

# Controlador de motor Maxon

Sistemas de Control

Eduardo Matallanas de Ávila  
David Rodríguez Aparicio  
Rafael Ruiz Moreno  
Enrique Vicente Arcones

# Índice

---

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| Introducción .....                                                   | 3  |
| Estabilidad.....                                                     | 4  |
| Motor Maxon .....                                                    | 5  |
| Acción de control .....                                              | 8  |
| Condiciones iniciales .....                                          | 19 |
| Especificaciones .....                                               | 20 |
| Diseño de controlador del motor de orden 2 .....                     | 21 |
| Estudio de controlador diseñado para un motor de orden 3 .....       | 25 |
| Error en régimen permanente .....                                    | 26 |
| Estudio con controladores causales.....                              | 28 |
| Estudio al variar R en régimen permanente y régimen transitorio..... | 30 |
| Estudio de los diagramas de Bode y Nyquist.....                      | 31 |
| Conclusión .....                                                     | 32 |
| Bibliografía .....                                                   | 33 |

# Introducción

---

El hombre siempre ha recurrido a su imaginación e inteligencia para hacer que su vida sea más sencilla. Para ello siempre ha querido controlar todo lo que se encontraba a su alrededor.

Nosotros en este trabajo intentaremos resolver el problema de controlar un motor, una aplicación a la vista sencilla pero que realmente es muy compleja. Para abordar el problema del controlador primero vamos a realizar unos estudios previos que nos ayudarán en nuestra tarea. Primero veremos que necesitamos que cumpla nuestra planta en cuanto a estabilidad. Continuaremos viendo que pasa con las condiciones iniciales. Pasaremos a ver las acciones de control distintas y que hace cada una.

Una vez vistos estos estudios preliminares ya estaremos en condiciones de realizar la acción de control sobre nuestro motor Maxon. Entonces primero decidiremos las especificaciones que le vamos a imponer a nuestro motor y después analizaremos el controlador posible sin ninguna perturbación. Después le añadiremos dicha perturbación. Y concluiremos con un pequeño análisis sobre el error en régimen permanente.

# Estabilidad

---

Lo primero que hicimos para el desarrollo del controlador definitivo fue analizar las condiciones de estabilidad de una función de transferencia, utilizando el método de Routh (routh.m).

También hemos realizado unas simulaciones en cuanto a simplificaciones de polos con polos en el espacio de estados con Matlab (cancelaciones.m). Para ello hemos analizado los casos siguientes:

$$\dot{y} - y = u$$

$$\dot{y} + y = u$$

En el espacio de estados ambas son tratadas igual. Al pasar del espacio de estados a la función de transferencia vemos que ambas son distintas. Si obtenemos sus polos y ceros vemos que del primer sistema tenemos un polo y un cero coincidentes en +1 y un polo en -1 mientras que para el segundo sólo hay un polo en menos uno. Por tanto el espacio de estados contiene toda la información sin simplificación. Pero en cuanto a la respuesta al escalón ambas son idénticas eso se deberá a que la función step de Matlab haga alguna simplificación.

Como conclusión ambos sistemas son distintos en su espacio de estados, quedando está información bien definida en el sistema.

# Motor Maxon

En este apartado desarrollaremos el simulador del motor que será lo que realmente queremos controlar. Para empezar sabemos que las ecuaciones de las que proviene el motor son:

$$\begin{cases} u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + k \cdot \dot{\theta} \\ k' \cdot i(t) = J \cdot \ddot{\theta} + B \cdot \dot{\theta} \end{cases}$$

De aquí podemos extraer que el sistema es de orden 3. Y podemos obtener tres funciones de transferencia: una relativa a la corriente, otra relativa a la posición y otra dependiente de la velocidad. En las simulaciones que hemos hecho nada más que hemos realizado la de posición y la de velocidad. Resolvimos este problema de dos formas para compararlas:

1. Mediante la transformada de Laplace. Y el resultado fueron las siguientes funciones de transferencia.

La de velocidad:

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{U(s)} = \frac{k'}{J \cdot L \cdot s^2 + (R \cdot J + L \cdot B) \cdot s + (R \cdot B + k \cdot k')}$$

La de posición:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{k'}{J \cdot L \cdot s^3 + (R \cdot J + L \cdot B) \cdot s^2 + (R \cdot B + k \cdot k') \cdot s}$$

2. Mediante el espacio de estados. Para el cual lo realizamos de dos formas una mediante lo que se propuso en clase y la otra mediante la otra propuesta general de la ecuación diferencial sin derivadas en la excitación. Aquí sólo pondremos la que se hizo en clase. Las matrices quedarían:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-B}{J} & \frac{k'}{J} \\ 0 & \frac{-k}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}; c^T = [1 \quad 0 \quad 0]; D = 0;$$

Quedando el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-B}{J} & \frac{k'}{J} \\ 0 & \frac{-k}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u(t); \\ y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix}; \end{cases}$$

Pero para ver que no existe ninguna diferencia entre Laplace y espacio de estados cuando las condiciones iniciales son nulas, excitamos el sistema con una respuesta al escalón. Y con los siguientes parámetros del motor.

$$\begin{aligned}
 J &= 43.8 \cdot 10^{-7} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2; \\
 B &= 3.62 \cdot 10^{-7} \text{ Nm} \cdot \text{s/rad}; \\
 k &= 32.18 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/A}; \\
 k' &= 32.18 \cdot 10^{-3} \text{ rad/(s} \cdot \text{V)}; \\
 R &= 4.91 \Omega; \\
 L &= 742.2 \cdot 10^{-6} \text{ H};
 \end{aligned}$$

Resultado espacio de estados

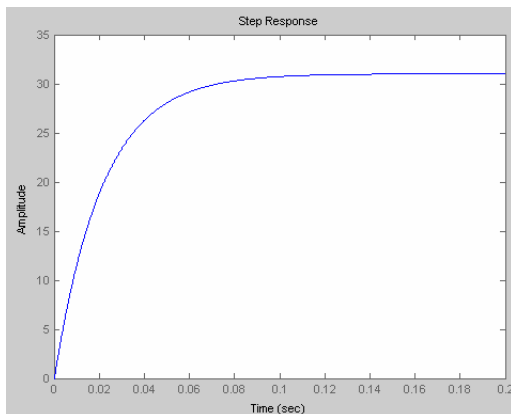


Figura 1. Velocidad.

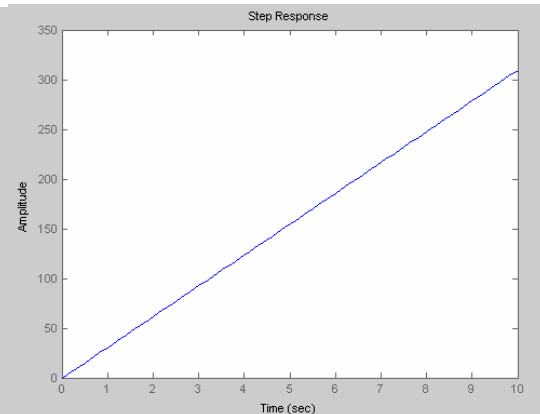


Figura 2. Posición.

Resultado en el dominio de Laplace.

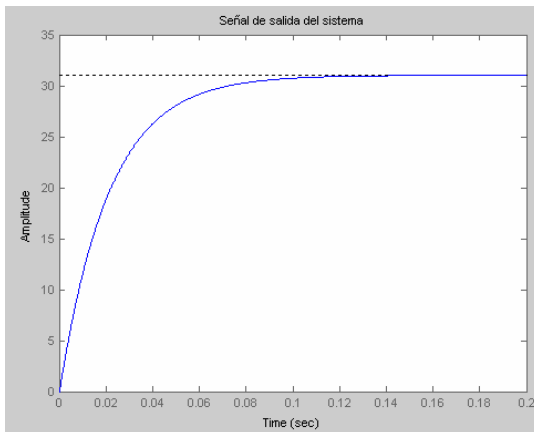


Figura 3. Velocidad.

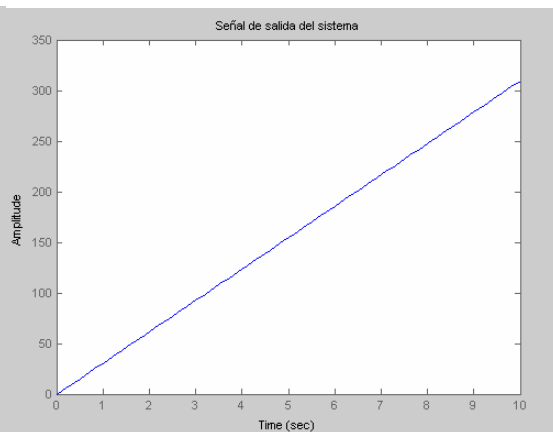


Figura 4. Posición.

Como vemos no hay ninguna diferencia entre ambas. Pero para no perder la información de las condiciones iniciales lo que haremos será trabajar en el espacio de estados.

Pero para realizar un diseño de controladores más sencillo vamos a aproximar esta planta de orden tres por otra de orden dos eliminando la derivada de la corriente en la ecuación diferencial. Debido a que se cumple que en la solución de la ecuación diferencial la expresión de la corriente cae mucho más rápidamente que la de las componentes físicas, es decir, que si la solución a la ecuación diferencial es:  $\alpha_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \alpha_2 e^{-\frac{B}{J}t}$  resulta que  $\frac{R}{L} \gg \frac{B}{J}$ . Una vez hecha esta aclaración el nuevo sistema quedaría en el espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{B \cdot R - k \cdot k'}{R \cdot J} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k'}{R \cdot J} \end{bmatrix}; C^T = [1 \quad 0]; D = 0;$$

Las respuestas al escalón que obtenemos de este sistema son:

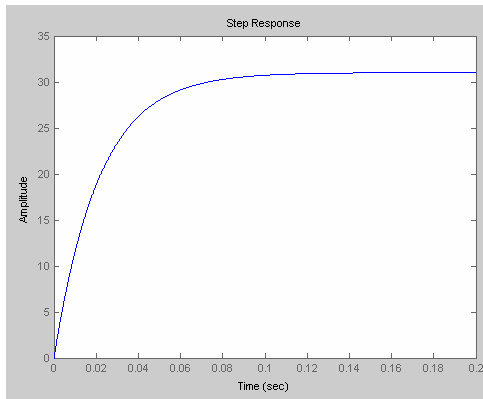


Figura 5. Velocidad.

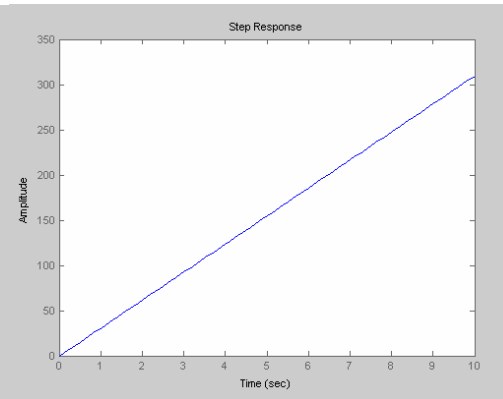


Figura 6. Posición.

Como vemos son muy parecidas pero estamos cometiendo un error en el tercer decimal. Y aunque no sea muy grande para lo que vamos a hacer nosotros dependiendo de la aplicación no se puede cometer este error. Para verlo mejor hemos calculado con el Matlab las gráficas de error relativo y error absoluto.

