

Introducción a los Sistemas Electrónicos de Control

Félix Monasterio-Huelin & Álvaro Gutiérrez

24 de enero de 2020

Índice

Índice	1
Índice de Figuras	1
1. Objetivos de los Sistemas de Control Realimentado	2
2. El problema del muestreo	4
3. Señales de referencia causales	4
4. Función de transferencia y polinomio de condiciones iniciales	5
5. Significado físico de ceros y polos	7
6. Función de transferencia de lazo cerrado	9
A. Ecuaciones diferenciales y en diferencias lineales de primer orden	12
B. Discretización exacta de una ecuación diferencial lineal de primer orden	14
C. Tabla de transformadas $\mathcal{L}_-$ y $\mathcal{Z}$	15
D. Tabla de propiedades de las transformadas de Laplace unilateral y $\mathcal{Z}$	16

Índice de Figuras

1.1. Ejemplos de estructuras de Control (a) en lazo abierto y (b) lazo cerrado.	2
1.2. Ejemplo de respuesta al escalón unidad de un sistema de segundo orden.	2
1.3. Sistemas de control con perturbación a la entrada del sistema a controlar.	3
6.1. Estructura de Control de Lazo Directo Continuo.	9
6.2. Estructura de Control de Lazo Directo Discreto.	9
6.3. Estructura de Control de Lazo Directo Híbrido.	9

1. Objetivos de los Sistemas de Control Realimentado

Sea $G(s)$ la función de transferencia de un sistema continuo a controlar y $G_c(s)$ la función de transferencia de un controlador continuo que pretende satisfacer ciertas condiciones de diseño. Se define un sistema en lazo abierto como aquel en el que la salida ($y(t)$) no tiene efecto sobre la señal de control ($u(t)$) (ver Figura 1.1a). Un sistema en lazo cerrado es aquel en el que la salida es realimentada y tiene efecto sobre la señal de control.

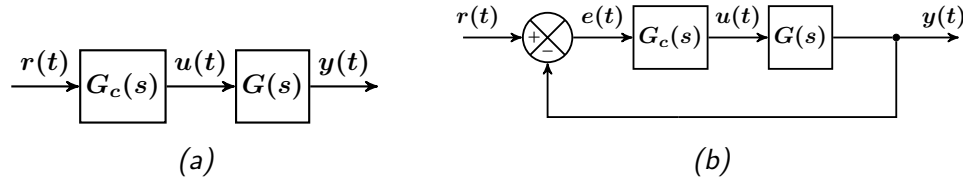


Figura 1.1: Ejemplos de estructuras de Control (a) en lazo abierto y (b) lazo cerrado.

La finalidad de los sistemas de control es diseñar un controlador que cumpla unos objetivos concretos. Estos objetivos pueden ser muy diversos, pero hay uno de carácter cualitativo que suele ser inexcusable: **el sistema de control debe ser estable**.

Además, existen tres objetivos típicos que son la base del diseño de controladores:

1. **Problema de satisfacción de especificaciones de régimen permanente.** Las especificaciones de régimen permanente se definen tendencialmente, es decir como $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$, donde $e(t) = r(t) - y(t)$ es la señal de error y $r(t)$ la señal de referencia, siendo ésta el valor deseado a la salida.

Sin embargo, en la práctica se considera que se ha entrado en el régimen permanente cuando $t \geq t_s$ y el valor de $|y(t)| \leq \nu$ siendo ν una **tolerancia** expresada normalmente en tanto por ciento de la señal de referencia $r(t)$. En consecuencia, llamaremos **tiempo de establecimiento** t_s al instante de tiempo que separa el régimen transitorio del régimen permanente. En la Figura 1.2 se muestra la respuesta a una señal escalón unidad de un sistema de segundo orden concreto, donde se observa gráficamente la definición del tiempo de establecimiento.

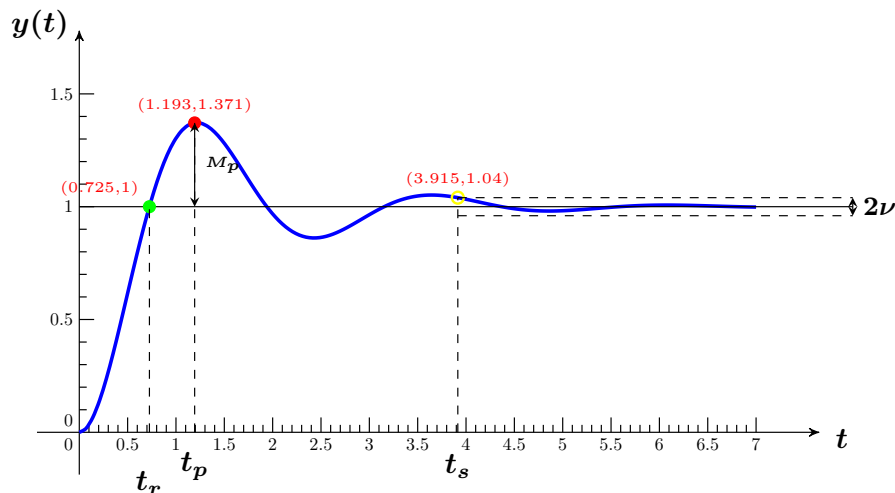


Figura 1.2: Ejemplo de respuesta al escalón unidad de un sistema de segundo orden.

