para la prueba 1 obtenemos la siguiente tabla (no mostramos todos los resultados para que quepa en una página):

a	b	c	d	Mp1	Mp2	Mp1+Mp2	ts	epsilon
1	1	1	1	1.1665	1548730.722	1548731.888	3	0.7071
5	1	1	1	1.0122	134163.3955	134164.4076	2.11	0.9806
10	1	1	1	0.9453	35658.0293	35658.9746	1.73	0.995
15	1	1	1	0.9099	16036.2398	16037.1497	1.52	0.9978
20	1	1	1	0.8877	9057.2001	9058.0877	1.37	0.9988
25	1	1	1	0.8724	5807.5149	5808.3873	1.26	0.9992
30	1	1	1	0.8611	4037.0926	4037.9537	1.16	0.9994
35	1	1	1	0.8525	2967.8265	2968.679	1.08	0.9996
40	1	1	1	0.8457	2273.1337	2273.9794	1	0.9997
45	1	1	1	0.8402	1796.5207	1797.3609	0.94	0.9998
50	1	1	1	0.8356	1455.4751	1456.3107	0.88	0.9998
55	1	1	1	0.8317	1203.0371	1203.8689	0.82	0.9998
60	1	1	1	0.8284	1010.9907	1011.8191	0.77	0.9999
65	1	1	1	0.8256	861.5136	862.3392	0.72	0.9999
70	1	1	1	0.8231	742.8851	743.7082	0.68	0.9999
75	1	1	1	0.8209	647.1674	647.9883	0.64	0.9999
80	1	1	1	0.8189	568.8206	569.6395	0.6	0.9999
85	1	1	1	0.8172	503.8888	504.706	0.56	0.9999
90	1	1	1	0.8156	449.4718	450.2874	0.52	0.9999
95	1	1	1	0.8142	403.4153	404.2295	0.49	0.9999
100	1	1	1	0.8129	364.0905	364.9034	0.46	1

La visualización de estos resultados nos permite averiguar como varían los parámetros de nuestro diseño en relación con la posición de los polos. Además, podemos constatar a partir de qué valores de a, b, c y d los parámetros de diseño entran dentro del margen de valores adecuado.

Por ejemplo, en la tabla superior vemos que a medida que el parámetro a (la componente real de los dos polos conjugados) crece: Mp1, Mp2 y ts disminuyen mientras que  $\xi$  aumenta.

También observamos que Mp1 toma un valor adecuado (menor que el diez por ciento de sobreelongación sobre el valor en régimen permanente, es decir, menor que  $1.1 \cdot \frac{\pi}{4} = 0.8639$ ), a partir de  $a = 30$  (en realidad es a partir de  $a = 29$  en la tabla completa). El valor del tiempo de establecimiento  $t_s$  es aceptable (menor de 1 segundo) a partir de  $a = 45$  (en realidad es a partir de  $a = 41$  en la tabla completa). El valor de la constante de amortiguamiento,  $\xi$ , es siempre aceptable (puesto que  $\xi > 0,7071$  garantiza que no hay fenómeno de resonancia) excepto para  $a = 1$ , que  $\xi = 1$  y pasamos de un sistema subamortiguado a un sistema con amortiguamiento crítico.

Los datos que sacamos de cada una de las pruebas son las siguientes:

PRUEBA 1: Si $a \uparrow$  $b, c, d = 1$ $a = 1:100$	$Mp1 \downarrow$	Valor inicial: 1.1665 Valor final: 0.8129 Buena ( $< 1.1 \cdot \pi/4$ ): a partir de $a = 29$
	$Mp2 \downarrow$	Valor inicial: 1548730.722 Valor final: 364.0905 Nunca llega a un buen valor
	$t_s \downarrow$	Valor inicial: 3 Valor final: 0.46 Buena ( $< 1s$ ): a partir de $a = 41$
	$\xi \uparrow$	Valor inicial: 0.7071 Valor final: 1 Buena ( $\geq 0.7071$ ): con $a = 1:99$
PRUEBA 2: Si $a \uparrow$  $b, c, d = 100$ $a = 1:100$	$Mp1 \downarrow$	Valor inicial: 1.598 Valor final: 1.1378 Nunca llega a un buen valor
	$Mp2 \downarrow$	Valor inicial: 5.7914 Valor final: 1.4612 Nunca llega a un buen valor
	$t_s \downarrow$	Valor inicial: 3 Valor final: 0.06 Buena ( $< 1s$ ): a partir de $a = 6$
	$\xi \uparrow$	Valor inicial: 0.01 Valor final: 0.7071 Buena ( $\geq 0.7071$ ): con $a = 100$
PRUEBA 3: Si $b \uparrow$  $a, c, d = 1$ $b = 1:100$	$Mp1 \uparrow$	Valor inicial: 1.1665 Valor final: 1.5396 Nunca toma un buen valor
	$Mp2 \downarrow$	Valor inicial: 1548730.722 Valor final: 367.8208 Nunca llega a un buen valor
	$t_s \approx cte$	Valor inicial: 3 Valor final: 2.99 Nunca llega a un buen valor
	$\xi \downarrow$	Valor inicial: 0.7071 Valor final: 0.01 Buena ( $\geq 0.7071$ ): con $b = 1$

PRUEBA 4: Si $b \uparrow$  $a, c, d = 100$ $b = 1:100$	$Mp1 \uparrow$	Valor inicial: 1.1043 Valor final: 1.1378 Nunca toma un buen valor
	$Mp2 \downarrow$	Valor inicial: 2.2177 Valor final: 1.4612 Nunca llega a un buen valor
	$t_s \downarrow$	Valor inicial: 0.09 Valor final: 0.06 Buena ( $< 1s$ ): con $b = 1:100$
	$\xi \downarrow$	Valor inicial: 1 Valor final: 0.7071 Buena ( $\geq 0.7071$ ): con $b = 100$
PRUEBA 5: Si $c, d \uparrow$  $a, b = 1$ $c, d = 1:100$	$Mp1 \downarrow$	Valor inicial: 1.1665 Valor final: 0.814 Buena ( $< 1.1 \cdot \pi/4$ ): a partir de $c, d = 32$
	$Mp2 \downarrow$	Valor inicial: 1548730.722 Valor final: 319.069 Nunca llega a un buen valor
	$t_s \downarrow$	Valor inicial: 3 Valor final: 0.56 Buena ( $< 1s$ ): a partir de $c, d = 45$
	$\xi = cte$	Valor inicial: 0.7071 Valor final: 0.7071 Buena ( $\geq 0.7071$ ): con $c, d = 1:100$
PRUEBA 6: Si $c, d \uparrow$  $a, b = 100$ $c, d = 1:100$	$Mp1 \uparrow$	Valor inicial: 0.8345 Valor final: 1.1378 Buena ( $< 1.1 \cdot \pi/4$ ): con $c, d = 1$
	$Mp2 \downarrow$	Valor inicial: 182.082 Valor final: 1.4612 Nunca llega a un buen valor
	$t_s \approx cte$	Valor inicial: 0.05 Valor final: 0.06 Buena ( $< 1s$ ): con $c, d = 1:100$
	$\xi = cte$	Valor inicial: 0.7071 Valor final: 0.7071 Buena ( $\geq 0.7071$ ): con $c, d = 1:100$

De las tablas anteriores podemos sacar algunas conclusiones:

- Para conseguir una buena sobreelongación de la respuesta al escalón de  $F_{yr}(s)$ , Mp1, tenemos dos opciones:
  - Hacer que  $a > b$ , es decir, que la parte real de los polos complejos conjugados sea mayor que la parte imaginaria (prueba 1).
  - Si  $a = b$  y pequeños, hacer que los polos reales  $c, d$  estén lo más alejados del origen posible (prueba 5).
- Con respecto a la sobreelongación máxima de la respuesta al escalón de  $F_{yd}(s)$ , Mp2, vemos que si los polos reales están muy cerca del origen, Mp2 es muy elevada (pruebas 1 y 3). Aunque nunca llegamos a un buen valor, se consiguen mejores resultados con los polos reales alejados del origen (pruebas 2 y 4). Intentaremos alejarlos lo más posible.
- Para obtener un buen tiempo de establecimiento de la respuesta al escalón de  $F_{yr}(s)$ ,  $t_s$ , tenemos dos posibilidades:
  - Hacer que  $a$  y  $b$  sean grandes (prueba 6).
  - Si  $a = b$  y pequeños, alejar del origen los polos  $c$  y  $d$  lo máximo posible (prueba 5).
- Finalmente, para la constante de amortiguamiento,  $\xi$ , vemos que si  $a = b$  entonces  $\xi = cte$  (pruebas 5 y 6). Además, observamos que  $\xi$  aumenta cuánto mayor es  $a$  con respecto a  $b$  (prueba 1).