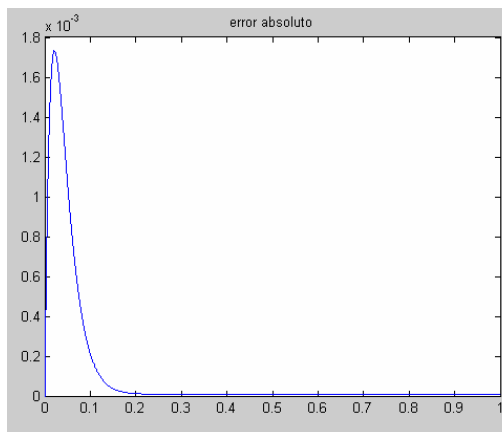


Figura 7. Error absoluto.

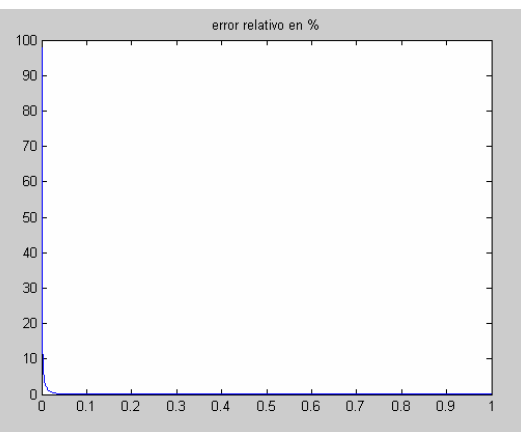


Figura 8. Error relativo.

\*Todas las simulaciones se encuentran en la carpeta Motor del software.

# Acción de control

---

A la hora de estudiar los tipos de controlador en lazo cerrado, voy a utilizar con todos la siguiente metodología. A partir de una función de transferencia cualquiera, estudiare los distintos tipos de controlador para esa función de transferencia. Lo primero será ver la respuesta al impulso utilizando los parámetros del controlador igualados a 1, y los comparare con la respuesta al impulso tras la variación de los parámetros. Disminuir no tendría sentido ya que sería como estar simulando otro tipo de controlador, es decir si en un PD  $T_d = 0$  sería lo mismo que un proporcional. La función de transferencia elegida para controlar fue:

$$G_c = \frac{1}{2 \cdot s^2 + s + 3}$$

## 1. Controlador tipo P.

Como explique antes, simulo la respuesta al impulso con los parámetros igualados a 1, en este caso es para un controlador proporcional de  $k=1$ , donde obtengo la siguiente respuesta al impulso.

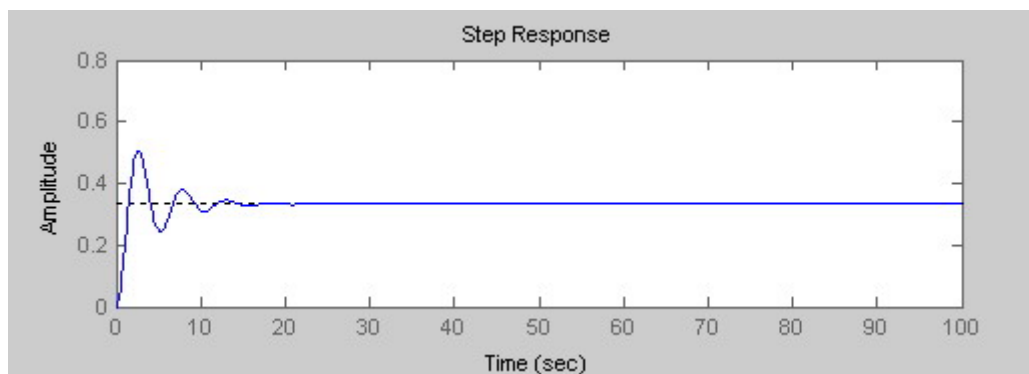
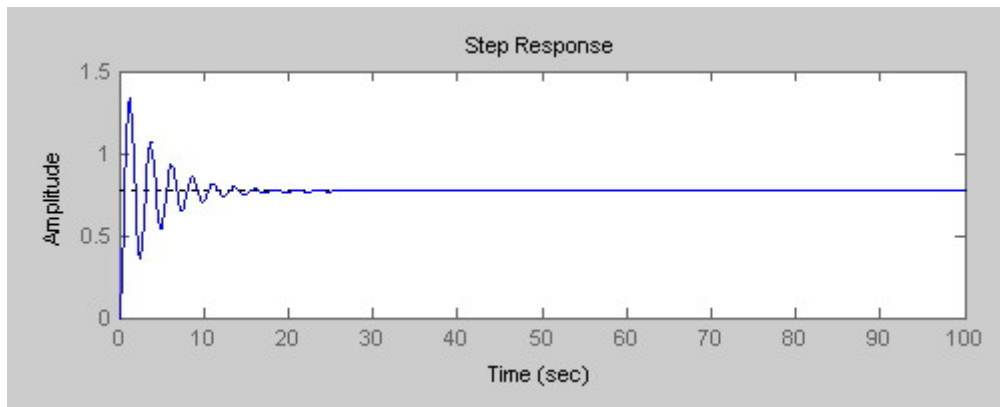
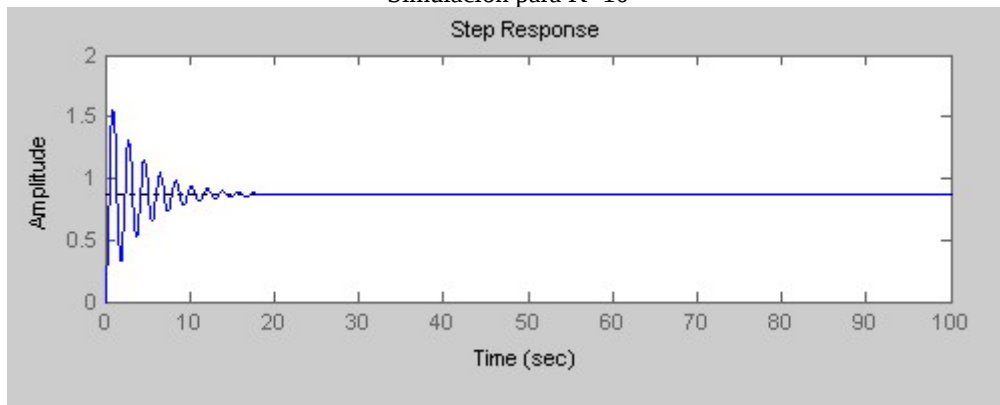


Imagen de la respuesta al impulso de la planta genérica.

Después, tras simular para varios valores de  $k$  e ir aumentando su valor se observa que aumenta la frecuencia de las oscilaciones en el transitorio.



Simulación para  $K=10$

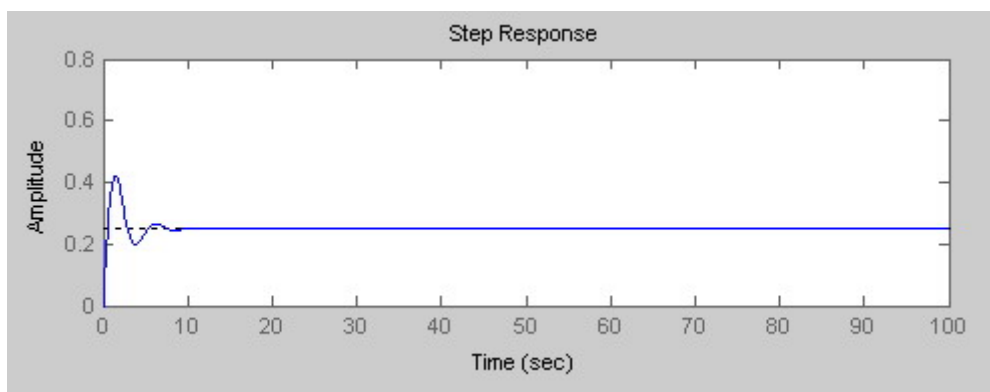


Simulación para  $K=20$

Después de hacer el estudio, llegué a la conclusión de que los controladores de tipo proporcional no eran efectivos a la hora de controlar una función de transferencia como la utilizada de ejemplo o similar. Esto no significa que este tipo de controlador no sea útil para controlar funciones de transferencia, sino que para este caso concreto no nos valía.

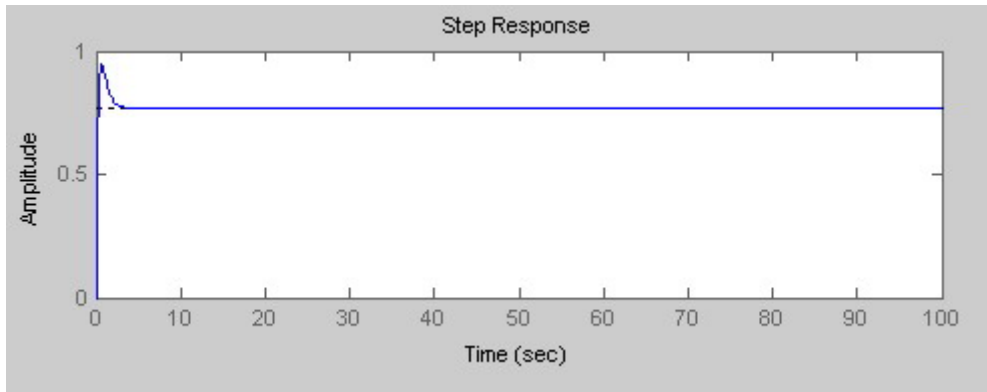
## 2. Controlador PD.

Para estudiar este tipo de controlador utilicé la misma metodología que con el anterior, la misma función de transferencia y unos parámetros iguales a 1 ( $K$  y  $T_d$ ). Y simulamos la respuesta al impulso con estos parámetros. Obteniendo la siguiente respuesta:



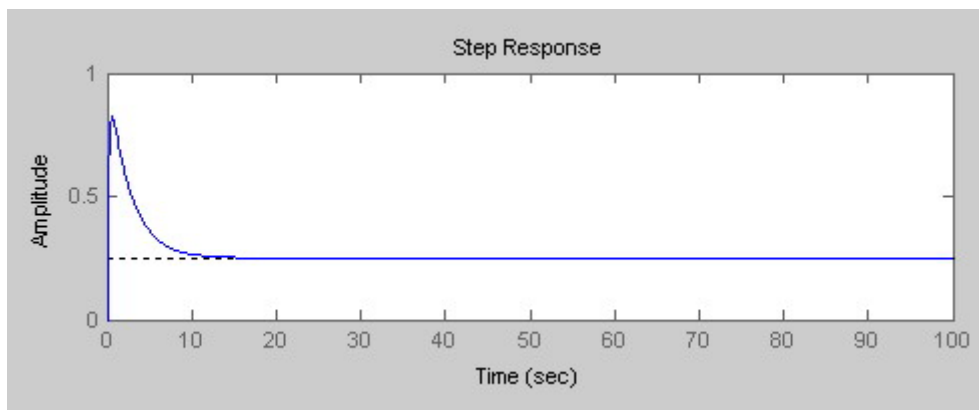
Respuesta al impulso con  $K$  y  $T_d$  igualados a 1.

Tras la simulación para varios valores de  $k$  (variándolo siempre progresivamente) observe que el aumento de  $k$  produce un tiempo de establecimiento más corto aunque la caída de fase es más lenta.(esto se observa en los diagramas de bode al final del apartado).