Dada su naturaleza, este tipo de objetivos se suele denominar también el problema de seguimiento de una señal de referencia o de un conjunto de señales de referencia. La señal de error $e(t)$ debe tender a cero cuando $t \rightarrow \infty$, al menos para una señal de referencia específica.

Téngase en cuenta que el tiempo de establecimiento se considera una especificación de régimen transitorio.

2. **Problema de satisfacción de especificaciones de régimen transitorio.** La Figura 1.2 muestra las principales características a tener en cuenta en el régimen transitorio de un sistema de segundo orden:
- **Tiempo de establecimiento** (t_s), siendo el tiempo que separa el régimen transitorio del régimen permanente.
 - **Sobreeelongación máxima** (M_p), siendo el máximo valor que alcanza la salida del sistema, en caso de que el sistema sea estable.
 - **Tiempo de pico** (t_p), el instante de tiempo en el que la señal de salida adquiere su máximo valor.
 - **Tiempo de subida** (t_r), el instante de tiempo en el que la señal de salida se cruza por primera vez con la señal de referencia.
3. **Problema de supresión de la perturbación** (a la entrada del sistema a controlar), $w(t)$. Este problema consiste en lograr que la perturbación de entrada ($w(t)$ en la Figura 1.3) no afecte a la salida del sistema a controlar en el régimen permanente, al menos cuando $t \rightarrow \infty$.

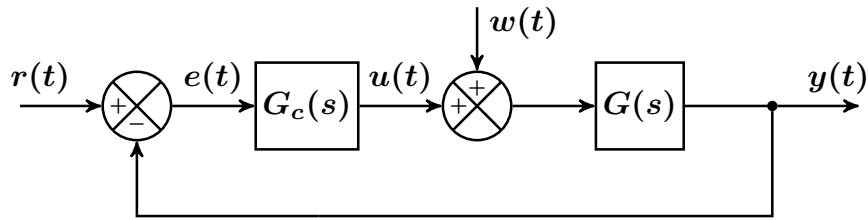


Figura 1.3: Sistemas de control con perturbación a la entrada del sistema a controlar.

El problema de supresión de perturbaciones a la entrada del sistema a controlar suele entrar en conflicto con el problema de seguimiento de señales de referencia. Sin embargo es posible resolver ambos problemas utilizando **estructuras de control de dos grados de libertad**. El concepto de grado de libertad se refiere precisamente a la capacidad de un sistema de control realimentado de poder resolver independientemente el problema de seguimiento de señales de referencia y el problema de supresión de perturbaciones.

Visto desde esta perspectiva, los sistemas de control realimentado que se estudiarán constan de dos entradas: $r(t)$ y $w(t)$, y una única salida $y(t)$.

Supondremos también que cualquier subsistema es lineal, por lo que se cumplirá el **principio de superposición**. Este hecho permite contemplar la salida como la suma de dos salidas:

$$y(t) = y_r(t) + y_w(t) \quad (1.1)$$

siendo $y_r(t)$ la salida del sistema cuando $w(t) = 0$, e $y_w(t)$ la salida del sistema cuando $r(t) = 0$.

El problema de supresión de la perturbación consiste en lograr que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_w(t) = 0 \quad (1.2)$$

y el problema de seguimiento de una señal de referencia consiste en lograr que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = r(t) \quad (1.3)$$

Será importante tener en cuenta que las especificaciones de régimen transitorio afectan a la forma en que se logra resolver el problema de supresión de perturbaciones.

2. El problema del muestreo

En la mayoría de los problemas de control, el sistema que debe controlarse es un **sistema de tiempo continuo** t mientras que el controlador, o parte de él es un sistema de tiempo discreto digital. Normalmente los sistemas de control se diseñan de tal forma que los controladores discretos sean **sistemas muestreados** con un mismo **periodo de muestreo** $T \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$t = kT \quad (2.1)$$

donde k es el índice temporal entero positivo o nulo, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ o $k \geq 0$.

Como consecuencia es necesario aplicar técnicas que permitan combinar **sistemas de tiempo híbrido**. Pueden adoptarse dos perspectivas de diseño:

1. discretizar el sistema a controlar y diseñar un controlador muestreado o
2. diseñar controladores de tiempo continuo y posteriormente discretizarlos para su implementación.