Por todo lo anterior decidimos realizar una séptima prueba con los siguientes parámetros:

- $a$  variable de 1 a 100.
- $b = a/2$ , de tal forma que siempre cumplimos que  $a > b$ , lo que es bueno para Mp1 y  $\xi$ .
- $c = d = \frac{-(p_2 + p_3) - 2a}{2} = \frac{6617,751 - 2a}{2}$ . Hemos utilizado esta relación por dos razones. La primera es que nos viene impuesta por una de las ecuaciones que hemos obtenido anteriormente ( $-(p_2 + p_3) = 2a + c + d$ ). La segunda porque de esta manera conseguimos que los polos reales estén muy alejados del origen ( $c = d = 3307.8755$  para  $a = 1$  y  $c = d = 3208.8755$  para  $a = 100$ ) y, como hemos dicho antes, eso es bueno para Mp2 y  $t_s$ .

A continuación presentamos la tabla resultado de la ejecución de la séptima prueba (no está completa para que quepa en una página):

a	b	c	d	Mp1	Mp2	Mp1+Mp2	ts	epsilon
1	0.5	3307.876	3307.876	0.7863	0.3201	1.1065	0.01	0.8944
5	2.5	3303.876	3303.876	0.79	0.0642	0.8542	0.01	0.8944
10	5	3298.876	3298.876	0.7945	0.0322	0.8267	0.01	0.8944
15	7.5	3293.876	3293.876	0.7987	0.0215	0.8203	0.01	0.8944
16	8	3292.876	3292.876	0.7996	0.0202	0.8197	0.01	0.8944
17	8.5	3291.876	3291.876	0.8004	0.019	0.8194	0.01	0.8944
18	9	3290.876	3290.876	0.8012	0.018	0.8192	0.04	0.8944
19	9.5	3289.876	3289.876	0.802	0.017	0.819	0.06	0.8944
20	10	3288.876	3288.876	0.8029	0.0162	0.819	0.07	0.8944
21	10.5	3287.876	3287.876	0.8037	0.0154	0.8191	0.08	0.8944
22	11	3286.876	3286.876	0.8045	0.0147	0.8193	0.1	0.8944
23	11.5	3285.876	3285.876	0.8054	0.0141	0.8195	0.1	0.8944
24	12	3284.876	3284.876	0.8062	0.0135	0.8197	0.11	0.8944
25	12.5	3283.876	3283.876	0.807	0.013	0.82	0.12	0.8944
30	15	3278.876	3278.876	0.811	0.0109	0.8219	0.14	0.8944
35	17.5	3273.876	3273.876	0.8149	0.0093	0.8242	0.15	0.8944
40	20	3268.876	3268.876	0.8187	0.0082	0.8269	0.15	0.8944
45	22.5	3263.876	3263.876	0.8223	0.0073	0.8296	0.15	0.8944
50	25	3258.876	3258.876	0.8259	0.0066	0.8325	0.15	0.8944
55	27.5	3253.876	3253.876	0.8293	0.006	0.8353	0.14	0.8944
60	30	3248.876	3248.876	0.8326	0.0055	0.8381	0.14	0.8944
65	32.5	3243.876	3243.876	0.8358	0.0051	0.8409	0.13	0.8944
70	35	3238.876	3238.876	0.8389	0.0048	0.8437	0.13	0.8944
75	37.5	3233.876	3233.876	0.8419	0.0045	0.8463	0.13	0.8944
80	40	3228.876	3228.876	0.8447	0.0042	0.8489	0.12	0.8944
85	42.5	3223.876	3223.876	0.8475	0.004	0.8515	0.12	0.8944
90	45	3218.876	3218.876	0.8502	0.0038	0.8539	0.12	0.8944
95	47.5	3213.876	3213.876	0.8529	0.0036	0.8564	0.11	0.8944
100	50	3208.876	3208.876	0.8562	0.0034	0.8596	0.11	0.8944

En esta tabla hay muchos resultados que cumplen las especificaciones impuestas. Entre todos ellos, decidimos tomar el que hemos sombreado porque minimiza la suma  $Mp1 + Mp2$ . De esta manera aseguramos que, aunque en el sistema entren simultáneamente la señal de entrada y la perturbación, la salida nunca va a sobrepasar el margen fijado. Además, el valor de sobreelongación máximo final será menor que el indicado en la tabla porque dicho valor supone que ambos valores se dan el mismo instante, lo que es improbable que ocurra.

Resumiendo, hemos conseguido obtener los valores de a, b, c y d que fijan la posición de los polos:

- a = 20, parte real de los polos complejos conjugados.
- b = 10, parte imaginaria de los polos complejos conjugados.
- c = d = 3288,876, correspondientes a los polos reales.

Si recordamos las siguientes relaciones calculadas anteriormente:

- $-(p_2 + p_3) = (2a + c + d)$
- $(Kk + p_2 p_3) = [a^2 + b^2 + 2a(c + d) + cd]$
- $Kk(\alpha + \beta) = [(a^2 + b^2)(c + d) + 2acd]$
- $Kk\alpha\beta = (a^2 + b^2)cd$

podemos determinar los valores de los parámetros k,  $\alpha$  y  $\beta$  de nuestro controlador  $G_c(s)$ :

$$\text{▪ } Kk + p_2 p_3 = a^2 + b^2 + 2a(c + d) + cd \quad \Rightarrow$$

$$k = \frac{a^2 + b^2 + 2a(c + d) + cd - p_2 p_3}{K} \quad \Rightarrow$$

$$k = \frac{20^2 + 10^2 + 2 \cdot 20(3288.876 + 3288,876) + 3288,876 \cdot 3288,876 - 50,808 \cdot 6566,943}{9,899 \cdot 10^6} = 1,086$$

$$\text{▪ } Kk(\alpha + \beta) = (a^2 + b^2)(c + d) + 2acd \quad \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta = \frac{(a^2 + b^2)(c + d) + 2acd}{Kk} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta = \frac{(20^2 + 10^2)(3288,876 + 3288,876) + 2 \cdot 20 \cdot 3288.876 \cdot 3288.876}{9,899 \cdot 10^6 \cdot 1,086} = 40,567$$

$$\text{▪ } Kk\alpha\beta = (a^2 + b^2)cd \quad \Rightarrow$$

$$\alpha\beta = \frac{(a^2 + b^2)cd}{Kk} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha\beta = \frac{(20^2 + 10^2)3288,876 \cdot 3288,876}{9,899 \cdot 10^6 \cdot 1,086} = 503,259$$

Por lo tanto, podemos expresar el controlador  $G_c(s)$  como sigue:

$$G_c(s) = \frac{k(s+\alpha)(s+\beta)}{s} = \frac{k(s^2 + (\alpha + \beta)s + \alpha\beta)}{s}$$

$$G_c(s) = \frac{1,086 \cdot (s^2 + 40,567s + 503,259)}{s} = 1,086s + 44,041 + \frac{546,353}{s}$$

Expresado de esta manera se observa claramente que  $G_c(s)$  es un controlador de tipo PID. Ahora se trata de determinar los controladores  $G_{c1}(s)$  y  $G_{c2}(s)$  a partir de  $G_c(s)$ .