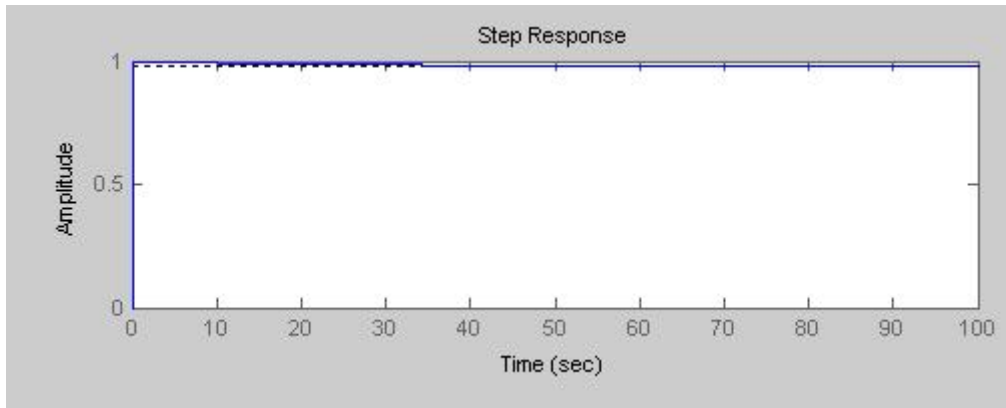
Respuesta al impulso con  $K$  aumentado.

Respecto a la simulación para varios valores de  $T_d$  (variándolo siempre progresivamente, al igual que  $k$ ) observe que el aumento de  $T_d$  reduce las oscilaciones, aunque al principio nos aparece una considerable sobreelongacion(mas tarde en el estudio se vera que con el aumento de  $K$  solucionamos esta sobreelongacion), también nos provoca una caída de fase más lenta.



Respuesta al impulso del sistema controlado con un PD de  $T_d$  aumentado

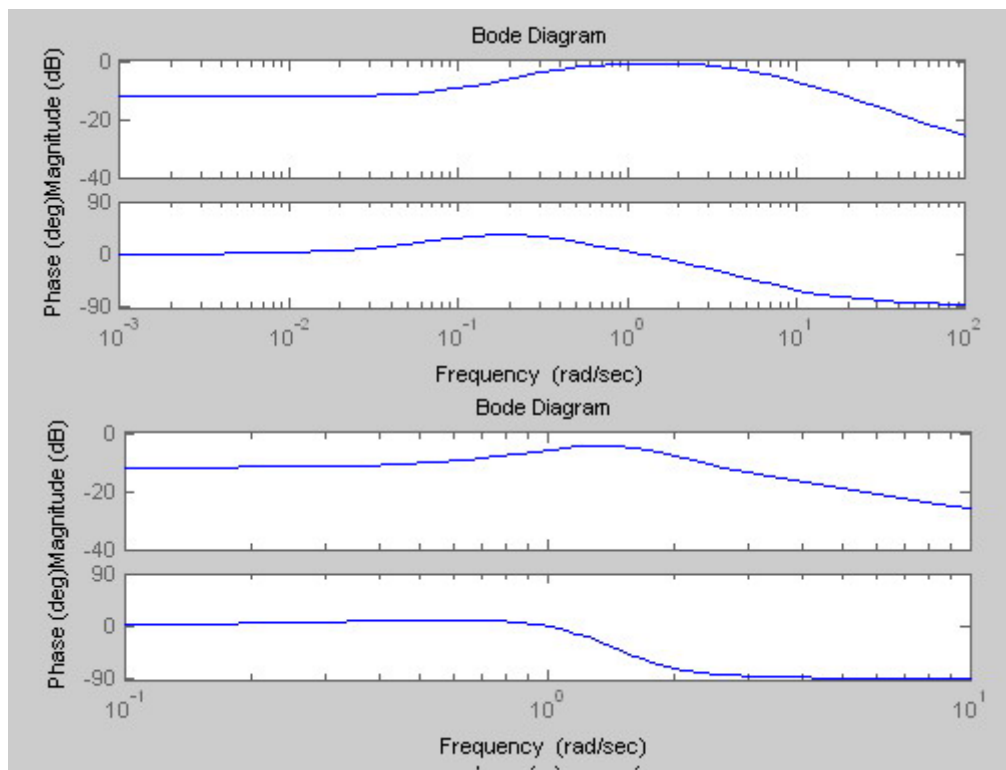
Después tras aumentar ambos valores, observamos que el aumento de  $K$  nos reduce bastante bien la sobreelongacion que nos aparecía con el aumento de  $T_d$ , con lo que llegue a la conclusión de que con este tipo de controlador (proporcional derivativo) se puede llegar a controlar una función de transferencia como este o similar bastante bien, como se observa en la grafica siguiente.



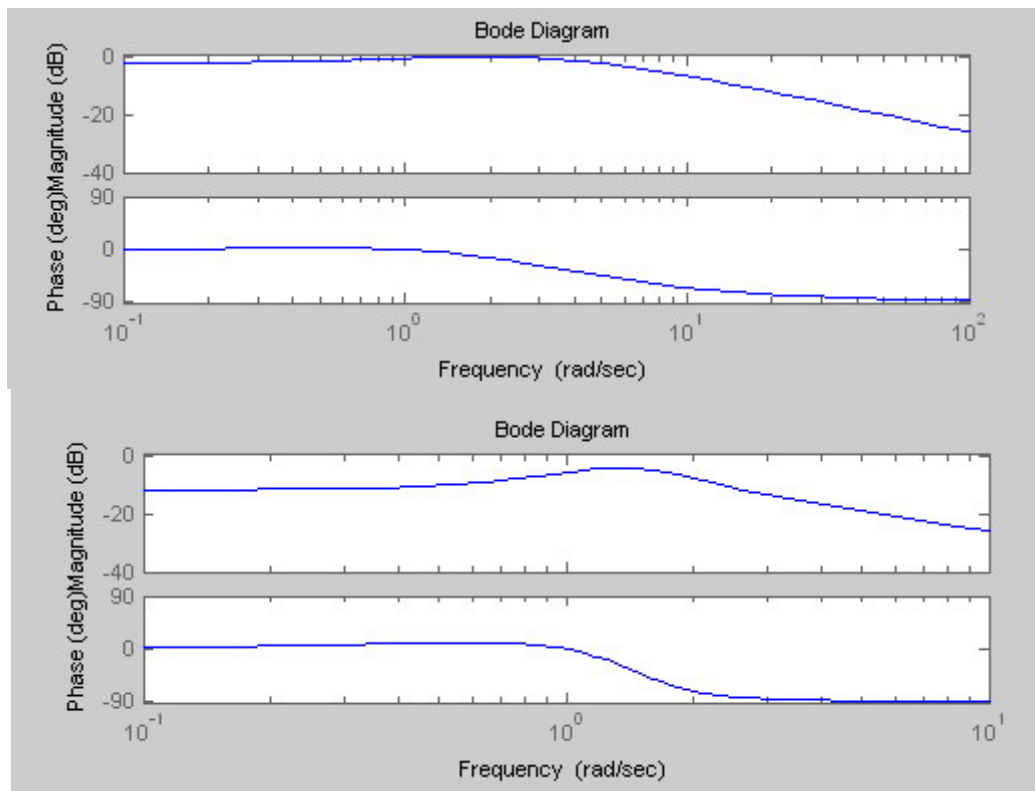
Sistema controlador con un controlador tipo PD.

- Imágenes de la repuesta en frecuencia para PD.

Aquí se ve claramente la caída más lenta que se produce tanto con la variación del parámetro  $T_d$  como del parámetro  $K$ . El diagrama de arriba corresponde en ambos casos a la simulación con los parámetros mas elevados.



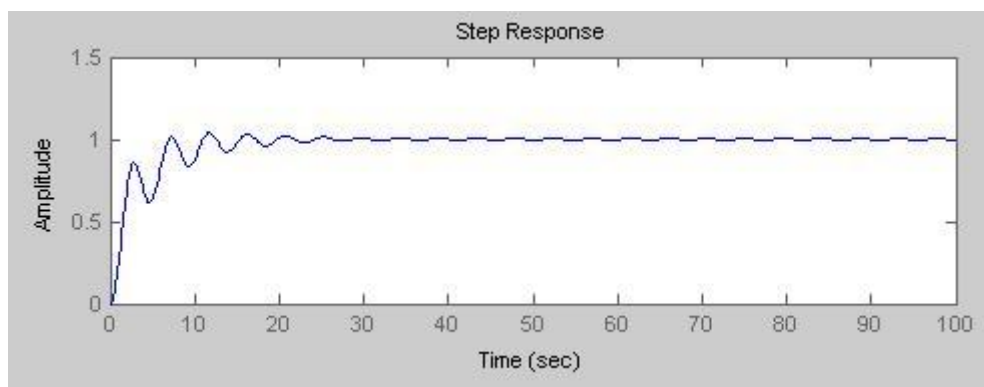
Efectos del aumento del parámetro  $T_d$  en bode.



Efectos del aumento del parámetro K en bode.

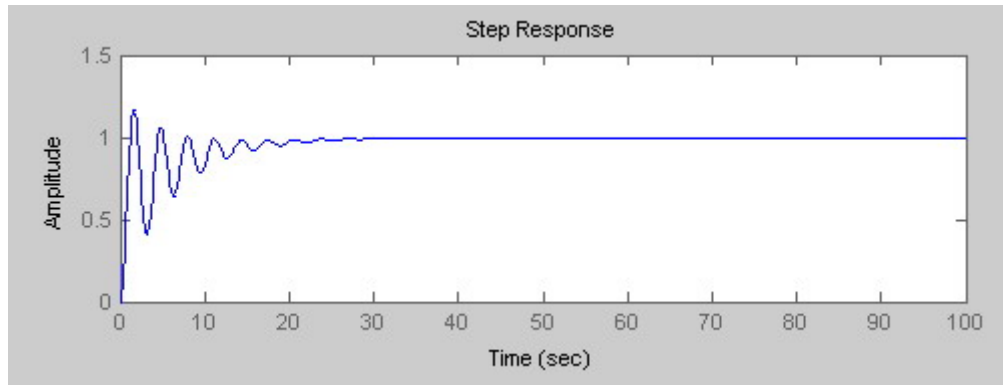
### 3. Controlador tipo PI.

Con el estudio para los controladores de tipo PI, seguimos con el mismo método utilizado anteriormente. A continuación se muestra la respuesta al impulso del sistema, con unos parámetros, en este caso K y  $T_i$ , igualados a 1:



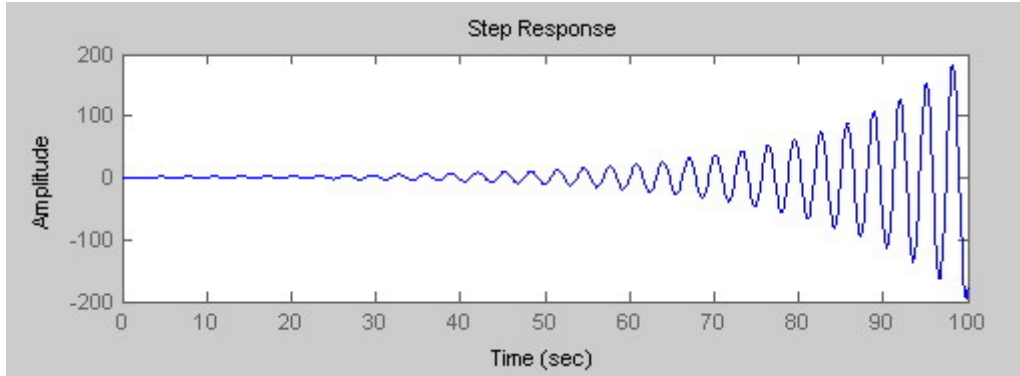
Respuesta al impulso con los parámetros igualados a 1.