En cualquier caso se supondrá que el periodo de muestreo T es constante para cualquier parte del sistema de control.

3. Señales de referencia causales

Consideraremos tres clases de señales de referencia causales continuas: monómicas, exponenciales y sinusoidales. En esta sección nos centramos en las monómicas y su definición de causalidad.

En la práctica, las señales de referencia reales serán combinaciones lineales de ellas (como por ejemplo señales polinómicas), generalmente diseñadas para que sean funciones suaves (derivables en todos sus puntos). Sin embargo es también común diseñar estas señales con puntos no derivables, como por ejemplo señales de perfil trapezoidal o señales de pulsos periódicos.

Las señales de referencia en los sistemas de control muestreados serán discretizaciones de sus correspondientes señales continuas.

Sea $r_0(t)$ la función escalón unidad

$$r_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

La función escalón unidad discreta $r_0(kT)$, que en adelante escribiremos por comodidad de notación como $r_0(k)$, será entonces

$$r_0(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Si una función $f(t)$ es causal debe escribirse como $f(t)r_0(t)$,

$$f(t)r_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Lo mismo debe decirse de su discretización $f(k)$,

$$f(k)r_0(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ f(k) & k \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Por ejemplo la función rampa causal de pendiente unidad $r_1(t)$ puede escribirse como

$$r_1(t) = tr_0(t) \quad (3.5)$$

Y lo mismo para la rampa discretizada:

$$r_1(k) = kTr_0(k) \quad (3.6)$$

En general las señales de referencia monómicas tendrán la forma

$$\begin{aligned} r_i(t) &= \frac{1}{i!} t^i r_0(t) \\ r_i(k) &= \frac{1}{i!} (kT)^i r_0(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $i \in \{1, 2, \dots\}$ e $i!$ representa el factorial de i , $i! = i(i-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

4. Función de transferencia y polinomio de condiciones iniciales

Definimos la función de transferencia de un sistema lineal como la relación entre la salida y la entrada en el dominio complejo bajo condiciones iniciales nulas.

Por ejemplo, sea un sistema representado por la siguiente ecuación diferencial lineal causal de primer orden:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b_0 \dot{u}(t) + b_1 u(t) \quad (4.1)$$

donde $a, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ y $b_0 \neq 0$.

Aplicando la Transformada de Laplace $\mathcal{L}_-$

$$(s + a)Y(s) - y(0^-) = (b_0 s + b_1)U(s) - b_0 u(0^-) \quad (4.2)$$

Despejando $Y(s)$,

$$Y(s) = G(s)U(s) + \frac{T(s)}{s + a} \quad (4.3)$$

donde $G(s)$ es la función de transferencia del sistema dado por la ecuación diferencial 4.1 y $T(s)$ es el polinomio de condiciones iniciales,

$$G(s) = \frac{b_0 s + b_1}{s + a} \quad (4.4a)$$

$$T(s) = y(0^-) - b_0 u(0^-) \quad (4.4b)$$

Al valor o valores del número complejo $s \in \mathbb{C}$ que anula la función de transferencia $G(s)$ se les denomina **ceros del sistema**, y a los que la hacen infinita se les denomina **polos del sistema**. En general pueden existir polos en el infinito, es decir $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$.

Se denomina **orden del sistema** al número de polos, **orden relativo del sistema** a la diferencia entre el número de polos y el número de polos en el origen, $s = 0$.

La función de transferencia dada por 4.4a no tiene polos en el infinito. Esto ocurre siempre que el orden relativo del sistema es nulo.

El sistema representado por 4.1 tiene un polo y un cero:

$$c = -\frac{b_1}{b_0} \quad (4.5a)$$

$$p = -a \quad (4.5b)$$

El orden es la unidad, el orden relativo es nulo y el tipo es nulo para $a \neq 0$ o la unidad si $a = 0$.

La función de transferencia de un sistema discreto se define de manera similar. Por ejemplo, sea un sistema representado por la siguiente ecuación en diferencias lineal causal de primer orden:

$$y(k+1) + ay(k) = b_0 u(k+1) + b_1 u(k) \quad (4.6)$$

donde $a, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ y $b_0 \neq 0$.

Aplicando la Transformada $\mathcal{Z}$ y despejando $Y(z)$,

$$Y(z) = G(z)U(z) + \frac{zT(z)}{z + a} \quad (4.7)$$

donde $G(z)$ es la función de transferencia del sistema dado por la ecuación en diferencias 4.6 y $T(z)$ es el polinomio de condiciones iniciales,

$$G(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z + a} \quad (4.8a)$$

$$T(z) = y(0) - b_0 u(0) \quad (4.8b)$$

Los ceros y polos del sistemas son el valor o valores de $z \in \mathbb{C}$ que anulan y hacen infinito respectivamente la función de transferencia.