Comenzamos con  $G_{c1}(s)$ . Sabemos que la función de transferencia  $F_{yr}(s)$  tiene la siguiente expresión:

$$F_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{d=n=0} = \frac{G(s)G_{c1}(s)}{1 + G(s)G_c(s)} = \frac{\frac{K}{s \cdot (s-p_2)(s-p_3)} G_{c1}(s)}{1 + \frac{K}{s \cdot (s-p_2)(s-p_3)} \frac{k(s+\alpha)(s+\beta)}{s}} \Rightarrow$$

$$F_{yr}(s) = \frac{Ks \cdot G_{c1}(s)}{s^4 - (p_2 + p_3)s^3 + (Kk + p_2p_3)s^2 + Kk(\alpha + \beta)s + Kk\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$F_{yr}(s) = \frac{9,899 \cdot 10^6 s \cdot G_{c1}(s)}{s^4 + 6,618 \cdot 10^3 s^3 + 1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,360 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9}$$

Por otro lado, sabemos que  $F_{yr}(s)$  también tiene la siguiente expresión obtenida mediante el método de asignación de ceros:

$$F_{yr}(s) = \frac{\left[ a^2 + b^2 + 2a(c+d) + cd \right] s^2 + \left[ (a^2 + b^2)(c+d) + 2acd \right] s + (a^2 + b^2)cd}{s^4 + (2a+c+d)s^3 + \left[ a^2 + b^2 + 2a(c+d) + cd \right] s^2 + \left[ (a^2 + b^2)(c+d) + 2acd \right] s + (a^2 + b^2)cd}$$

$$F_{yr}(s) = \frac{1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,360 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9}{s^4 + 6,618 \cdot 10^3 s^3 + 1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,360 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9}$$

Igualando los numeradores de  $F_{yr}(s)$  podemos obtener la expresión de  $G_{c1}(s)$ :

$$9,899 \cdot 10^6 s \cdot G_{c1}(s) = 1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,360 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9 \Rightarrow$$

$$G_{c1}(s) = \frac{1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,360 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9}{9,899 \cdot 10^6 s} = 1,119s + 44,041 + \frac{546,353}{s}$$

Se trata claramente de un controlador tipo PID.

Ahora calculamos la expresión del controlador  $G_{c2}(s)$ :

$$G_c(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s) \quad \Rightarrow$$

$$G_{c2}(s) = G_c(s) - G_{c1}(s) = \left( 1,086s + 44,041 + \frac{546,353}{s} \right) - \left( 1,119s + 44,041 + \frac{546,353}{s} \right) \Rightarrow$$

$$G_{c2}(s) = -0,033s$$

Por lo tanto  $G_{c2}(s)$  es un controlador de tipo derivativo.

## 7. Estudio del controlador diseñado

### 7.1 Diagrama y funciones de transferencia del diseño adoptado

En el apartado anterior, 6. *Diseño de un controlador de dos grados de libertad*, hemos presentado todo el proceso seguido para diseñar los controladores  $G_{c1}(s)$  y  $G_{c2}(s)$  encargados de que nuestro sistema responda como deseamos.

Resumiendo, el controlador de dos grados de libertad diseñado tiene la siguiente estructura y expresiones:

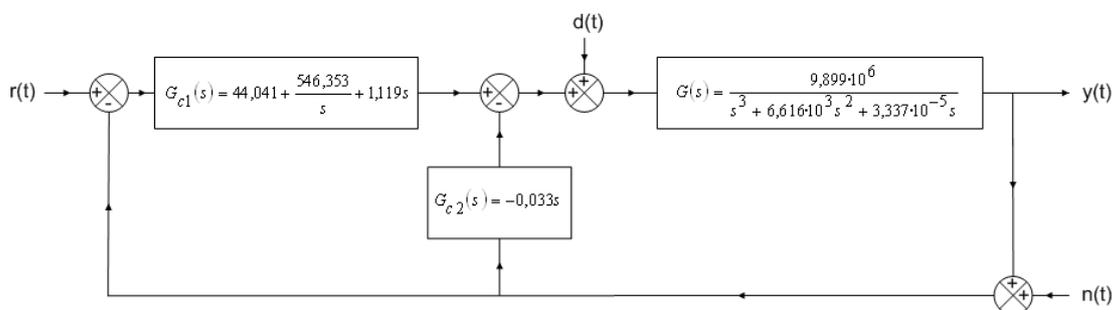


Figura 19: Controlador de dos grados de libertad diseñado

Además, las tres funciones de transferencia del sistema completo son:

$$F_{yr}(s) = \frac{1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,36 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9}{s^4 + 6,618 \cdot 10^3 s^3 + 1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,36 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9}$$

$$F_{yd}(s) = \frac{9,899 \cdot 10^6 s}{s^4 + 6,618 \cdot 10^3 s^3 + 1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,36 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9}$$

$$F_{yn}(s) = \frac{-1,075 \cdot 10^7 s^2 - 4,36 \cdot 10^8 s - 5,408 \cdot 10^9}{s^4 + 6,618 \cdot 10^3 s^3 + 1,108 \cdot 10^7 s^2 + 4,36 \cdot 10^8 s + 5,408 \cdot 10^9}$$

Con estas funciones de transferencia vamos a realizar unas simulaciones en Matlab para ver si el sistema se comporta como esperamos.

## 7.2 Simulación en Matlab del sistema completo

### 7.2.1 Características del sistema en el dominio del tiempo

- Respuesta al escalón de  $F_{vr}$

Lo primero que queremos comprobar es que hemos diseñado correctamente el sistema de tal forma que el motor cumple las especificaciones fijadas en el apartado 4.2.1 *Parámetros de diseño en el dominio del tiempo*. Recordamos que dichas especificaciones eran:

- El motor gira hasta alcanzar los  $45^\circ$  en régimen permanente.
- La sobreelongación no sobrepasa el 10% del valor final.
- El tiempo de establecimiento es menor de un segundo.

A continuación podemos ver la respuesta al escalón de  $\pi/4$  V del sistema, considerando que las perturbaciones a la entrada y la salida de la planta son nulas:

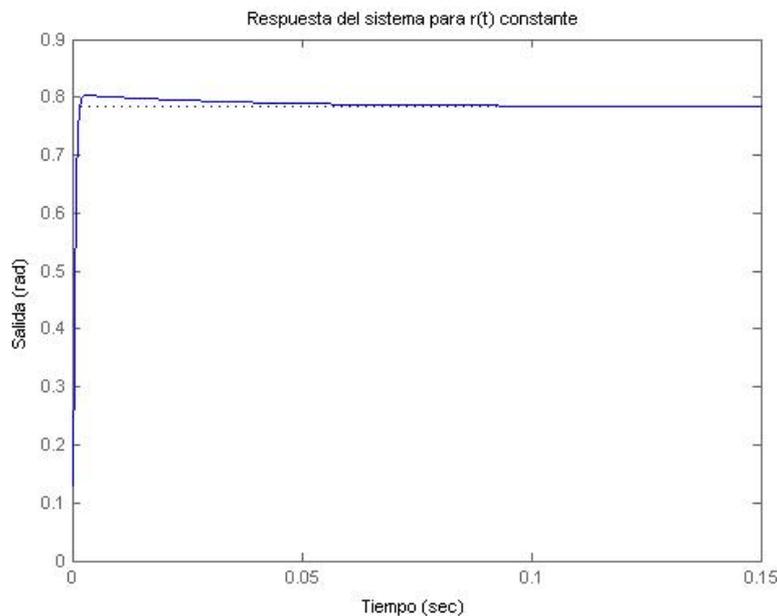


Figura 20: Respuesta del sistema para  $r(t)$  constante

Los parámetros del régimen transitorio obtenidos son:

- |  |                     |
|--|---------------------|
| ▪ Valor en régimen permanente:         | $\pi/4 = 0,785$ rad |
| ▪ Sobreelongación máxima:              | 0,803 rad           |
| ▪ Sobreelongación máxima (porcentaje): | 2,24%               |
| ▪ Tiempo de establecimiento:           | 7,64 ms             |
| ▪ Tiempo de pico:                      | 3,34 ms             |
| ▪ Tiempo de subida:                    | 1,75 ms             |

Por lo tanto, observamos que cumplimos ampliamente las restricciones impuestas:

- Hemos conseguido que la sobreelongación sea sólo de un 2,24 %, lo que implica que el motor no girará más de 46° durante el régimen transitorio.
- Hemos obtenido un tiempo de establecimiento de sólo 7,64 ms. Es decir, cuando el usuario pulse el botón de control, el coche se colocará en su posición casi instantáneamente.