Después de simular varios valores de  $k$  (variándolo siempre progresivamente) observe con el aumento de  $K$  se aumentaba la frecuencia de oscilación, y la sobreelongación, cosa que indicaba que no iba a ser muy eficiente intentar controlar la función de transferencia con este tipo de controlador (ya que al controlar se pretende todo lo contrario normalmente).



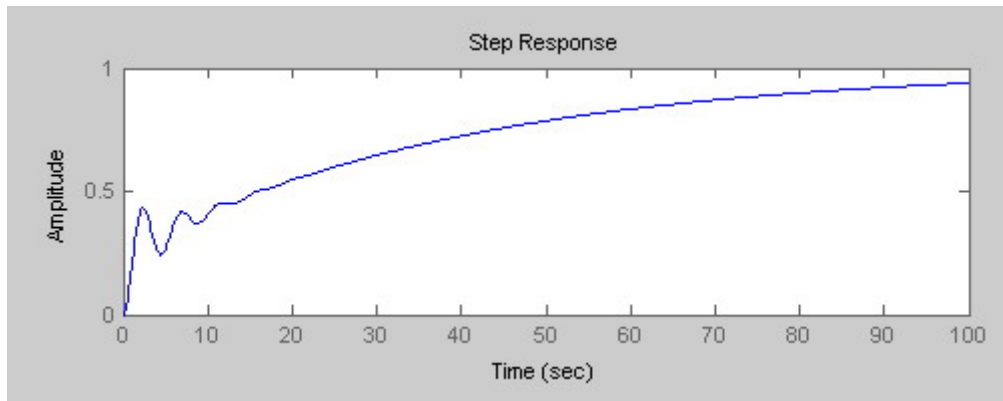
Efectos del aumento del parámetro  $K$ .

De hecho, no llegue a simular tantos valores de  $K$  como en los otros casos ya que tras superar cierto valor de  $K$  (no lo calcule exactamente, pues no lo veía relevancia a partir de cual empezaba a ser inestable, sino a que se desestabilizaba), el sistema se desestabilizo.



Efectos del aumento del parámetro  $K$  demasiado.

Las simulaciones con el parámetro  $T_i$  tampoco fueron mucho mejor. La variación de este parámetro aumentaba el tiempo de establecimiento muchísimo (como se observa en la grafica).



Efectos del aumento del parámetro K demasiado

También nos aparece un mínimo en el diagrama de bode, tanto en fase como en ganancia. Los dos aparecen a bajas frecuencias. El de fase se desplaza cada vez mas hacia  $f=0$ , a medida que aumentamos el valor de  $T_i$ , sin embargo el de ganancia aumenta a la vez que lo hace  $T_i$ . En la grafica de abajo observamos el diagrama de bode, el diagrama de arriba corresponde al valor de  $T_i$  más pequeño (el valor de  $K$  es el mismo para ambas simulaciones).

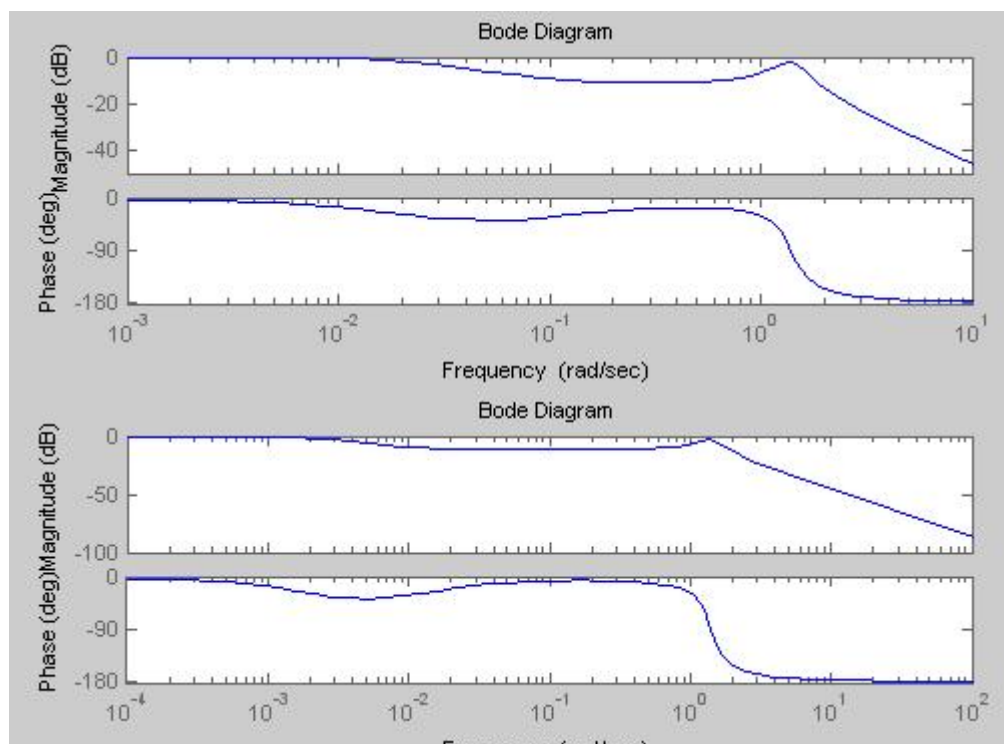
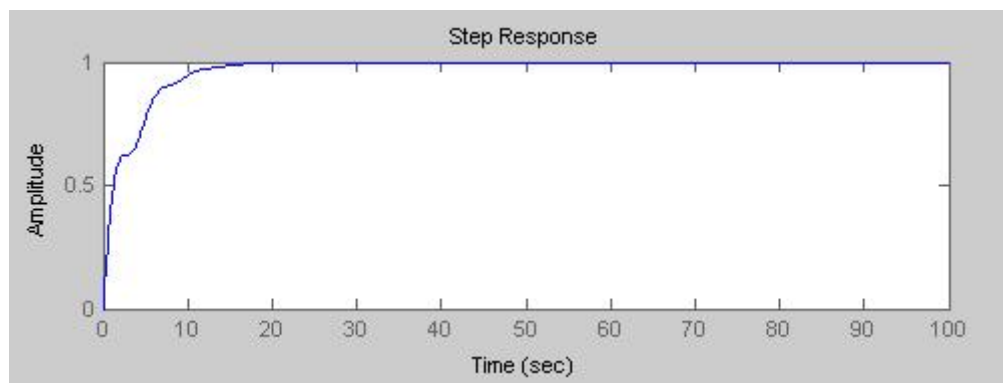


Diagrama de bode, con un diferencia significativa de  $T_i$ .

Tras el termino del estudio, después de haber realizado muchas simulaciones, llegue a la conclusión de que este tipo de controlador (proporcional integrador), no era efectivo para esta función de transferencia, o similares. . Esto no significa que este tipo de controlador no sea útil para controlar funciones de transferencia, sino que para este caso concreto no nos valía.

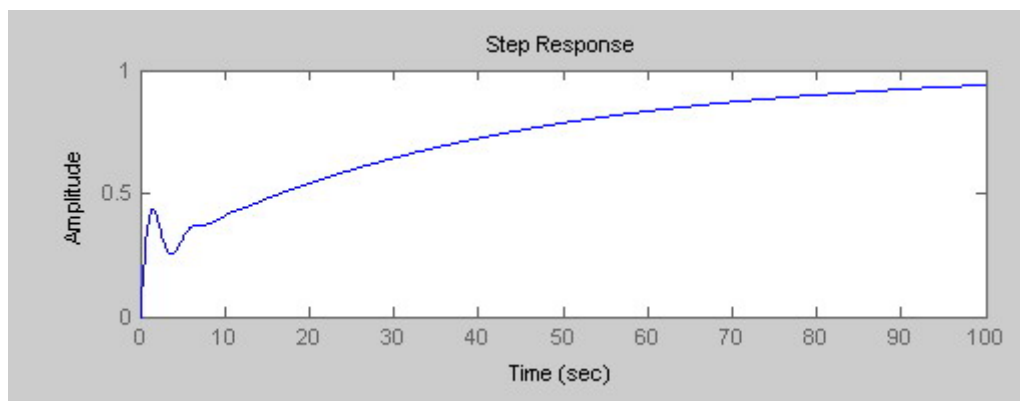
#### 4. Controlador PID.

Al igual que hemos hecho antes, para estudiar los controladores PID utilizaremos la misma metodología que con los otros tipos de controladores (simulando la respuesta al impulso del sistema para unos parámetros  $K$ ,  $T_d$  y  $T_i$  igualados a 1). Aunque partíamos con la ventaja de haber estudiado ya los otros tipos de controlador, ya que el tipo de controlador PID es una mezcla entre PI y PD. A continuación se muestra la respuesta al impulso con los parámetros igualados a 1:



Respuesta al impulso de un PID de parámetros igualados a 1.

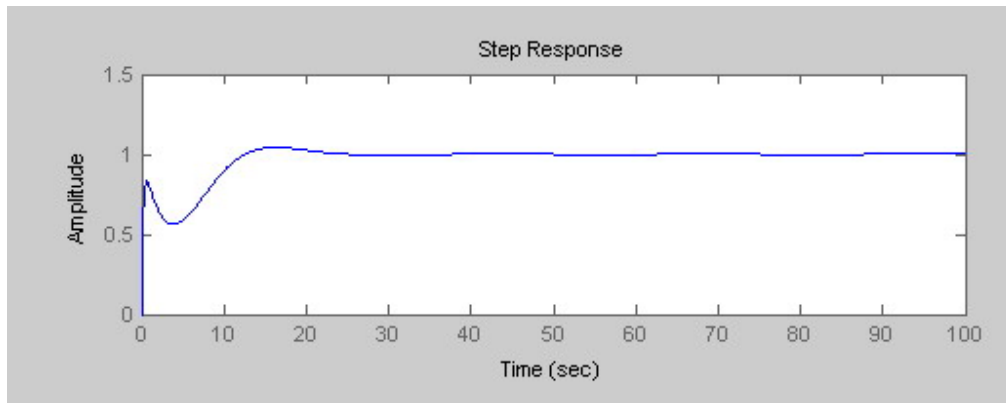
Comenzamos el estudio del sistema, aumentado el parámetro de  $T_i$ . Al poco de simular varios incrementos del parámetro vimos que ocurría al igual que con los controladores proporcionales integradores, un pequeño aumento del parámetro disparaba el aumento del tiempo de establecimiento. También tiene efecto sobre el diagrama de bode, creándonos unos mínimos muy parecidos a los del controlador PI (Esto se observa al final del apartado). A continuación mostramos el aumento que sufría el tiempo de establecimiento, con un valor de  $T_i$  elevado:



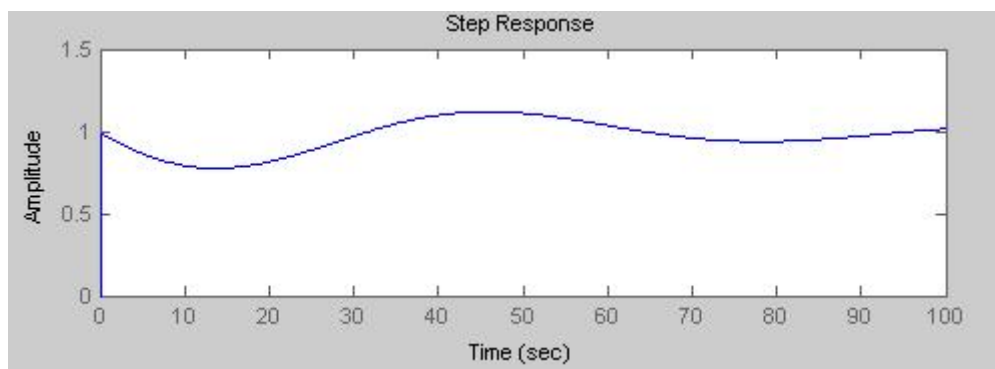
Efectos del aumento del parámetro  $T_i=10$ .