El orden del sistema y el orden relativo del sistema discreto se definen exactamente igual que en el caso continuo, pero el tipo del sistema es el número de polos en $z = 1$.

La ecuación en diferencias dada por 4.6 no es la discretización de la ecuación diferencial dada por 4.1. En lo que sigue escribiremos $G_D(z)$ cuando se trate de la función de transferencia discretizada de la función de transferencia continua $G(s)$, sea cual sea la técnica que se utilice para la discretización.

La función de transferencia de la ecuación diferencial estrictamente causal dada por

$$\dot{y}(t) + ay(t) = br_0(t) \quad (4.9)$$

con la condición inicial $y(0^-)$ y $a, b, y(0^-) \in \mathbb{R}$ y la de su discretización exacta

$$y(k+1) - a_D y(k) = b_D r_0(k) \quad (4.10)$$

con la condición inicial $y(0)$ y $a, b, y(0) \in \mathbb{R}$, vienen dadas por:

$$G(s) = \frac{b}{s + a} \quad (4.11a)$$

$$G_D(z) = \frac{b_D}{z - a_D} \quad (4.11b)$$

donde a_D y b_D siguen las relaciones B.4,

$$a_D = e^{-aT} \quad (4.12a)$$

$$b_D = \frac{b(1 - a_D)}{a} \quad (4.12b)$$

En este caso el sistema es de orden y orden relativo la unidad. Además tiene un cero en el infinito. Si $a = 0$ entonces $a_D = 1$ por lo que también se conserva el tipo del sistema al discretizar de manera exacta la ecuación diferencial.

Las funciones de transferencia de los sistemas lineales son funciones racionales de dos polinomios en s o en z , por lo que en el caso continuo pueden escribirse en la forma

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.13)$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios en s . Al polinomio $D(s)$ se le suele llamar polinomio característico.

En el caso discreto,

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (4.14)$$

donde $N(z)$ y $D(z)$ son polinomios en z . Al polinomio $D(z)$ se le suele llamar polinomio característico.

Los ceros del sistema son las soluciones de la ecuación:

$$N(s) = 0 \quad (4.15a)$$

$$N(z) = 0 \quad (4.15b)$$

Como se ha dicho también puede haber ceros en el infinito.

Los polos del sistema son las soluciones de la ecuación característica:

$$D(s) = 0 \quad (4.16a)$$

$$D(z) = 0 \quad (4.16b)$$

No puede haber polos en el infinito ya que suponemos que el sistema es causal, por lo que el número de polos siempre será mayor o igual que el número de ceros.

En lo que sigue supondremos que el sistema no tiene polos y ceros comunes. Diremos que los polinomios del numerador y del denominador son coprimos.

5. Significado físico de ceros y polos

En la Sección 4 se ha visto que la salida de un sistema puede expresarse en función de la función de transferencia y del polinomio de condiciones iniciales. Aunque ahí se dedujo para el caso particular de un sistema de primer orden causal, las relaciones dadas por 4.3 y 4.7 pueden generalizarse para cualquier sistema de orden n . El caso general quedaría en la forma

$$Y(s) = G(s)U(s) + \frac{T(s)}{D(s)} \quad (5.1a)$$

$$Y(z) = G(z)U(z) + \frac{zT(z)}{D(z)} \quad (5.1b)$$

donde $D(s)$ y $D(z)$ son los polinomios característicos de $G(s)$ y $G(z)$ respectivamente.

En la Sección 4 se han definido los ceros y los polos de manera formal, pero nos interesa darles una interpretación física. Por un lado conviene saber que las unidades de los ceros y los polos son las de tiempo⁻¹, y por eso suele hablarse de ellos como de frecuencias.

Una de las razones por las que conviene entender que los ceros y polos tienen un significado físico es porque, en ocasiones, es necesario realizar experimentos de laboratorio para estimarlos.

En cuanto a **los ceros**, suele decirse que si el sistema es excitado con una señal que contenga la frecuencia de alguno de los ceros, la salida será nula. Sin embargo, esto no es completamente cierto ya que la salida solo será nula bajo ciertas condiciones iniciales.

Si los ceros de la función de transferencia son reales, la señal de excitación debe ser una exponencial, y si los ceros son complejos conjugados debe ser una señal sinusoidal.

En cuanto a **los polos**, el problema experimental es más complejo, dado que las salidas infinitas no se pueden medir. Sin embargo, los polos pueden caracterizarse porque es posible obtener una salida $y(t)$ no nula cuando la entrada $u(t)$ es idénticamente nula. Por un lado se cumple la definición formal de que los polos hacen infinita la función de transferencia, y por otro lado se logra una interpretación física de los polos.