Estos resultados no eran del todo imprevisibles puesto que, durante el estudio del motor en lazo cerrado, vimos que los parámetros de diseño eran relajados.

- **Respuesta al escalón de  $F_{vd}$**

Ahora esperamos verificar que el sistema es capaz de eliminar correctamente una perturbación constante a la entrada de la planta. Correctamente quiere decir rápidamente y de tal forma que no influya demasiado en la respuesta del sistema (esto es, que su amplitud sea pequeña).

Para comprobarlo visualizamos la respuesta al escalón de nuestro sistema a la perturbación utilizando la función de transferencia  $F_{vd}$ :

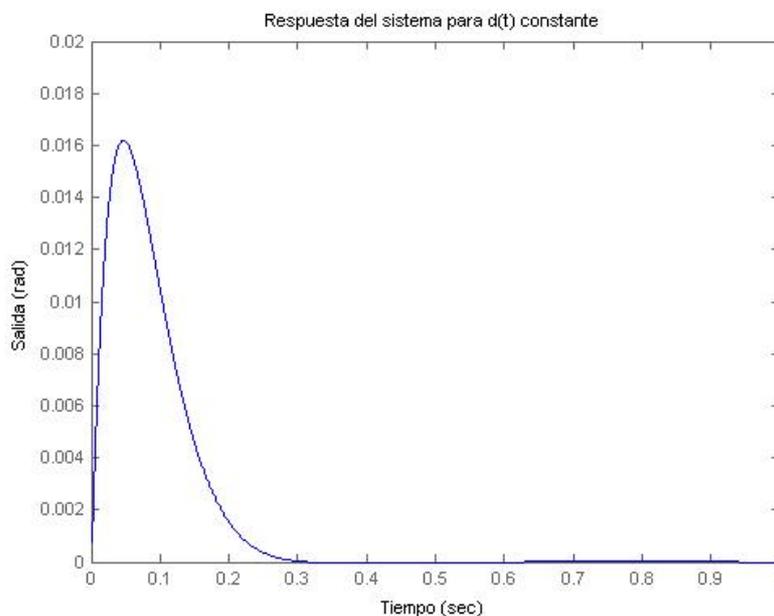


Figura 21: Respuesta del sistema para d(t) constante

Con ayuda de Matlab obtenemos que:

- El tiempo de pico es: 46,98 ms
- La amplitud máxima es: 16,19 rad = 0,928°

Consideramos que estos resultados son bastante aceptables. A continuación veremos la respuesta del sistema a una perturbación a la salida de la planta. Después comprobaremos si la acción conjunta de  $r(t)$  y  $d(t)$  sigue manteniendo las especificaciones.

- **Respuesta al escalón de  $F_{yn}$**

El controlador diseñado es de dos grados de libertad y, por lo tanto, nos ha permitido adecuar la respuesta a la entrada  $r(t)$  y a la perturbación  $d(t)$  según nuestras necesidades o deseos.

Sin embargo, no nos ha dejado libertad para elegir la respuesta del sistema ante una perturbación a la salida,  $n(t)$ . Por esta razón, durante el diseño hemos considerado que la perturbación  $n(t)$  es nula.

Por curiosidad, queremos ver cómo se comporta nuestro sistema si  $n(t)$  no es nula, sino una perturbación constante. Para ello, visualizamos la respuesta del sistema a un escalón utilizando la función de transferencia  $F_{yn}$ :

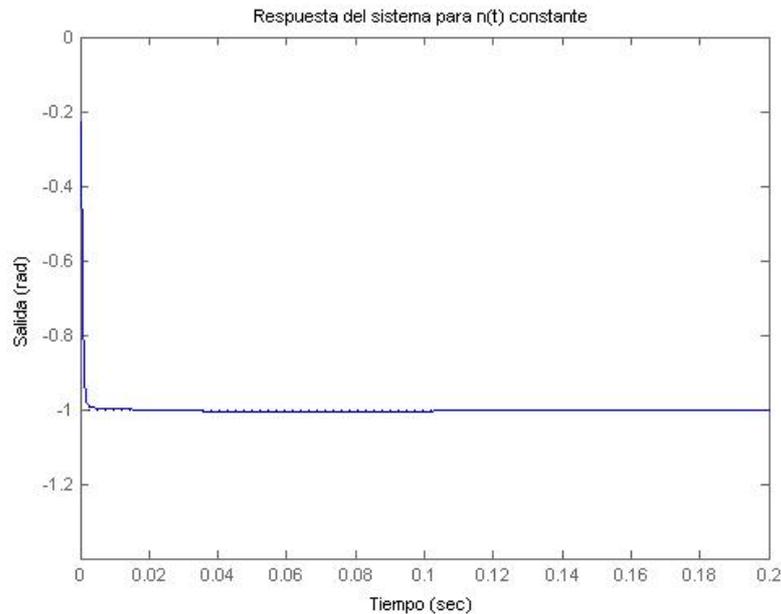


Figura 22: Respuesta del sistema para  $n(t)$  constante

Observamos dos cosas:

- La respuesta del sistema ante una perturbación constante a la salida produce un giro del motor negativo (en la otra dirección). Esto era de esperar puesto que  $F_{yn}(s)$  tiene signo negativo.
- La presencia de esta señal haría que nuestro sistema funcionase fatal. En lugar de girar  $45^\circ$  al accionar el botón de control, intentaría rotar en sentido contrario.

- **Respuesta conjunta del sistema a  $r(t)$  y  $d(t)$**

A la hora del diseño del controlador, comenzamos buscando una posición de los polos que garantizase que la sobreelongación máxima del sistema para la entrada  $r(t)$  era menor del 10 %.

Conseguimos llegar a una solución adecuada para esa restricción pero, al fijar la posición de los polos, también fijamos la respuesta del sistema para la perturbación  $d(t)$ . Aunque dicha respuesta parecía también adecuada, pues eliminaba rápidamente la perturbación, no era suficiente. La razón es que, al visualizar la respuesta conjunta de  $r(t)$  y  $d(t)$ , la sobreelongación sobrepasaba su límite máximo.

Por ello nos pusimos de nuevo a la tarea de encontrar una posición de los polos que garantizase que, aunque la entrada y la perturbación actuasen a la vez, el sistema se comportaba adecuadamente. Y lo conseguimos.

A continuación presentamos la respuesta conjunta del sistema a  $r(t)$  y  $d(t)$ :

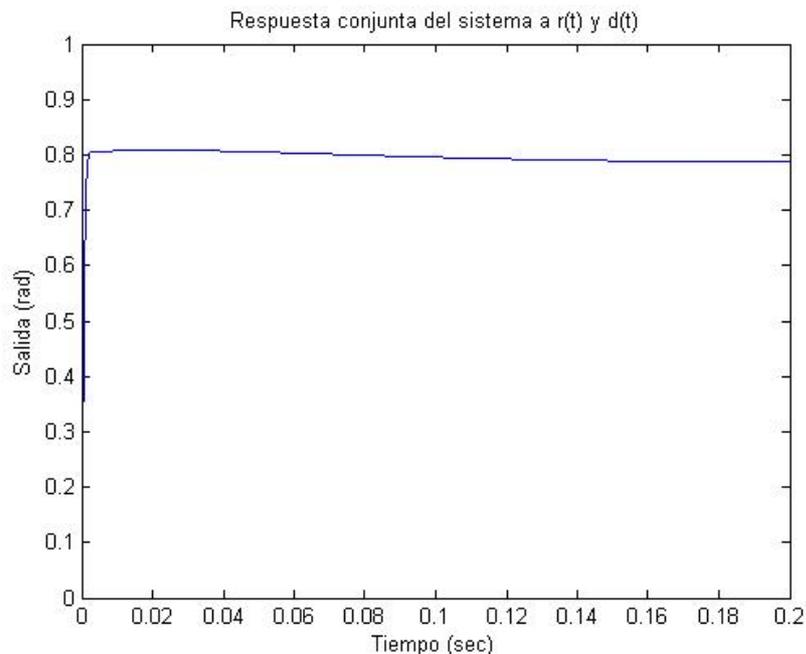


Figura 23: Respuesta conjunta del sistema a  $r(t)$  y  $n(t)$

Los parámetros más relevantes de la respuesta son:

▪ Valor en régimen permanente:	$\pi/4 = 0,785$ rad
▪ Sobreelongación máxima:	0,808 rad
▪ Sobreelongación máxima (porcentaje):	2,91%
▪ Tiempo de establecimiento:	71,36 ms
▪ Tiempo de pico:	22,65 ms
▪ Tiempo de subida:	1,73 ms

Si comparamos estos resultados con los obtenidos con la respuesta del sistema a la entrada  $r(t)$ , observamos que:

- La sobreelongación máxima ha aumentado ligeramente debido a la adición de la perturbación  $d(t)$ . Sin embargo sigue cumpliendo las especificaciones del sistema.
- El tiempo de establecimiento ha aumentado un orden de magnitud (sin la perturbación el tiempo de establecimiento era de 7,64 ms). A pesar de ello sigue siendo un valor muy bajo para la aplicación de nuestro sistema.
- El tiempo de pico también se ha retrasado al considerar la acción de la perturbación (antes era de 3,34 ms). Este resultado tiene sentido puesto que el valor máximo de la respuesta a  $d(t)$  ocurría a los 46,98 ms.
- El tiempo de subida, por el contrario, se ha reducido un poco (el valor sin considerar la perturbación era de 1,75 ms). Este resultado tampoco es sorprendente puesto que, al sumarse las contribuciones de  $r(t)$  y  $d(t)$ , ambas positivas, el sistema alcanzará más rápidamente el 50 % de su valor final.

Por todo lo anterior, deducimos que el sistema se sigue comportando de forma adecuada incluso en presencia de una perturbación constante en la entrada de la planta.

- **Respuesta a la rampa y parábola. Conclusiones**

En este apartado vamos a comprobar que se cumplen las especificaciones de que el error en régimen permanente para la rampa y la parábola es nulo. Teóricamente sabemos que se debe cumplir puesto que para definir  $F_{yr}(s)$  hemos utilizado el método de asignación de ceros.

Para verificarlo visualizamos en Matlab la respuesta a una rampa y una parábola de nuestro sistema:

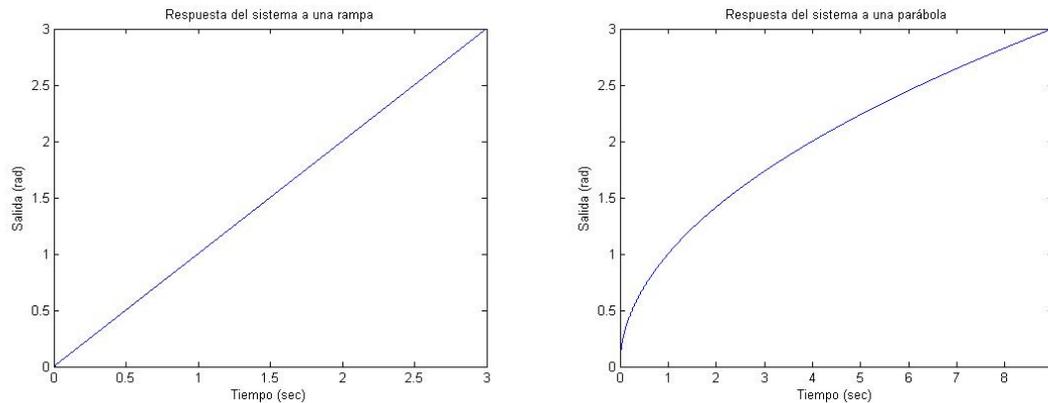


Figura 24: Respuestas del sistema a una rampa y una parábola

Los resultados obtenidos son precisamente una rampa y una parábola invertida. El resultado no nos sorprende demasiado porque es el mismo que obtuvimos durante el estudio del motor en lazo cerrado.

Sin embargo, pensábamos que quizás durante el régimen transitorio la salida no fuese exactamente una rampa ni una parábola.

## 7.2.2 Características del sistema en el dominio de la frecuencia

Para estudiar las características del sistema en el dominio de la frecuencia representamos el diagrama de Bode:

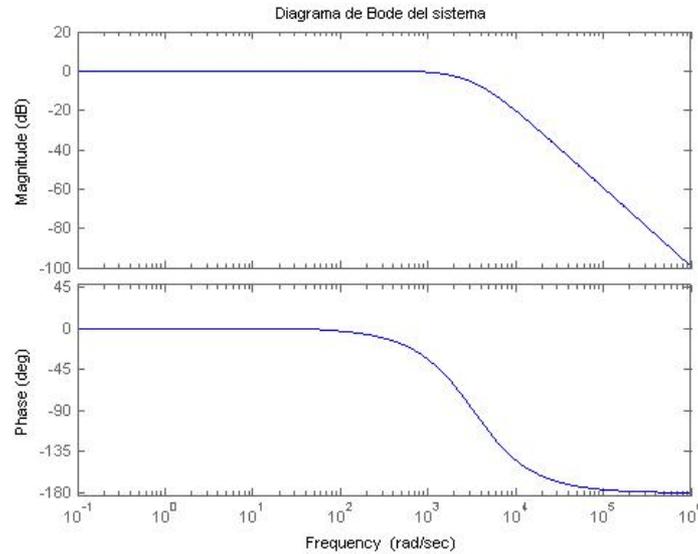


Figura 25: Diagrama de Bode del sistema

Visualizando este resultado podemos concluir que:

- El sistema completo se sigue comportando como un filtro paso bajo con un ancho de banda de 2209,756 rad/s. El ancho de banda ha aumentado considerablemente con respecto al caso del motor en lazo abierto, donde tenía un valor de 36,97 rad/s.
- Aunque a primera vista parece que no hay fenómeno de resonancia, con ayuda de Matlab observamos que hay un pico resonante de 0,189 dB en la frecuencia 109,91 rad/s.
- Nos extraña que el módulo de la respuesta en frecuencia tenga sólo un cambio de pendiente de valor 40 dB/dec. La razón es que los ceros de la función de transferencia caen aproximadamente en la misma posición que los polos conjugados de nuestro sistema. Por ello prácticamente anulan su contribución y el cambio de pendiente que vemos en la figura es debido al polo real doble del sistema.

## **8. Comentarios finales**

Para terminar esta memoria no queríamos dejar de comentar algunos puntos:

- Consideramos que hemos alcanzado el objetivo principal: controlar la posición de un motor mediante un controlador de dos grados de libertad.
- Sin embargo, nuestro objetivo inicial era mucho más ambicioso. Además del desarrollo expuesto pretendíamos llevar a cabo varios puntos que hubiesen resultado muy interesantes:
  - Diseño de un controlador de primer orden en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.
  - Implementación electrónica del controlador diseñado.
  - Estudio de las condiciones iniciales en nuestro sistema.
- Nos habría gustado comenzar el trabajo llevando a cabo el primero de los puntos anteriores porque consideramos podría haber resultado mucho más formativo en el área de la ingeniería de control.

Dado que este trabajo ha constituido nuestra introducción a este mundo, el abordar el diseño de un controlador de dos grados de libertad sin dominar herramientas como el lugar de raíces o el diagrama de Nyquist nos ha obligado a utilizar un método computacional basado en funciones de transferencia que no nos acaba de gustar.

- Además, quizás también por nuestro poco conocimiento del tema, el presente desarrollo incluye muchos apartados que se podrían obviar en estudios posteriores.

A pesar de lo anterior, señalar que hemos disfrutado enormemente con todo el proceso. No sólo hemos podido aplicar y afianzar conocimientos adquiridos en otras materias sino que también hemos atravesado la puerta de un nuevo mundo que no conocíamos y que ha resultado apasionante. Esperamos poder desarrollar nuestros conocimientos en esta área y, quizás, dedicarnos a ello en un futuro próximo.