Con respecto al parámetro  $T_d$ , su aumento nos producía un aumento del tiempo de establecimiento, aunque no era comparable al provocado por el aumento de  $t_i$ . También causaba oscilaciones lentas durante el transitorio (mas lentas cuantos mas aumentemos  $T_d$ ) con una sobreelongacion bastante reducida (aunque la sobreelongacion aumentara con el aumento de  $T_d$ ).Respecto a bode, nos aparece un mínimo en ganancia y en fase (en fase también nos

aparece un máximo) que no nos aparecían con los controladores PD. (Los diagramas de bode se encuentran al final del apartado). A continuación le mostramos, las respuestas al impulso del PID, con un  $T_d$  grande. La imagen de arriba corresponde a una  $T_d$  mas pequeño respecto de la imagen de abajo. (Aunque pueda parecer el aumento del tiempo de establecimiento con el aumento del parámetro  $T_d$  mayor que con el parámetro  $T_i$ , el valor de  $T_i$  es realmente mas grande que el de  $T_d$ ).

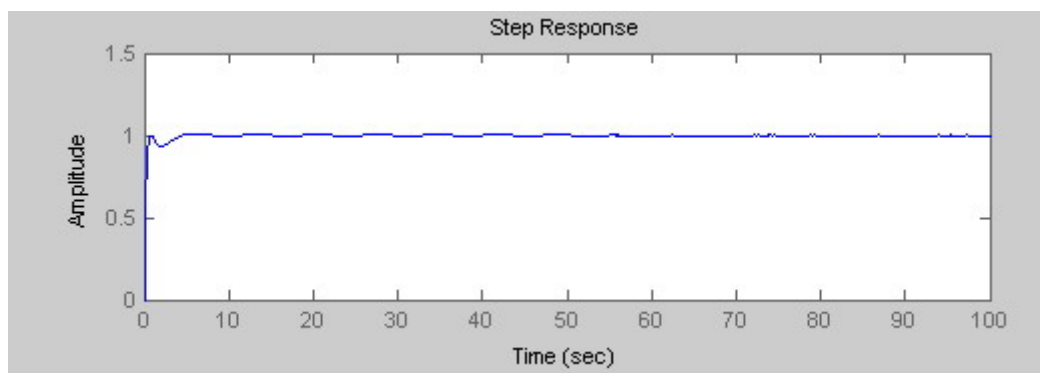


Respuesta la impulso con el parámetro  $T_d=10$ .



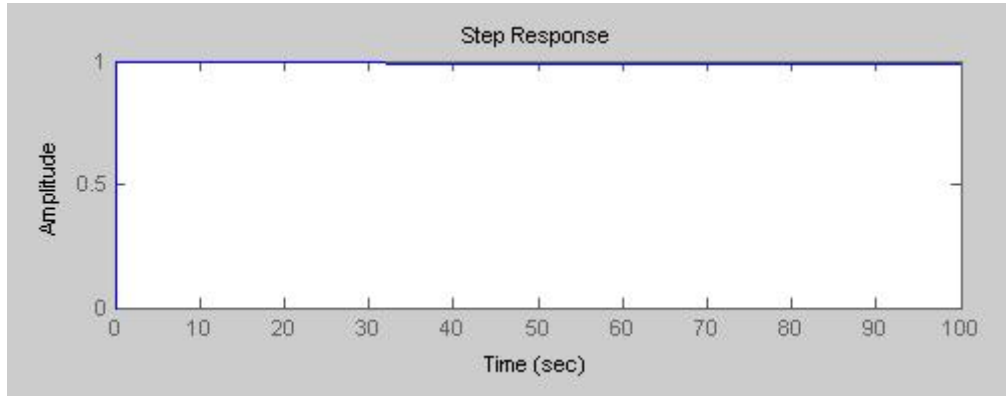
Respuesta la impulso con el parámetro  $T_d=100$ .

Sin embargo, tras varias simulaciones variando  $K$ , observe que la simple variación de este parámetro, controlaba el sistema bastante bien. Reducía las oscilaciones, el tiempo de establecimiento se reducía enormemente, y desaparecían los mínimos que nos encontrábamos con los otros dos parámetros en bode. A continuación le mostramos la respuesta al impulso tras aumentar el valor de  $K$ :



Respuesta al impulso después de aumentar el valor de  $K$ .

Al final, tras realizar varias simulaciones con la variación de los 3 parámetros, conseguí que la respuesta al impulso fuese realmente buena. A continuación le muestro la grafica, con la respuesta al impulso que conseguí. No seguí con las simulaciones para parámetros mayores ya que me pareció que la respuesta al impulso que iba a conseguir, no iba a ser mucho mejor que la de la imagen mostrada a continuación:



Sistema controlado con un controlador PID.

- Imágenes de la respuesta en frecuencia

En este apartado mostramos las graficas de cómo influye en la caída de la pendiente el aumento del parámetro K. La primera imagen corresponde a un valor K menor respecto al de la segunda imagen.

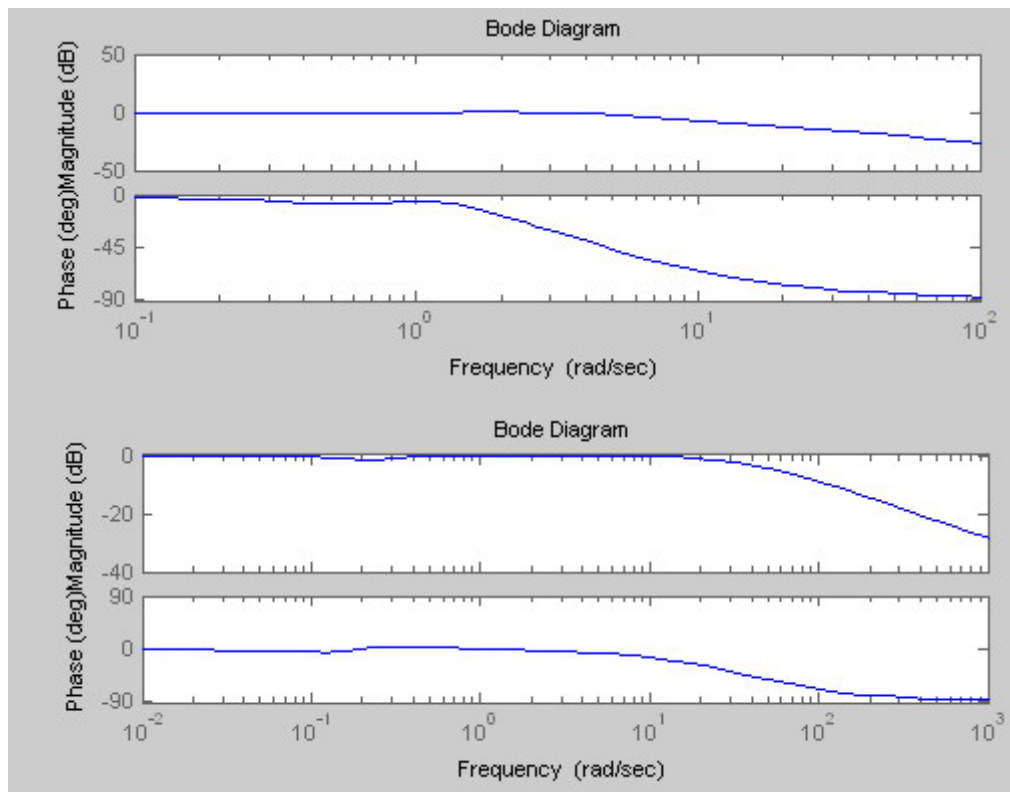


Diagrama de bode de la variación del parámetro K.

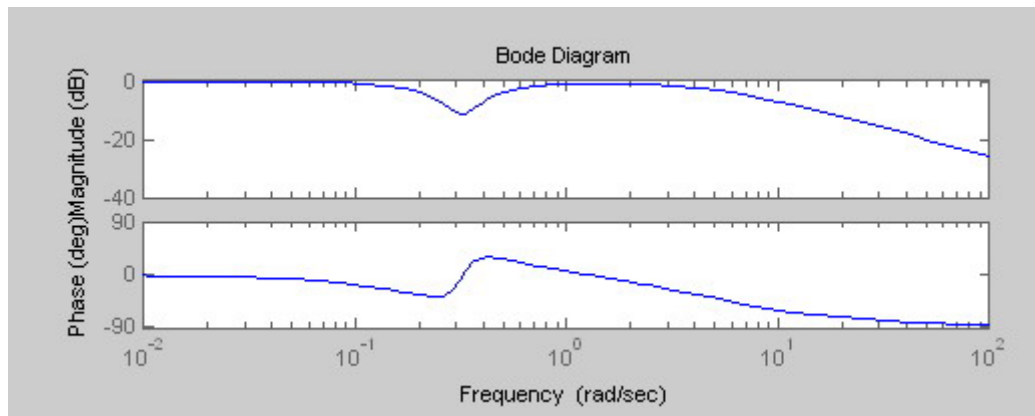


Diagrama de bode de la variación del parámetro  $T_d$ .

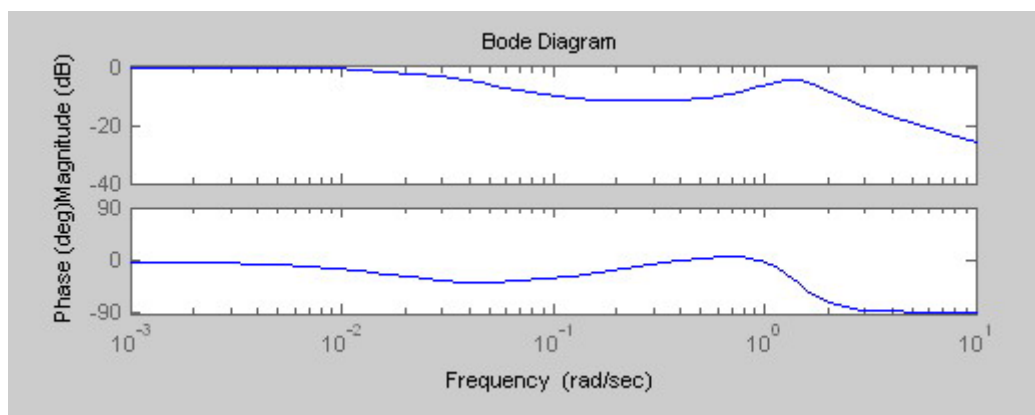


Diagrama de bode de la variación del parámetro  $T_i$ .