En cuanto al **significado físico de los ceros**, puede demostrarse (Teorema de los Ceros) que cuando la entrada $u(t)$ es una exponencial de la forma

$$u(t) = e^{ct} \quad (5.2)$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y el sistema no tiene polos en $s = c$, la ecuación 5.1a puede escribirse en la forma

$$Y(s) = \frac{G(c)}{s - c} + \frac{T(s) + Q(s)}{D(s)} \quad (5.3)$$

donde $Q(s)$ es un polinomio que resulta de desarrollar en fracciones simples la expresión $\frac{G(s)}{s - c}$, es decir que

$$\frac{G(s)}{s - c} = \frac{\alpha_0}{s - c} + \frac{Q(s)}{D(s)} \quad (5.4)$$

El coeficiente $\alpha_0 = G(c)$, ya que $N(s) = \alpha_0 D(s) + Q(s)(s - c)$. Puesto que $s = c$ no es un polo del sistema, $D(c) \neq 0$.

La expresión 5.3 indica que si se eligen las condiciones iniciales de tal forma que $T(s) = -Q(s)$ (identificación de coeficientes de los polinomios) entonces $Y(s) = 0$ si $s = c$ es un cero del sistema, es decir si $G(c) = 0$.

Como ejemplo, podemos escoger el sistema de primer orden causal representado por la ecuación diferencial 4.1. En la Sección 4 se ha visto que la salida puede escribirse como

$$Y(s) = \frac{b_0 s + b_1}{s + a} \frac{1}{s - c} + \frac{y(0^-) - b_0 u(0^-)}{s + a} \quad (5.5)$$

Expresando 5.5 en la forma de la ecuación 5.3,

$$Y(s) = \frac{G(c)}{s - c} + \frac{q_0 + y(0^-) - b_0 u(0^-)}{s + a} \quad (5.6)$$

donde $Q(s) = q_0 = \frac{ab_0 - b_1}{c + a}$.

Haciendo

$$y(0^-) = -\frac{ab_0 - b_1}{c + a} + b_0 u(0^-) \quad (5.7)$$

se obtiene que

$$Y(s) = \frac{G(c)}{s - c} \quad (5.8)$$

por lo que si $c = -\frac{b_1}{b_0}$, es decir es un cero del sistema, entonces $G(c) = 0$ y de aquí que $Y(s) = 0$, y por tanto $y(t) = 0$ con una entrada exponencial. En este caso, al sustituir el valor de c en 5.7, $y(0^-) = b_0(u(0^-) - 1)$.

El caso discreto se estudiaría de la misma forma, para una entrada exponencial como la siguiente:

$$u(k) = \beta^k \quad (5.9)$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$.

En cuanto al **significado físico de los polos**, puede demostrarse (Teorema de los Polos) que para una entrada nula $u(t) = 0$ (y todas sus derivadas) existen condiciones iniciales para las cuales

$$y(t) = C e^{pt} \quad (5.10)$$

donde p es un polo del sistema y C es una constante.

Puesto que $U(s) = 0$, la expresión 5.1a queda en la forma

$$Y(s) = \frac{T(s)}{D(s)} \quad (5.11)$$

Puesto que p es un polo del sistema, entonces es solución de la ecuación característica $D(s) = 0$, por lo que existirá un polinomio único $\tilde{D}(s)$ tal que

$$D(s) = \tilde{D}(s)(s - p) \quad (5.12)$$

Desarrollando en fracciones simples $\frac{T(s)}{D(s)}$, se puede escribir como

$$Y(s) = \frac{\alpha_0}{s - p} + \frac{Q(s)}{\tilde{D}(s)} \quad (5.13)$$

donde $\alpha_0 \neq 0$ y $Q(s)$ es un polinomio en s .

Haciendo

$$Q(s) = 0 \quad (5.14a)$$

$$T(s) = \alpha_0 \tilde{D}(s) \quad (5.14b)$$

se obtienen, identificando los coeficientes de los polinomios, las condiciones iniciales para las cuales

$$Y(s) = \frac{\alpha_0}{s - p} \quad (5.15)$$

por lo que se cumple que la salida es exponencial y dada por 5.10 para $C = \alpha_0$.

Este resultado indica que para una entrada idénticamente nula es posible obtener una salida que muestra cada polo excitado por separado para ciertas condiciones iniciales. Desde un punto de vista experimental, no obstante, no es sencillo lograr imponer condiciones iniciales a un sistema. Este resultado es fundamentalmente teórico, pero nos informa sobre el significado físico de los polos, en cuanto a que son frecuencias que pueden excitarse independientemente de la entrada al sistema.