## 9. Referencias bibliográficas

Para la realización del presente trabajo hemos utilizado las siguientes fuentes:

- Autor: Benjamin C. Kuo  
Título: Sistemas de Control Automático (7ª edición)  
Editorial: Prentice Hall  
ISBN: 968-880-723-0  
Utilidad: Esta obra ha sido la principal referencia teórica a la hora de realizar el diseño
  
- Autor: Katsuhiko Ogata  
Título: Ingeniería de Control Moderna (4ª edición)  
Editorial: Prentice Hall  
ISBN: 84-205-3678-4  
Utilidad: De inestimable ayuda por sus ejemplos de programación en Matlab
  
- Autor: Félix Monasterio-Huelin Maciá  
Título: características\_maxon.pdf  
Fuente: [http://www.robolabo.etsit.upm.es/a\\_sctr/scr/](http://www.robolabo.etsit.upm.es/a_sctr/scr/)  
Utilidad: Imprescindible para modelar el motor del diseño
  
- Autor: Karl Johan Aström  
Título: especificaciones.pdf  
Fuente: [http://www.robolabo.etsit.upm.es/a\\_sctr/scr/](http://www.robolabo.etsit.upm.es/a_sctr/scr/)  
Utilidad: Ha sido útil para la realización del apartado *3.4 Relación de los parámetros de diseño en el tiempo y en la frecuencia con los parámetros característicos de un sistema de 2º orden ( $\xi$  y  $\omega_n$ )*

Además, hemos consultado en numerosas ocasiones la ayuda de Matlab y Maple para la realización de las simulaciones.

## 10. Anexo: Código de las simulaciones

### 10.1 Modelado del motor en lazo abierto como sistema de tercer orden

```
% -----  
% Modelado del motor en lazo abierto como sistema de tercer orden  
% -----  
  
% Seleccionamos el formato deseado para los datos numéricos  
format long;  
  
% Parámetros del motor  
R = 4.91;           % Ohm           --> R = resistencia en bornes  
L = 742.2;         % uH             --> L = inductancia en bornes  
J = 43.8;          % g*cm^2        --> J = inercia del rotor  
B = 10^(-5);       % N*m*rad/s     --> B = fricción mecánica  
k1 = 32.18;        % mV*s/rad      --> k1 = constante de FEM  
k2 = 32.18;        % mN*m/A        --> k2 = constante de par  
  
% Parámetros del motor en SI  
R = R;             % Ohm           --> R = resistencia en bornes  
L = L * 10^(-6);  % H             --> L = inductancia en bornes  
J = J * 10^(-7);  % kg*m^2        --> J = inercia del rotor  
B = B;             % N*m*rad/s     --> B = fricción mecánica  
k1 = k1 * 10^(-3); % V*s/rad      --> k1 = constante de FEM  
k2 = k2 * 10^(-3); % N*m/A        --> k2 = constante de par  
  
% Función de transferencia del motor para la posición  
num = k2;  
den = [J*L (J*R + B*L) (B*R + k1*k2) 0];  
G = tf (num,den);
```

## 10.2 Simulación del motor en lazo abierto como sistema de tercer orden

```
% -----  
% SIMULACIÓN DEL MOTOR EN LAZO ABIERTO COMO SISTEMA DE TERCER ORDEN  
% -----  
  
lazoabierto;  
  
% Cálculo analítico de los ceros y polos del sistema  
p1 = 0;  
p2 = (-(J*R+B*L)+sqrt((J*R+B*L)^2-4*J*L*(B*R+k1*k2)))/(2*J*L);  
p3 = (-(J*R+B*L)-sqrt((J*R+B*L)^2-4*J*L*(B*R+k1*k2)))/(2*J*L);  
  
% Cálculo de los ceros y polos del sistema mediante la función tf2zp  
[z,p,k] = tf2zp(num,den);  
  
% Diagrama polos-ceros del motor en lazo abierto  
pzmap(G);  
title('Diagrama polos-ceros de la función de transferencia del motor  
en lazo abierto');  
pause;  
  
% Respuesta al escalón del motor en lazo abierto  
step(G);  
title('Respuesta a un escalón unitario del motor en lazo abierto');  
xlabel('Tiempo');  
ylabel('Salida (rad)');  
pause;  
  
% Respuesta a la rampa del motor en lazo abierto  
t = 0:0.1:100;  
u_rampa = t;  
z = lsim(G,u_rampa,t);  
plot(z,t);  
title('Respuesta a una rampa del motor en lazo abierto');  
xlabel('Tiempo (sec)');  
ylabel('Salida (rad)');  
pause;  
  
% Respuesta a una parábola del motor en lazo abierto  
u_parabola = t.^2;  
z = lsim(G,u_parabola,t);  
plot(z,t);  
title('Respuesta a una parábola del motor en lazo abierto');  
xlabel('Tiempo (sec)');  
ylabel('Salida (rad)');  
pause;  
  
% Bode del motor en lazo abierto  
w = logspace(-1,6,200);  
bode(G,w);  
title('Diagrama de Bode del motor en lazo abierto');
```

```

% Cálculo del ancho de banda
[mag,phase,w] = bode (G,w);
n = 1;
while 20*log10(mag(n)) >= -3
    n = n+1;
end
ancho_banda = w(n);

% Cálculo del MF, MG, frecuencia de cruce de fase y frecuencia
% de cruce de ganancia
[MG,MF,wcp,wcg] = margin (G);
MGdB = 20*log10(MG);
[MGdB MF wcp wcg];
pause;

% Nyquist del motor en lazo abierto
w = 0:0.1:1000;
[re,im] = nyquist(G,w);
for i = 1:length(w)
    real(i,1) = re(1,1,i);
    imag(i,1) = im(1,1,i);
end
plot(real,imag);
axis ([-2 2 -10 10]);
title('Diagrama de Nyquist del motor en lazo abierto');
xlabel('Eje real');
ylabel('Eje imaginario');
grid;
pause;
close;

```

### 10.3 Modelado del motor en lazo cerrado

```
% -----  
% Modelado del motor en lazo cerrado  
% -----  
  
lazoabierto;  
  
% Función de transferencia del motor en lazo cerrado  
num2 = k2;  
den2 = [J*L (J*R + B*L) (B*R + k1*k2) k2];  
F = tf (num2,den2);  
  
% Función de transferencia del motor en lazo cerrado (alternativa)  
% F = feedback(G,1);
```