# Condiciones iniciales

---

Las condiciones iniciales nos sirven para someter a nuestra planta a un determinado régimen de trabajo, lo que hace que seamos capaces de simular dicha planta y ver qué ocurre con su respuesta. Todo esto sólo lo podemos hacer en el espacio de estados ya que es una ecuación diferencial a la que fácilmente podemos incluirle las condiciones iniciales mientras que en el dominio de Laplace deberíamos rehacer las ecuaciones diferenciales aplicando las propiedades pertinentes de Laplace y obtendríamos el resultado final.

Por regla general las condiciones iniciales me fijan el empezar antes o después con una determinada excitación. Para ver que hacen las condiciones iniciales lo vamos a aplicar a nuestro motor.

- Comencemos variando la condición de la posición angular con el motor de orden tres en posición. Lo que ocurre es que para  $t=0$  la posición es valor que nosotros demos a la condición y a partir de ahí comienza a subir la posición.
- Si variamos la condición de la velocidad angular lo que ocurre es que comenzamos con una determinada velocidad por lo que al principio alcanzaremos una posición más rápidamente que si la condición fuese cero.
- Con la condición de la corriente estamos obligando al motor a trabajar a un determinado régimen, ya que la excitación hace que el motor tenga mayor potencia y pueda como antes alcanzar una posición más rápidamente al principio, hasta que se estabiliza. Este efecto se nota menos que el de la posición angular o el de la velocidad angular.

Como conclusión, las condiciones iniciales sirven para ver qué ocurre en una situación concreta. Pero también podemos desprender que no todos los efectos de las condiciones iniciales son iguales, hay algunos que podemos despreciar y otros que son más importantes.

\*Esta simulación se ha realizado con el programa ci2.m

# Especificaciones

---

A la hora de establecer las especificaciones que debía cumplir nuestro sistema a controlar, primero empezamos discutiendo el tiempo de establecimiento. Para el cual hemos usado la fórmula que estaba en el documento “especificaciones.pdf”.

La función de transferencia de nuestro sistema a controlar es:

$$Y(s) = \frac{0.0311}{2.151 \cdot 10^{-5} \cdot s^2 + 0.001003 \cdot s}$$

El tiempo de establecimiento para un sistema de orden dos es de forma aproximada:

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \cdot \omega_0}$$

Si identificamos términos en la función de transferencia resulta que  $\zeta \cdot \omega_0 = 23.3147$  y por tanto  $T_s = 0.17156$  segundos. Por lo que a la vista de este resultado decidimos que el motor más los controladores deberían tener un tiempo de establecimiento de 200 ms, con algo de margen por si ocurriera algo.

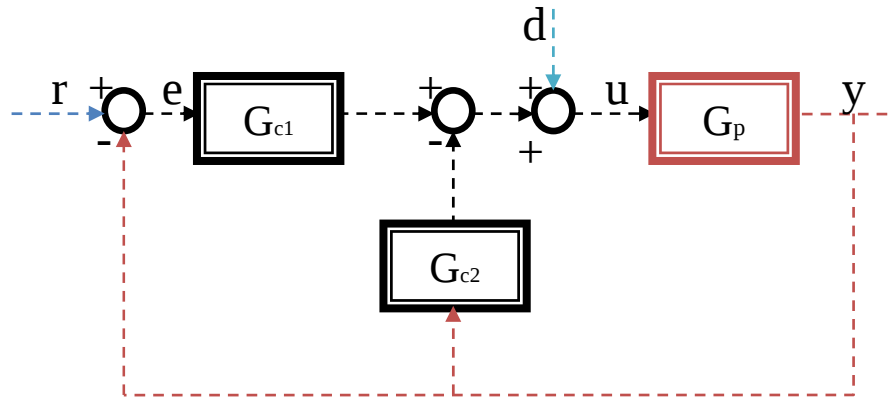
La siguiente especificación de la que hablamos fue la sobre-elongación. Para la que decidimos que debía tener un mínimo, para que funcionara debidamente el sistema, y un máximo para que no se fastidiara. Nuestros límites fueron entre un 5% y un 10%.

Por último exigimos al sistema que el error en régimen permanente al escalón, a la rampa y a la parábola fuesen nulos.

Todas estas cuestiones son abordadas más adelante en el desarrollo del diseño de controladores.

# Diseño de controlador del motor de orden 2

Sea el sistema de dos grados de libertad de la figura donde  $G_p(s)$  es nuestro motor.



Por simplificar definimos  $G_c = G_{c1} + G_{c2}$ , con lo que obtenemos que:

$$\frac{Y_D}{D} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p} \quad \frac{Y_R}{R} = \frac{G_p G_{c1}}{1 + G_c G_p}$$

Asumimos que  $G_c$  es un controlador de tipo PID de la forma:

$$G_c = \frac{K(s + \alpha)(s + \beta)}{s}$$

Para simular el motor  $G_p$  utilizamos la simulación en frecuencia del motor en posición en segundo orden adjunta (carpeta Motor del software).

$$G_p = \frac{K2}{s(JR \cdot s + K1K2 + BR)}$$

Sin embargo a partir de ahora vamos a suponer para simplificar.

$$G_p = \frac{m}{s(e \cdot s + o)}$$

Donde  $m = K2$ ,  $e = JR$  y  $o = K1K2 + BR$ . Con lo que:

$$\frac{Y_D}{D} = \frac{ms}{es^3 + (o + Km)s^2 + Km(\alpha + \beta)s + Km\alpha\beta}$$

$$\frac{Y_R}{R} = \frac{msG_{c1}}{es^3 + (o + Km)s^2 + Km(\alpha + \beta)s + Km\alpha\beta}$$

Ahora suponemos que los polos deseados son de la forma:

$$s = -a \pm j b$$

$$s = -c$$

Con lo que:

$$P(s) = (s + a + j b)(s + a - j b)(s + c) = s^3 + (2a + c)s^2 + (2ac + a^2 + b^2)s + c(a^2 + b^2)$$

Y de las ecuaciones anteriores sabemos que:

$$P(s) = es^3 + (o + Km)s^2 + Km(\alpha + \beta)s + Km\alpha\beta$$

Con lo que identificando obtenemos que:

$$K = \frac{e(2a + c) - o}{m}$$

$$(\alpha + \beta) = \frac{e(2ac + a^2 + b^2)}{Km}$$

$$(\alpha\beta) = \frac{ec(a^2 + b^2)}{Km}$$

Los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  se obtienen mediante el método de “prueba y error” para ello hemos utilizado el programa del anexo “calculaABC.m”. Obviamente hay un número infinito de valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  que cumplen nuestras especificaciones pero de todos los resultados posibles comparamos sólo los que se resumen en la siguiente tabla:

| $a$ | $b$ | $c$ | Ts (ms) | Mp (%) | MaxPerturb |
|-----|-----|-----|---------|--------|------------|
| 9.5 | 40  | 340 | 193     | 9.73   | 0.075      |
| 10  | 40  | 400 | 130     | 8.3    | 0.063      |
| 8   | 40  | 400 | 199     | 8.33   | 0.067      |
| 8   | 40  | 420 | 197     | 7.94   | 0.064      |
| 8   | 40  | 440 | 194     | 7.58   | 0.061      |

De todos estos valores bastante similares en cuanto a perturbación y sobreelongación nos quedamos con el segundo porque destaca su tiempo de establecimiento frente a los demás. Por tanto, los valores que cumplen nuestras especificaciones son:

$$a = 10, b = 40 \text{ y } c = 400$$

Con estos valores obtenemos (mediante el programa “prueba.m”):

$$K = 0.2582$$

$$(\alpha + \beta) = 25.9796$$

$$(\alpha\beta) = 1.8212e+3$$

$$G_c = \frac{0.2582s^2 + 6.708s + 470.2}{s}$$

A continuación determinamos  $G_{c1}$ , y  $G_{c2}$  en consecuencia para lo que sabemos que según el método de asignación de ceros, si seleccionamos los valores de éstos de tal  $N(s)$  sea igual a la suma de los tres últimos términos de  $D(s)$  el sistema no presentará errores en estado estacionario en respuesta a las entradas en escalón rampa y aceleración.

$$\frac{Y_R}{R} = \frac{(2a+c)s^2 + (2ac+a^2+b^2)s + c(a^2+b^2)}{s^3 + (2a+c)s^2 + (2ac+a^2+b^2)s + c(a^2+b^2)}$$

$$G_{c1} = \frac{e(2a+c)s^2 + e(2ac+a^2+b^2)s + ec(a^2+b^2)}{ms} = \frac{0.2904s^2 + 6.708s + 470.2}{s}$$

$$G_{c2} = G_c - G_{c1} = -0.03224s$$

$$\frac{Y_D}{D} = \frac{1466s}{s^3 + 420s^2 + 9700s + 680000}$$

$$\frac{Y_R}{R} = \frac{420s^2 + 9700s + 680000}{s^3 + 420s^2 + 9700s + 680000}$$

- Estudio para un motor con tolerancias.

Haciendo un cálculo aproximado de las tolerancias que presentan los componentes mediante observación directa de las especificaciones del motor las tolerancias se pueden aproximar por:

$$J = (39.4..43.8..48.1) \cdot 10^{-7}; \text{ Tolerancia del 10 \%}$$

$$B = (3.62) \cdot 10^{-7}; \text{ Tolerancia del 8 \%}$$

$$K1 = (29.6..32.18..34.75) \cdot 10^{-3}; \text{ Tolerancia del 8 \%}$$

$$K2 = (29.6..32.18..34.75) \cdot 10^{-3}; \text{ Tolerancia del 8 \%}$$

$$R = (4.52..4.91..5.29); \text{ Tolerancia del 8 \%}$$

$$L = (593.7..742.2..830.6) \cdot 10^{-6}; \text{ Tolerancia del 20 \%}$$

Veamos los resultados de las distintas simulaciones a partir de los programas “motor2pf\_tolerancias.m” y “prueba\_gen.m”:

| Mp   | Ts  | Máxima Perturbación |
|------|-----|---------------------|
| 9.42 | 187 | 0.0631              |
| 8.96 | 131 | 0.0629              |
| 8.11 | 130 | 0.0625              |
| 7.81 | 129 | 0.0624              |
| 9.07 | 132 | 0.063               |
| 8.68 | 133 | 0.0628              |
| 8.22 | 130 | 0.063               |
| 8.26 | 131 | 0.0623              |
| 8.49 | 133 | 0.0627              |

Como se puede observar en la tabla, nuestro estudio con la simplificación de que no había tolerancias es correcto ya que todos estos valores se encuentran dentro de los márgenes establecidos por nuestras especificaciones.