El caso discreto se estudiaría de forma similar.

En lo anterior se ha tenido en cuenta que los ceros y los polos son simples y reales, pero puede llegarse a conclusiones similares si son múltiples o complejos.

6. Función de transferencia de lazo cerrado

Definimos la **función de transferencia de lazo cerrado** de un sistema de control lineal como la relación entre la salida $y(t)$ o $y(k)$ y la señal de referencia $r(t)$ o $r(k)$ en el dominio complejo bajo condiciones iniciales nulas. La escribiremos como $H(s)$ o $H(z)$ según que el sistema sea continuo o discreto.

El diseño de sistemas de control exige definir su estructura. En las Figuras 6.1 y 6.2 se muestra el esquema de bloques de una estructura en la que el controlador se sitúa en el lazo directo. La llamaremos **estructura de control de lazo directo**. La función de transferencia del controlador la escribiremos como $G_c(s)$ o $G_c(z)$ según sea continuo o discreto.

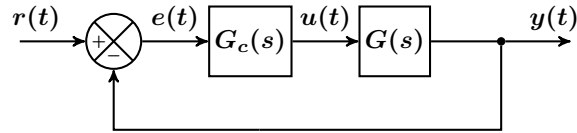


Figura 6.1: Estructura de Control de Lazo Directo Continuo.

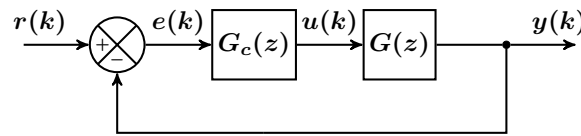


Figura 6.2: Estructura de Control de Lazo Directo Discreto.

En los sistemas de control híbrido, es decir en los sistemas de control que tengan subsistemas continuos y subsistemas discretos aparecen al menos dos elementos que acoplan convenientemente subsistemas continuos y discretos: **los muestreadores** de periodo de muestreo $T \in \mathbb{R}^+$, que transforman una señal continua en una señal muestreada y los **dispositivos de retención**, que transforman una señal muestreada en una señal continua (quizá con discontinuidades de salto finito). El dispositivo de retención más sencillo es el de orden cero que llamaremos **ZOH** por sus siglas en inglés (Zero Order Hold). El ZOH retiene cada muestra generada en un instante de muestreo de manera constante durante un intervalo de muestreo completo $[kT, (k+1)T)$. En la Figura 6.3 se muestra un ejemplo de controlador discreto en el lazo directo y un sistema a controlar continuo.

Es posible definir una función de transferencia de lazo cerrado para esta clase de sistemas híbridos utilizando la notación "asterisco" o "estrella": $H^*(s)$ y un muestreador ideal definido como un tren de impulsos (deltas de Dirac).

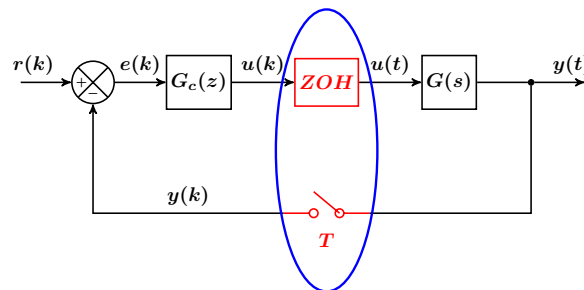


Figura 6.3: Estructura de Control de Lazo Directo Híbrido.

En esta Sección obtendremos solamente $H(s)$ y $H(z)$ para las estructuras de control de lazo directo continuo y discreto.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control representado en la Figura 6.1

viene dado por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} \quad (6.1)$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control representado en la Figura 6.2 viene dado por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)} \quad (6.2)$$

La demostración es sencilla resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (6.3a)$$

$$U(s) = G_c(s)E(s) \quad (6.3b)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (6.3c)$$

Las ecuaciones son similares para el caso discreto.

Apéndices

A. Ecuaciones diferenciales y en diferencias lineales de primer orden

Hay dos formas de representar las **ecuaciones en diferencias**: la forma común o en adelanto y la forma programable o en atraso.

La ecuación en diferencias con la forma en adelanto debe ir acompañada de las condiciones iniciales, es decir de un vector de dimensión el orden de la ecuación.

La ecuación en diferencias con la forma en atraso no va acompañada del vector de condiciones iniciales sino que o éstas son nulas o debe aparecer en la ecuación a través de un término adicional que es una combinación de deltas de Kronecker retardadas.

Si una misma ecuación en diferencias se expresase en la forma de adelanto y a partir de ella se realizase un desplazamiento temporal para obtener la forma en atraso se estaría cometiendo un error o la Transformada $\mathcal{Z}$ no sería única. Puesto que $\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$ siendo $\delta(k)$ la delta de Kronecker, es posible pasar la ecuación en diferencias representada en la forma de adelanto a la de la forma en atraso añadiendo las condiciones iniciales como una función de deltas de Kronecker retardadas.