## 10.4 Simulación del motor en lazo cerrado

```
% -----  
% SIMULACIÓN DEL MOTOR EN LAZO CERRADO  
% -----  
  
lazocerrado;  
  
% Cálculo de los ceros y polos del sistema mediante la función tf2zp  
[z,p,k] = tf2zp(num2,den2);  
  
% Diagrama polos-ceros del motor en lazo cerrado  
pzmap(F);  
title('Diagrama polos-ceros de la función de transferencia del motor  
en lazo cerrado');  
axis([-7000 1000 -40 40]);  
pause;  
  
% Respuesta al escalón de 5V del motor en lazo cerrado  
step(pi/4*F);  
axis([0 0.5 0 1]);  
title('Respuesta a un escalón de  $\pi/4$  V del motor en lazo cerrado');  
xlabel('Tiempo');  
ylabel('Salida (rad)');  
  
% Cálculo de los parámetros del régimen transitorio  
t = 0:0.001:3;  
[y,t] = step(pi/4*F,t);  
  
% Tiempo de subida  
r = 1;  
while y(r) < pi/4 + 0.001  
    r = r+1;  
end  
tiempo_subida = (r-1)*0.001;  
  
% Tiempo de pico y sobreelongación máxima  
[ymax,tp] = max(y);  
tiempo_pico = (tp - 1)*0.001  
sobreelongacion_max = ymax;  
sobreelongacion_max_porc = (ymax - pi/4)*100/(pi/4);  
  
% Tiempo de asentamiento  
s = length(t);  
while y(s) > (0.98*pi/4) & y(s) < (1.02*pi/4);  
    s = s - 1;  
end  
tiempo_asentamiento = (s - 1)*0.001;  
pause;
```

```

% Respuesta a la rampa del motor en lazo cerrado
t = 0:0.1:100;
u_rampa = t;
z = lsim(F,u_rampa,t);
plot (z,t);
title ('Respuesta a una rampa del motor en lazo cerrado');
xlabel('Tiempo (sec)');
ylabel('Salida (rad)');
pause;

% Respuesta a una parábola del motor en lazo cerrado
u_parabola = t.^2;
z = lsim(F,u_parabola,t);
plot (z,t);
title ('Respuesta a una parábola del motor en lazo cerrado');
xlabel('Tiempo (sec)');
ylabel('Salida (rad)');
pause;

% Bode del motor en lazo cerrado
w = logspace (-1,6,1000);
bode(F,w);
title('Diagrama de Bode del motor en lazo cerrado');

% Cálculo de la frecuencia de resonancia, el pico de resonancia
% y el ancho de banda
[mag,phase,w] = bode (F,w);
[Mr,k] = max(mag);
pico_resonante = 20 * log10(Mr);
frecuencia_resonante = w(k);
n = 1;
while 20*log10(mag(n)) >= -3
    n = n + 1;
end
ancho_banda = w(n);
pause;

% Nyquist del motor en lazo cerrado
w = 0:0.1:1000;
[re,im] = nyquist(F,w);
for i = 1:length(w)
    real(i,1) = re(1,1,i);
    imag(i,1) = im(1,1,i);
end
plot(real,imag);
title('Diagrama de Nyquist del motor en lazo cerrado');
xlabel('Eje real');
ylabel('Eje imaginario');
grid;
pause;
close;

```

## 10.5 Pruebas para ver cómo se relacionan los parámetros de diseño con la posición de los polos del sistema

```
% -----  
% Pruebas para ver cómo se relacionan los parámetros de diseño con la  
% posición de los polos del sistema  
% -----  
  
r=0;  
t = 0:0.001:3;  
  
% PRUEBA 1  
% Fijamos b,c,d = 1 y variamos 1 < a < 100  
for i=1:100  
    % Establecimiento de los parámetros  
    a = i;  
    b = 1;  
    c = 1;  
    d = 1;  
  
    % Creación de las funciones de transferencia Fyr y Fyd  
    numer1 = [(a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)  
              c*d*(a^2+b^2)];  
    numer2 = [9.899*10^6 0];  
    denom = [1 (2*a+c+d) (a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d)  
             ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d) c*d*(a^2+b^2)];  
    Fyr = tf (numer1,denom);  
    Fyd = tf (numer2,denom);  
  
    % Respuesta al escalón de Fyr y Fyd  
    [yr,t] = step(pi/4*Fyr,t);  
    [yd,t] = step(Fyd,t);  
  
    % Cálculo de los parámetros del régimen transitorio  
    Mp1 = max(yr);  
    Mp2 = max(yd);  
    s = length(t);  
    while yr(s) > (0.98*pi/4) & yr(s) < (1.02*pi/4)  
        s = s - 1;  
    end  
    ts = (s - 1)*0.01;  
    wn = sqrt(a^2+b^2);  
    epsilon = a/wn;  
    r = r+1;  
    tabla(r,:) = [a b c d Mp1 Mp2 (Mp1+Mp2) ts epsilon];  
end
```

```

% PRUEBA 2
% Fijamos b,c,d = 100 y variamos 1 < a < 100
for i=1:100
    % Establecimiento de los parámetros
    a = i;
    b = 100;
    c = 100;
    d = 100;

    % Creación de las funciones de transferencia Fyr y Fyd
    numer1 = [(a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)
              c*d*(a^2+b^2)];
    numer2 = [9.899*10^6 0];
    denom = [1 (2*a+c+d) (a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d)
             ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d) c*d*(a^2+b^2)];
    Fyr = tf (numer1,denom);
    Fyd = tf (numer2,denom);

    % Respuesta al escalón de Fyr y Fyd
    [yr,t] = step(pi/4*Fyr,t);
    [yd,t] = step(Fyd,t);

    % Cálculo de los parámetros del régimen transitorio
    Mp1 = max(yr);
    Mp2 = max(yd);
    s = length(t);
    while yr(s) > (0.98*pi/4) & yr(s) < (1.02*pi/4)
        s = s - 1;
    end
    ts = (s - 1)*0.01;
    wn = sqrt(a^2+b^2);
    epsilon = a/wn;
    r = r+1;
    tabla(r,:) = [a b c d Mp1 Mp2 (Mp1+Mp2) ts epsilon];
end

```

```

% PRUEBA 3
% Fijamos a,c,d = 1 y variamos 1 < b < 100
for i=1:100
    % Establecimiento de los parámetros
    a = 1;
    b = i;
    c = 1;
    d = 1;

    % Creación de las funciones de transferencia Fyr y Fyd
    numer1 = [(a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)
              c*d*(a^2+b^2)];
    numer2 = [9.899*10^6 0];
    denom = [1 (2*a+c+d) (a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d)
             ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d) c*d*(a^2+b^2)];
    Fyr = tf (numer1,denom);
    Fyd = tf (numer2,denom);

    % Respuesta al escalón de Fyr y Fyd
    [yr,t] = step(pi/4*Fyr,t);
    [yd,t] = step(Fyd,t);

    % Cálculo de los parámetros del régimen transitorio
    Mp1 = max(yr);
    Mp2 = max(yd);
    s = length(t);
    while yr(s) > (0.98*pi/4) & yr(s) < (1.02*pi/4)
        s = s - 1;
    end
    ts = (s - 1)*0.01;
    wn = sqrt(a^2+b^2);
    epsilon = a/wn;
    r = r+1;
    tabla(r,:) = [a b c d Mp1 Mp2 (Mp1+Mp2) ts epsilon];
end

```

```

% PRUEBA 4
% Fijamos a,c,d = 100 y variamos 1 < b < 100
for i=1:100
    % Establecimiento de los parámetros
    a = 100;
    b = i;
    c = 100;
    d = 100;

    % Creación de las funciones de transferencia Fyr y Fyd
    numer1 = [(a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)
              c*d*(a^2+b^2)];
    numer2 = [9.899*10^6 0];
    denom = [1 (2*a+c+d) (a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d)
             ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d) c*d*(a^2+b^2)];
    Fyr = tf (numer1,denom);
    Fyd = tf (numer2,denom);

    % Respuesta al escalón de Fyr y Fyd
    [yr,t] = step(pi/4*Fyr,t);
    [yd,t] = step(Fyd,t);

    % Cálculo de los parámetros del régimen transitorio
    Mp1 = max(yr);
    Mp2 = max(yd);
    s = length(t);
    while yr(s) > (0.98*pi/4) & yr(s) < (1.02*pi/4)
        s = s - 1;
    end
    ts = (s - 1)*0.01;
    wn = sqrt(a^2+b^2);
    epsilon = a/wn;
    r = r+1;
    tabla(r,:) = [a b c d Mp1 Mp2 (Mp1+Mp2) ts epsilon];
end

```

```

% PRUEBA 5
% Fijamos a,b = 1 y variamos 1 < c,d < 100
for i=1:100
    % Establecimiento de los parámetros
    a = 1;
    b = 1;
    c = i;
    d = i;

    % Creación de las funciones de transferencia Fyr y Fyd
    numer1 = [(a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)
              c*d*(a^2+b^2)];
    numer2 = [9.899*10^6 0];
    denom = [1 (2*a+c+d) (a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d)
             ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d) c*d*(a^2+b^2)];
    Fyr = tf (numer1,denom);
    Fyd = tf (numer2,denom);

    % Respuesta al escalón de Fyr y Fyd
    [yr,t] = step(pi/4*Fyr,t);
    [yd,t] = step(Fyd,t);

    % Cálculo de los parámetros del régimen transitorio
    Mp1 = max(yr);
    Mp2 = max(yd);
    s = length(t);
    while yr(s) > (0.98*pi/4) & yr(s) < (1.02*pi/4)
        s = s - 1;
    end
    ts = (s - 1)*0.01;
    wn = sqrt(a^2+b^2);
    epsilon = a/wn;
    r = r+1;
    tabla(r,:) = [a b c d Mp1 Mp2 (Mp1+Mp2) ts epsilon];
end