# Estudio del controlador diseñado para un motor orden 3

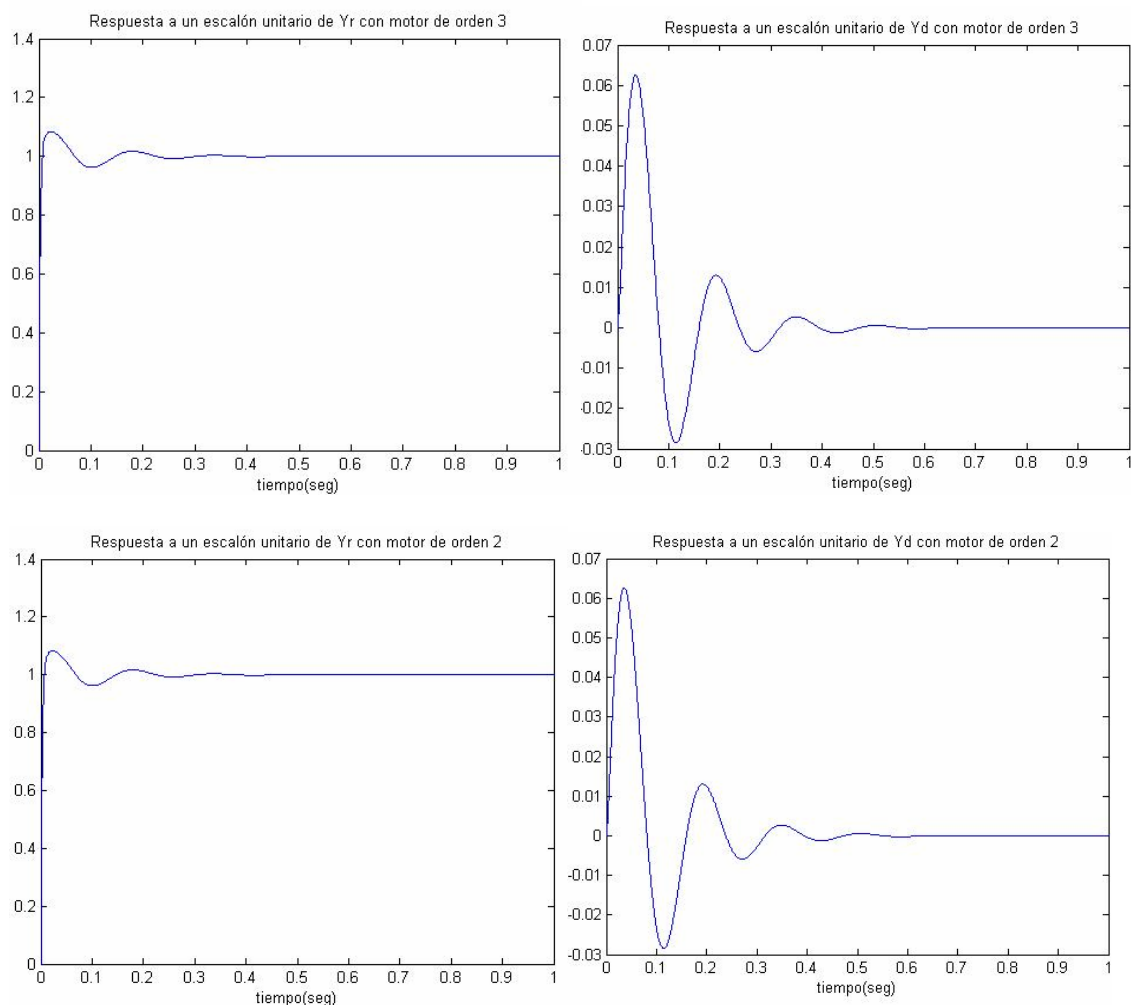
En este punto simulamos el motor de orden 3 con los parámetros que hemos hallados para el motor de orden 2 en el apartado anterior. Los resultados de la simulación de este sistema (utilizando prueba\_gen.m y motor3pf.m) son los siguientes:

Tiempo de establecimiento: 129 ms

Sobreelongación: 8.32 %

Máxima perturbación: 0.0626

Estos valores también verifican nuestras especificaciones con lo que el diseño ha sido bueno incluso utilizando los controladores del motor de orden 2.



# Error en régimen permanente

---

Para ello lo primero que hay que hacer es calcular la función error.

$$\text{El error lo podemos escribir como } E = R(1 - \frac{Y_R}{R}) = R \frac{1 + C_{c2}G}{1 + G_c G}$$

Esto también lo podemos escribir como  $E = \frac{Z - P}{P} R$ , donde  $r$  es la señal de referencia,  $Z$  el numerador de  $\frac{Y_R}{R}$ , y  $P$  el denominador de  $\frac{Y_R}{R}$ . Si  $P(0) \neq 0$ , para que el error sea 0, aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sE(s)) = 0 \text{ Cuando } s \text{ tienda a } 0.$$

En nuestro caso, hemos diseñado el sistema para que el error al escalón, la rampa y la parábola tiendan a 0. Eso lo hemos hecho consiguiendo haciendo que  $P - Z = s^3$ . Por tanto

$$E = \frac{s^3}{s^3 + b \cdot s^2 + c \cdot s + d}$$

Si la entrada es un escalón unitario, es decir,  $1/s$ , por el teorema del valor final

$$\lim(sE(s)) = \lim s \cdot \frac{s^3}{s^3 + b \cdot s^2 + c \cdot s + d} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

Si la entrada es una rampa, es decir,  $1/s^2$ , por el teorema del valor final

$$\lim(sE(s)) = \lim s \cdot \frac{s^3}{s^3 + b \cdot s^2 + c \cdot s + d} \cdot \frac{1}{s^2} = 0$$

Si la entrada es una parábola, es decir,  $1/s^3$ , por el teorema del valor final

$$\lim(sE(s)) = \lim s \cdot \frac{s^3}{s^3 + b \cdot s^2 + c \cdot s + d} \cdot \frac{1}{s^3} = 0$$

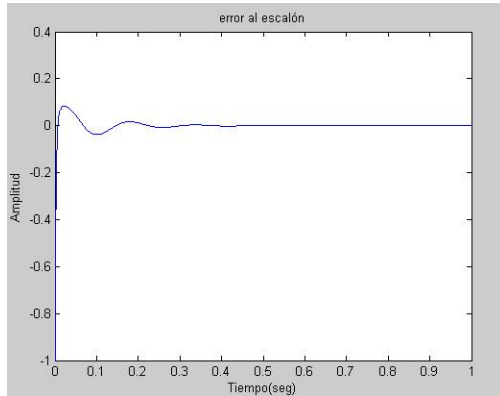
Si la entrada es  $t^3$ , es decir,  $1/s^4$ , por el teorema del valor final

$$\lim(sE(s)) = \lim s \cdot \frac{s^3}{s^3 + b \cdot s^2 + c \cdot s + d} \cdot \frac{1}{s^4} = \frac{1}{d}$$

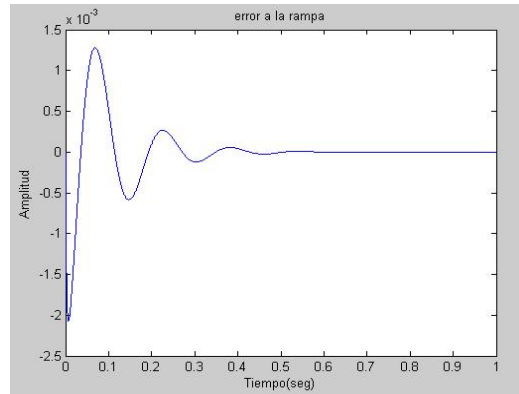
Si la entrada es  $t^4$  o superior, es decir,  $1/s^5$  o superior, por el teorema del valor final

$$\lim(sE(s)) = \lim s \cdot \frac{s^3}{s^3 + b \cdot s^2 + c \cdot s + d} \cdot \frac{1}{s^5} = \infty$$

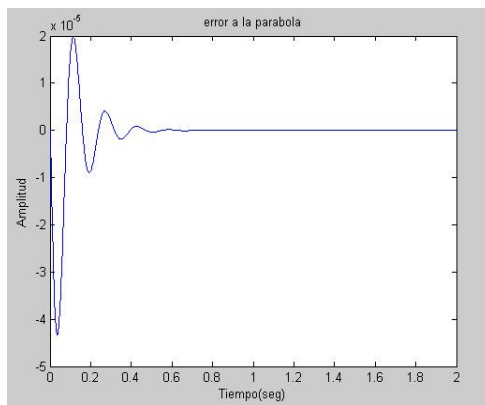
Vamos ahora a comprobar los resultados simulando el sistema.



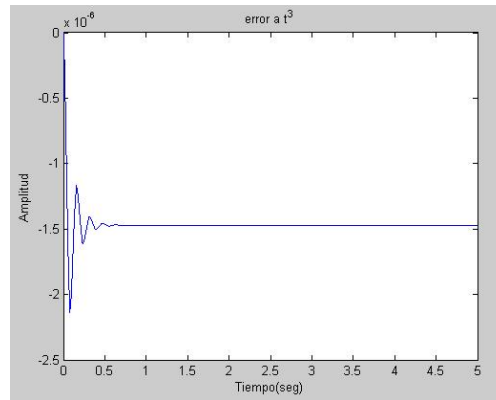
Error al escalón



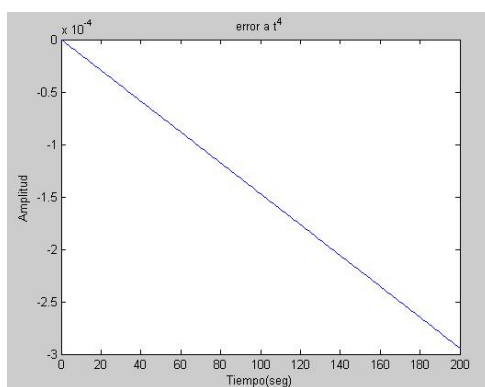
Error a la rampa



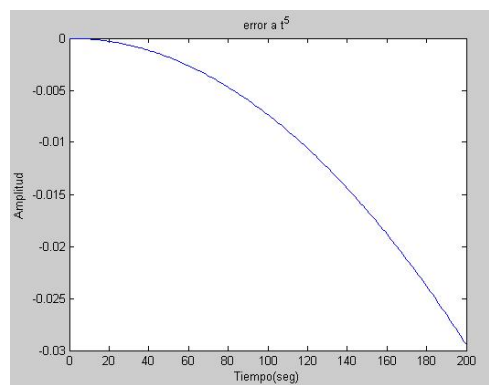
Error a la parábola



Error a  $t^3$



Error a  $t^4$



Error a  $t^5$

# Estudio con controladores causales

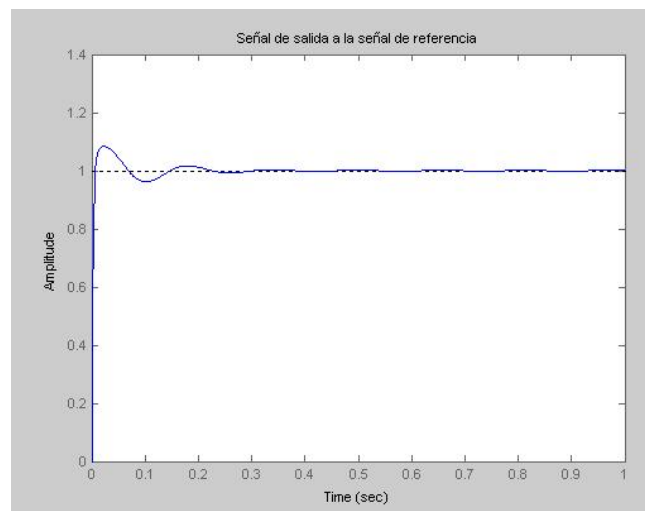
Ahora vamos a estudiar el sistema con controladores causales, es decir, que al menos el grado del denominador de los controladores sea igual del denominador (para respuesta instantánea). Para ello vamos a simular los siguientes controladores.

$$G_{c1} = \frac{0.2582 \cdot s^2 + 6.708 \cdot s + 470.2}{s \cdot (a \cdot s + 1)}$$

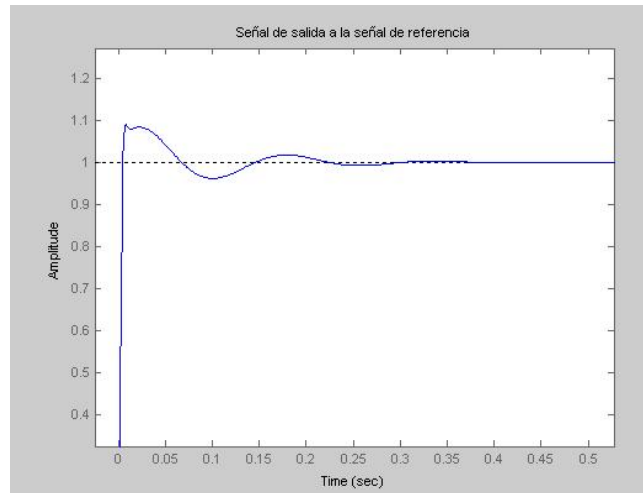
$$G_{c2} = \frac{-0.03224 \cdot s}{(s \cdot b + 1)}$$

Para ello primero probaremos con  $b=0$  e iremos variando  $a$  para ver el efecto de tanto en la señal como en la perturbación que tiene que  $G_{c1}$  sea un controlador causal (y con un polo en  $-\frac{1}{a}$ ).