Por ejemplo, sea la ecuación en diferencias lineal de primer orden en adelanto siguiente:

$$y(k+1) + ay(k) = bu(k) \quad (\text{A.1})$$

con la condición inicial $[y(0)]$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Su Transformada $\mathcal{Z}$ es

$$zY(z) - y(0)z + aY(z) = bU(z) \quad (\text{A.2})$$

Realizando un desplazamiento temporal de una unidad a la ecuación en adelanto dada por [A.1](#) se obtiene

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) \quad (\text{A.3})$$

cuya Transformada $\mathcal{Z}$ es

$$Y(z) + az^{-1}Y(z) = bz^{-1}U(z) \quad (\text{A.4})$$

que puede escribirse como

$$zY(z) + aY(z) = bU(z) \quad (\text{A.5})$$

Podemos observar que no coincide con la obtenida en [A.2](#). Las condiciones iniciales han desaparecido.

Sin embargo si se realiza un desplazamiento temporal de una unidad y se añaden la condiciones iniciales con deltas de Kronecker, su Transformada $\mathcal{Z}$ sería la misma:

$$y(k) - y(0)\delta(k) + ay(k-1) = bu(k-1) \quad (\text{A.6})$$

En resumen, las ecuaciones en diferencias dadas por [A.1](#) y [A.3](#) son distintas, pero las dadas por [A.1](#) y [A.6](#) son las mismas.

La solución de esta ecuación en diferencias puede obtenerse aplicando la Transformada $\mathcal{Z}$, y despejando $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{b}{z+a}U(z) + \frac{y(0)z}{z+a} \quad (\text{A.7})$$

Las **ecuaciones diferenciales** suelen representarse de una única forma. Por ejemplo la ecuación diferencial lineal de primer orden es:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \quad (\text{A.8})$$

con la condición inicial $[y(0^-)]$ y $a, b, y(0^-) \in \mathbb{R}$.

La solución de esta ecuación puede obtenerse aplicando la Transformada $\mathcal{L}_-$,

$$sY(s) - y(0^-) + aY(s) = bU(s) \quad (\text{A.9})$$

Despejando $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{b}{s+a}U(s) + \frac{y(0^-)}{s+a} \quad (\text{A.10})$$

Para obtener las solución de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en diferencias lineales de parámetros constantes, se aplicaría las Transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$ inversas a las ecuaciones

A.10 y A.7, respectivamente. Para ello es necesario conocer la señal de entrada $u(t)$ o $u(k)$, además de tener que estudiar los casos particulares del valor de los parámetros a y b .

Por ejemplo, en el caso particular en que $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $u(t)$ y $u(k)$ sean señales escalón unidad, $r_0(t)$ y $r_0(k)$, respectivamente, las solución a los sistemas de primer orden es,

$$y(t) = \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + y(0^-)e^{-at}, t \geq 0^- \quad (\text{A.11a})$$

$$y(k) = \frac{b}{a+1} (1 - (-a)^k) + y(0)(-a)^k, k \geq 0 \quad (\text{A.11b})$$

B. Discretización exacta de una ecuación diferencial lineal de primer orden

En la Sección A se ha estudiado la ecuación diferencial dada por

$$\dot{y}(t) + ay(t) = br_0(t) \quad (\text{B.1})$$

con la condición inicial $y(0^-)$ y $a, b, y(0^-) \in \mathbb{R}$.

Vimos que la solución de B.1 es

$$y(t) = \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + y(0^-) e^{-at}, \quad t \geq 0^- \quad (\text{B.2})$$

La solución discretizada de B.2 se obtiene haciendo $t = kT$ siendo $T \in \mathbb{R}^+$ el periodo de muestreo,

$$y(k) = \frac{b}{a} (1 - (e^{-aT})^k) + y(0) (e^{-aT})^k, \quad k \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

Haciendo

$$a_D = e^{-aT} \quad (\text{B.4a})$$

$$b_D = \frac{b(1 - a_D)}{a} \quad (\text{B.4b})$$

podemos escribirla en la forma

$$y(k) = \frac{b_D}{1 - a_D} (1 - a_D^k) + y(0) a_D^k, \quad k \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

Comparando esta expresión con la obtenida en la Sección A, dada por A.11b, podemos comprobar que se corresponde con la solución de la ecuación en diferencias,

$$y(k+1) - a_D y(k) = b_D r_0(k) \quad (\text{B.6})$$

con la condición inicial $y(0)$ y $a, b, y(0) \in \mathbb{R}$.