```

```

% PRUEBA 6
% Fijamos a,b = 100 y variamos 1 < c,d < 100
for i=1:100
    % Establecimiento de los parámetros
    a = 100;
    b = 100;
    c = i;
    d = i;

    % Creación de las funciones de transferencia Fyr y Fyd
    numer1 = [(a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)
              c*d*(a^2+b^2)];
    numer2 = [9.899*10^6 0];
    denom = [1 (2*a+c+d) (a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d)
             ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d) c*d*(a^2+b^2)];
    Fyr = tf (numer1,denom);
    Fyd = tf (numer2,denom);

    % Respuesta al escalón de Fyr y Fyd
    [yr,t] = step(pi/4*Fyr,t);
    [yd,t] = step(Fyd,t);

    % Cálculo de los parámetros del régimen transitorio
    Mp1 = max(yr);
    Mp2 = max(yd);
    s = length(t);
    while yr(s) > (0.98*pi/4) & yr(s) < (1.02*pi/4)
        s = s - 1;
    end
    ts = (s - 1)*0.01;
    wn = sqrt(a^2+b^2);
    epsilon = a/wn;
    r = r+1;
    tabla(r,:) = [a b c d Mp1 Mp2 (Mp1+Mp2) ts epsilon];
end

```

```

% PRUEBA 7
% Fijamos  $b = a/2$ ,  $c, d = (6617.751 - 2*a)/2$  y variamos  $1 < a < 100$ 
for i=1:100
    % Establecimiento de los parámetros
    a = i;
    b = a/2;
    c = (6617.751-2*a)/2;
    d = c;

    % Creación de las funciones de transferencia Fyr y Fyd
    numer1 = [(a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)
              c*d*(a^2+b^2)];
    numer2 = [9.899*10^6 0];
    denom = [1 (2*a+c+d) (a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d)
              ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d) c*d*(a^2+b^2)];
    Fyr = tf (numer1,denom);
    Fyd = tf (numer2,denom);

    % Respuesta al escalón de Fyr y Fyd
    [yr,t] = step(pi/4*Fyr,t);
    [yd,t] = step(Fyd,t);

    % Cálculo de los parámetros del régimen transitorio
    Mp1 = max(yr);
    Mp2 = max(yd);
    s = length(t);
    while yr(s) > (0.98*pi/4) & yr(s) < (1.02*pi/4)
        s = s - 1;
    end
    ts = (s - 1)*0.01;
    wn = sqrt(a^2+b^2);
    epsilon = a/wn;
    r = r+1;
    tabla(r,:) = [a b c d Mp1 Mp2 (Mp1+Mp2) ts epsilon];
end

```

## 10.6 Simulación del controlador diseñado

```
% -----  
% Simulación del controlador diseñado  
% -----  
  
% -----  
% Funciones de transferencia  
% -----  
calculosauxiliares;  
  
r=0;  
t = 0:0.00001:3;  
  
% Establecimiento de los parámetros de los polos  
a = 20;  
b = 10;  
c = (6617.751-2*a)/2;  
d = c;  
  
% Numerador de Fyr  
numer1 = [(a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)  
c*d*(a^2+b^2)];  
  
% Numerador de Fyd  
numer2 = [9.899*10^6 0];  
  
% Numerador de Fyn  
numer3 = [-K*k -K*k*(amasb) -K*k*ab];  
  
% Denominador común  
denom = [1 (2*a+c+d) (a^2+b^2+2*a*(c+d)+c*d) ((c+d)*(a^2+b^2)+2*a*c*d)  
c*d*(a^2+b^2)];  
  
% Funciones de transferencia  
Fyr = tf (numer1, denom);  
Fyd = tf (numer2, denom);  
Fyn = tf (numer3, denom);  
  
% -----  
% Respuesta al escalón de Fyr  
% -----  
step(pi/4*Fyr,t);  
axis ([0 0.15 0 0.9]);  
title('Respuesta del sistema para r(t) constante');  
xlabel('Tiempo');  
ylabel('Salida (rad)');  
  
% Cálculo de los parámetros  
[yr,t] = step(pi/4*Fyr,t);  
  
% Tiempo de subida  
r = 1;  
while yr(r) < pi/4 + 0.001  
    r = r+1;  
end  
tiempo_subida_Fyr = (r-1)*0.00001;
```

```

% Tiempo de pico y sobreelongación máxima
[ymax,tp] = max(yr);
tiempo_pico_Fyr = (tp - 1)*0.00001;
sobreelongacion_max_Fyr = ymax;
sobreelongacion_max_porc_Fyr = (ymax - pi/4)*100/(pi/4);

% Tiempo de asentamiento
s = length(t);
while yr(s) > (0.98*pi/4) & yr(s) < (1.02*pi/4);
    s = s - 1;
end
tiempo_asentamiento_Fyr = (s - 1)*0.00001;
pause;

% -----
% Respuesta al escalón de Fyd
% -----
step(Fyd,t);
axis ([0 1 0 0.02]);
title('Respuesta del sistema para d(t) constante');
xlabel('Tiempo');
ylabel('Salida (rad)');

% Cálculo de los parámetros
[yd,t] = step(Fyd,t);

% Tiempo de pico y amplitud máxima
[ymax,tp] = max(yd);
tiempo_pico_Fyd = (tp - 1)*0.00001;
amplitud_max_Fyd = ymax;
pause;

% -----
% Respuesta al escalón de Fyn
% -----
[yn,t] = step(Fyn,t);
step(Fyn,t);
axis ([0 0.2 -1.4 0]);
title('Respuesta del sistema para n(t) constante');
xlabel('Tiempo');
ylabel('Salida (rad)');
pause;

% -----
% Respuesta conjunta de r(t) y d(t)
% -----
ydr = yd + yr;
plot (t, ydr);
axis([0 0.2 0 1]);
title('Respuesta conjunta del sistema a r(t) y d(t)');
xlabel('Tiempo (sec)');
ylabel('Salida (rad)');

% Tiempo de subida
r = 1;
while ydr(r) < pi/4 + 0.001
    r = r+1;
end
tiempo_subida_Fydr = (r-1)*0.00001;

```

```

% Tiempo de pico y sobreelongación máxima
[ymax,tp] = max(ydr);
tiempo_pico_Ydr = (tp - 1)*0.00001;
sobreelongacion_max_Ydr = ymax;
sobreelongacion_max_porc_Ydr = (ymax - pi/4)*100/(pi/4);

% Tiempo de asentamiento
s = length(t);
while ydr(s) > (0.98*pi/4) & ydr(s) < (1.02*pi/4);
    s = s - 1;
end
tiempo_asentamiento_Ydr = (s - 1)*0.00001;
pause;

% -----
% Respuesta a la rampa
% -----
u_rampa = t;
z = lsim(Fyr,u_rampa,t);
plot (z,t);
axis([0 3 0 3]);
title ('Respuesta del sistema a una rampa');
xlabel('Tiempo (sec)');
ylabel('Salida (rad)');
pause;

% -----
% Respuesta a la parábola
% -----
u_parabola = t.^2;
z = lsim(Fyr,u_parabola,t);
plot (z,t);
axis([0 9 0 3]);
title ('Respuesta del sistema a una parábola');
xlabel('Tiempo (sec)');
ylabel('Salida (rad)');
pause;

% -----
% Diagrama de Bode del sistema
% -----
w = logspace (-1,6,1000);
bode(Fyr,w);
title('Diagrama de Bode del sistema');

% Cálculo de la frecuencia de resonancia, el pico de resonancia
% y el ancho de banda
[mag,phase,w] = bode (Fyr,w);
[Mr,k] = max(mag);
pico_resonante = 20 * log10(Mr)
frecuencia_resonante = w(k)
n = 1;
while 20*log10(mag(n)) >= -3
    n = n + 1;
end
ancho_banda = w(n)
pause;

```