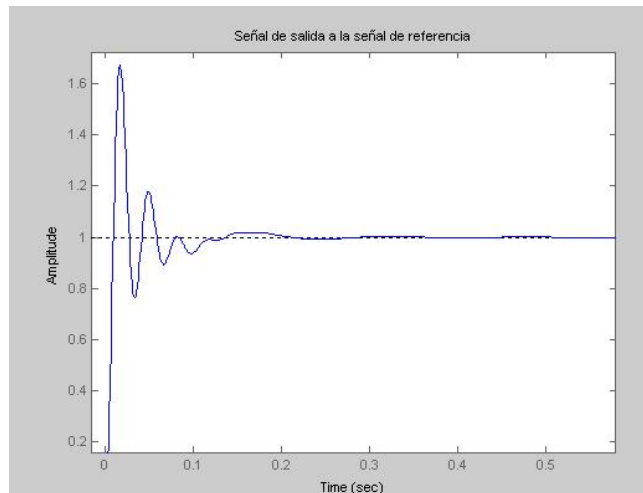
1- Si  $a$  es muy pequeño, no hay prácticamente diferencia entre el caso con controladores anticausales. A continuación mostramos el ejemplo para  $a = 10^{-4}$



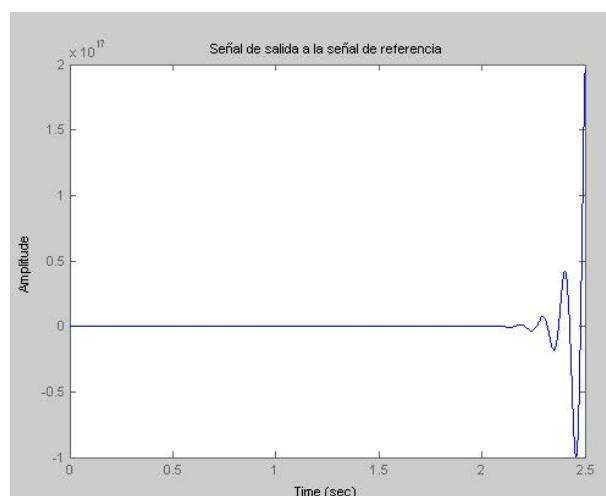
2- Siendo  $a$  pequeño, pero  $10^{-3}$ , pese a que no hay diferencias en régimen permanente, comienza a ser apreciable.



3- Si seguimos aumentando  $a$ , l con  $a = 10^{-2}$ , notamos que se altera bastante la respuesta en régimen transitorio, cosa que afecta a la sobre-elongación y el tiempo de establecimiento.



4- Finalmente, si aumentamos más  $a$ ,  $a=10^{-1}$  el sistema se convierte en inestable.

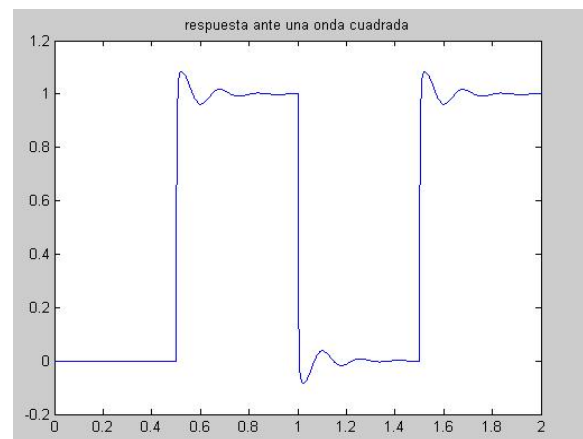
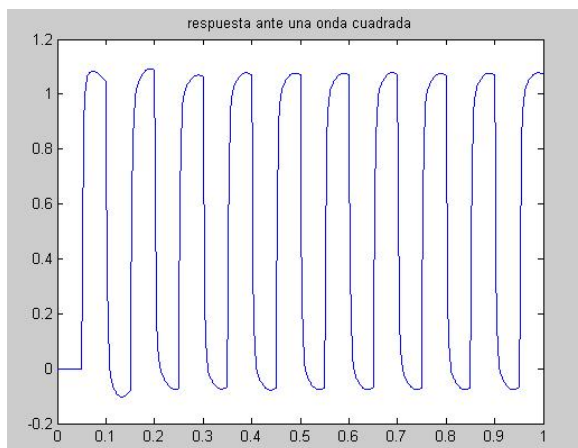


Ahora vamos a probar con  $a=0$  y variando  $b$ . Al simularlo hemos comprobado que no hay diferencias significativas en las repuestas, tanto a la perturbación  $a$  como a la referencia.

# Estudio al variar R en régimen permanente y transitorio

---

Para ello vamos a considerar dos casos particulares: la entrada de un pulso periódico cuyo periodo es bastante mayor que el tiempo de establecimiento y otro caso en el que ocurra que el periodo sea similar al tiempo de establecimiento.

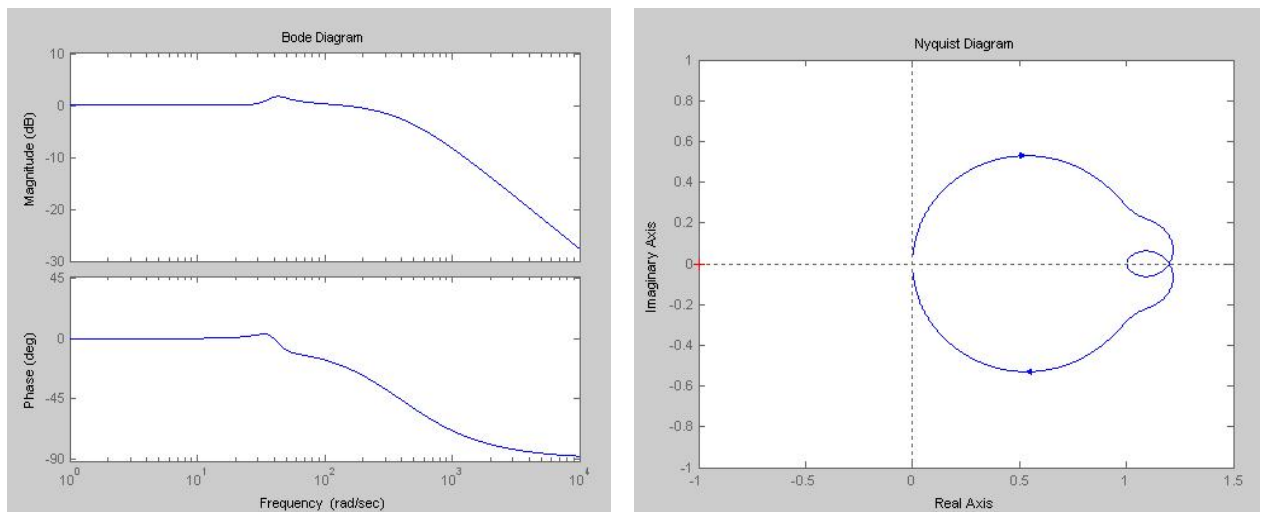


Como podemos observar, en el primer caso, al ser el periodo del pulso mucho menor la señal oscila entre -0.1 y 1.1. Esto se debe a que el sistema está constantemente en régimen transitorio. Sin embargo, en el segundo sistema, al ser el periodo bastante mayor, al sistema le da tiempo a estabilizarse, llegando a anularse el error en algunos momentos.

# Estudio de los diagramas de Bode y Nyquist

---

A continuación vamos a estudiar tanto el diagrama de bode como el diagrama de Nyquist de sistema:



Como podemos ver el sistema es estable, puesto que sus polos son estables y el diagrama de Nyquist no engloba el punto  $(-1,0)$ . También lo podemos ver en el diagrama de Bode, ya que nunca llega la fase a valer  $-180^\circ$ .

También podemos observar que en el diagrama de bode tiene una especie de pico entorno a 400. Esto es debido a que cercanas a esta posición se encuentran dos ceros complejos conjugados y dos polos complejos conjugados.

# Conclusiones

---

- Matlab mantiene toda la información sobre el espacio de estados, pero pierde algo de información en Laplace.
- El simplificar el motor de orden 3 a orden 2 no tiene diferencias significativas.
- Las conclusiones sacadas del estudio de los tipos de controlador, es que depende del sistema a controlar la efectividad de estos. Los de tipo PID al ser una combinación de los otros sirven para controlar los mismos sistemas que puedes controlar con un P, un PI o un PD, y respecto al resto, dependerá de la función de transferencia y de la complejidad que queramos para el diseño del circuito, que sea conveniente el uso de uno u otro.
- El diseño cumple con las especificaciones propuestas ( $M_p$ , tiempo de establecimiento, eliminación del error frente a escalón, rampa y parábola).
- A la hora de implementar el sistema, hay que tener cuidado, ya que una mala implementación puede hacer que el sistema no cumpla con las especificaciones (incluso puede desestabilizarse).
- Si queremos introducir una referencia hay que procurar que el cambio de esa referencia sea más lento que el tiempo de establecimiento puesto que si no vamos a tener un error razonable.

# Bibliografía

---

En cuanto a las fuentes en las que nos hemos apoyado para realizar este trabajo han sido:

- “Ingeniería de control moderna” de Katshuhiko Ogata, 4ª Edición.
- Documentos facilitados en la página web de la asignatura: “Matlab intro.pdf”, “Características maxon.pdf” y “especificaciones.pdf”.
- Hemos usado la página web <http://usuarios.lycos.es/automatica/Temario.htm> como guía en algunos ejemplos, y desarrollos.
- Documentos encontrados sobre controladores y espacio de estados en diferentes páginas web tales como:
  - [http://matematicas2007tecoaxaca.blogdiario.com/img/Curso\\_rapido\\_de\\_matlab\\_7.pdf](http://matematicas2007tecoaxaca.blogdiario.com/img/Curso_rapido_de_matlab_7.pdf)
  - [http://www.ib.cnea.gov.ar/~control2/Links/Tutorial\\_Matlab\\_es\\_p/RLpitch.html](http://www.ib.cnea.gov.ar/~control2/Links/Tutorial_Matlab_es_p/RLpitch.html)
- Tutoriales de Matlab relacionados con el tema de control.