En consecuencia, la ecuación en diferencias B.6 junto con las relaciones B.4 es la discretización exacta de la ecuación diferencial B.1 para $u(t) = r_0(t)$.

Podemos observar que no es posible obtener la discretización exacta de una ecuación diferencial si no se conoce la señal de entrada $u(t)$, o lo que es lo mismo, la discretización exacta es distinta para diferentes señales de entrada. Por otro lado, ha sido necesario modificar los parámetros de la ecuación diferencial, además de que los parámetros de la ecuación discretizada dependen del periodo de muestreo T .

C. Tabla de transformadas $\mathcal{L}_-$ y $\mathcal{Z}$

Transformada $\mathcal{L}_-$	Función (Discreto: $t = kT$)	Transformada $\mathcal{Z}$
$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{T e^{-\alpha T} z}{(z - e^{-\alpha T})^2}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{T z}{(z - 1)^2}$
$\frac{s}{(s + \alpha)^2}$	$(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{(z - (1 + \alpha T)e^{-\alpha T}) z}{(z - e^{-\alpha T})^2}$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z - 1}$
1	$\delta(t)$	1
$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$	$e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}$	$\frac{(e^{-\alpha_1 T} - e^{-\alpha_2 T}) z}{(z - e^{-\alpha_1 T})(z - e^{-\alpha_2 T})}$
$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{(1 - e^{-\alpha T}) z}{(z - 1)(z - e^{-\alpha T})}$
$\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)s}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$	$\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}$	$\frac{[z(\alpha_2 - \alpha_1) - (\alpha_2 e^{-\alpha_1 T} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 T})] z}{(z - e^{-\alpha_1 T})(z - e^{-\alpha_2 T})}$
$\frac{1}{s + \alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$
$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \omega_d t$	$\frac{(z - e^{-\alpha T} \cos \omega_d T) z}{z^2 - 2e^{-\alpha T} \cos(\omega_d T) z + e^{-2\alpha T}}$
$\frac{\omega_d}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$	$e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$	$\frac{e^{-\alpha T} \sin(\omega_d T) z}{z^2 - 2e^{-\alpha T} \cos(\omega_d T) z + e^{-2\alpha T}}$

Tabla C.1: Transformadas $\mathcal{L}_-$ y $\mathcal{Z}$ de las funciones de segundo orden amortiguadas, y sus casos particulares de primer orden

D. Tabla de propiedades de las transformadas de Laplace unilateral y $\mathcal{Z}$

$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$		
Teorema	Función	Transformada $\mathcal{Z}$
Linealidad	$\alpha_1 x(k) + \alpha_2 y(k)$	$\alpha_1 \mathcal{Z}\{x(k)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}\{y(k)\}$
Desplazamiento real adelanto	$x(k+b)$	$z^b X(z) - \sum_{i=0}^{b-1} x(i)z^{b-i}$
Desplazamiento real atraso	$x(k-b)$	$z^{-b} X(z)$
Valor Final	$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{x(k)\}$	

Tabla D.1: Propiedades de la Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral

$$X(s) = \mathcal{L}_- \{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Teorema	Función	Transformada $\mathcal{L}_-$
Linealidad	$\alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t)$	$\alpha_1 \mathcal{L}_- \{x(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}_- \{y(t)\}$
Diferenciación	$\frac{d^b x(t)}{dt^b}$	$s^b X(s) - \sum_{i=1}^b s^{b-i} \frac{d^{i-1} x(t)}{dt^{i-1}} \Big _{t=0^-}$
Integración	$\int_{0^-}^t x(t) dt$	$\frac{X(s)}{s}$
Retardo	$x(t - t_0) r_0(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$
Valor Final: si $x(t)$ es estable	$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}_- \{x(t)\}$	
Valor Inicial	$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}_- \{x(t)\}$	

Tabla D.2: Propiedades de la Transformada de Laplace unilateral $\mathcal{L}_-$

$$X(s) = \mathcal{L}_+ \{x(t)\} = \int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Teorema	Función	Transformada $\mathcal{L}_+$
Linealidad	$\alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t)$	$\alpha_1 \mathcal{L}_+ \{x(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}_+ \{y(t)\}$
Diferenciación	$\frac{d^b x(t)}{dt^b}$	$s^b X(s) - \sum_{i=1}^b s^{b-i} \frac{d^{i-1} x(t)}{dt^{i-1}} \Big _{t=0^+}$
Integración	$\int_{0^+}^t x(t) dt$	$\frac{X(s)}{s}$
Retardo	$x(t - t_0) r_0(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$
Valor Final: si $x(t)$ es estable	$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}_+ \{x(t)\}$	
Valor Inicial	$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}_+ \{x(t)\}$	

Tabla D.3: Propiedades de la Transformada de Laplace unilateral $\mathcal{L}_+$