

Análisis

Félix Monasterio-Huelin & Álvaro Gutiérrez Martín

10 de febrero de 2021

Índice

Índice	1
Índice de Figuras	2
Índice de Tablas	2
1. Introducción	3
2. Estabilidad	3
2.1. Estabilidad de sistemas lineales	3
2.2. Estabilidad de polinomios	4
2.3. Tabla de Routh para el análisis de la estabilidad de polinomios en el sentido de Hurwitz	5
2.4. Filas nulas	6
2.5. Filas cuyo primer coeficiente es nulo y los restantes no son nulos	7
2.6. Intervalo de estabilidad de la constante K_p de un controlador Proporcional de un sistema de control realimentado. Selección del periodo de muestreo	8
3. Análisis en el Dominio del Tiempo	9
3.1. Respuesta de los sistemas de primer orden	9
3.2. Respuesta de los sistemas continuos de segundo orden a una entrada escalón unidad	10
3.3. Características de régimen transitorio de los sistemas continuos de segundo orden . .	12
3.4. Régimen permanente	13
4. Análisis en el Dominio Complejo	16
4.1. Introducción al Lugar de Raíces	16
4.2. Ejemplo de semiasíntotas y de centro asintótico	20
4.3. Lugar de Raíces en el eje real	21
4.4. Intervalos de estabilidad del Lugar de Raíces	25
A. Salida de sistemas libres de segundo orden con condiciones iniciales no nulas	27
A.1. Sistema de segundo orden subamortiguado: $\zeta < 1$	27
A.2. Sistema de segundo orden sobreamortiguado: $\zeta > 1$	28
A.3. Sistema de segundo orden críticamente amortiguado: $\zeta = 1$	28
B. Resumen de ecuaciones de la salida con controladores P y P-D	30
C. Ecuación de la sobreelongación máxima M_p, del tiempo de pico t_p y del tiempo de subida t_r de los sistemas de segundo orden subamortiguados en su primera forma canónica	31
D. Ecuación del tiempo de establecimiento t_s de los sistemas de segundo orden subamortiguados en su primera forma canónica	32
E. Lugar de Raíces: Puntos de ruptura reales	33

Índice de Figuras

2.1. Controlador Proporcional en una estructura de Control de Lazo Directo Continuo . . .	8
3.1. Respuesta de un sistema de primer orden. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.	10
3.2. Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su primera forma canónica con entrada escalón unidad	11
3.3. Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su primera forma canónica con entrada escalón unidad: clases de respuesta	11
3.4. Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su segunda forma canónica con entrada escalón unidad	12
3.5. Características del régimen transitorio, con intervalo de tolerancia del 4%	13
4.1. Esquema general para la representación del Lugar de Raíces	16
4.2. Lugar de Raíces de 4.6	17
4.3. Lugar de Raíces de 4.6 señalando las tres ramas y sus puntos notables.	18
4.4. Lugar de Raíces para $K = 36,08$	18
4.5. Lugar de Raíces para $K = 131,65$	19
4.6. Lugar de Raíces para $K = 300,64$	19
4.7. Lugar de Raíces: semiasíntotas y centro asintótico	20
4.8. Lugar de Raíces: semiasíntotas	21
4.9. Lugar de Raíces de 4.13	22
4.10. Lugar de Raíces de 4.14	23
4.11. Lugar de Raíces de 4.15	24
4.12. Lugar de Raíces de 4.15	25
E.1. Puntos de ruptura doble para $K = 0$	33
E.2. Punto de ruptura doble para $K = 0$	33
E.3. Punto de ruptura doble para $K = 0$	34
E.4. Puntos de ruptura: doble para $K = 0$ y triple para $K = 243$	34
E.5. Puntos de ruptura: dobles para $K = 0$, $K = 182,25$ y $K = 216$	35
E.6. Puntos de ruptura dobles para $K = 0$ y $K = 159,33$	35

Índice de Tablas

1. Introducción

Para estudiar el comportamiento de un sistema de control es necesario introducir diferentes señales de referencia (escalón, rampa, parábola, sinusoidal,...) al sistema y observar su salida. Es importante tener en cuenta que un sistema dinámico no tiene una respuesta instantánea y que toda respuesta se descompondrá en un régimen transitorio y un régimen permanente. Para generar una base de comparación de sistemas de control nos centraremos en sistemas de primer y segundo orden. Sin embargo, antes de analizar las respuestas del sistema en el dominio del tiempo se hace necesario estudiar la estabilidad del mismo.

2. Estabilidad

2.1. Estabilidad de sistemas lineales

Consideremos la ecuación diferencial que representa al péndulo simple amortiguado libre (entrada nula):

$$\ddot{\theta}(t) + 2\alpha\dot{\theta}(t) + \omega_n^2 \sin \theta(t) = 0 \quad (2.1)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de atenuación, $\omega_n \in \mathbb{R}$ la frecuencia natural y $\theta(t) \in \mathbb{R}$ la posición angular.

Los puntos de equilibrio de un sistema se obtienen anulando las derivadas en la situación no forzada o libre, es decir con una entrada nula. En el caso del péndulo son las soluciones de la ecuación

$$\sin \theta(t) = 0 \quad (2.2)$$

Podemos ver que la ecuación de equilibrio 2.2 tiene dos soluciones:

$$\theta = 2n\pi \quad (2.3a)$$

$$\theta = (2n + 1)\pi \quad (2.3b)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$.

La estabilidad se define para cada uno de los puntos de equilibrio.

El péndulo simple es un sistema no lineal con dos puntos de equilibrio. La posición vertical "hacia abajo" $\theta = 0$ es estable, mientras que la posición "hacia arriba" $\theta = \pi$ es inestable: una pequeña perturbación de la posición de equilibrio provoca que el péndulo no retorne a la posición "hacia arriba" pero sí lo haga a la posición "hacia abajo". Sin embargo cuando el coeficiente de atenuación es nulo, $\alpha = 0$, la salida ante una pequeña perturbación es oscilatoria sin amortiguación, por lo que cualquier punto de equilibrio sería inestable.

Si los movimientos del péndulo simple se hacen en las proximidades del punto de equilibrio estable, es decir para $\theta(t) \approx 0$, se comportará como un sistema lineal haciendo $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$, dado por la ecuación de segundo orden

$$\ddot{\theta}(t) + 2\alpha\dot{\theta}(t) + \omega_n^2\theta(t) = 0 \quad (2.4)$$

Los sistemas lineales solo tienen un punto de equilibrio $y = 0$ siendo $y(t)$ la salida. Por esta razón suele hablarse de estabilidad del sistema lineal.

Hay diversas definiciones del concepto de estabilidad. La idea de provocar un movimiento a la salida introduciendo una pequeña perturbación a la entrada de un sistema es probablemente la más intuitiva. Es la idea de la definición de **estabilidad de Lyapunov**.

Otra, es la que llamaremos **estabilidad de entrada/salida acotada** (BIBO en inglés: Bounded Input Bounded Output) que definimos de la siguiente forma. Diremos que un sistema es BIBO-estable si para una entrada acotada su salida permanece acotada. En caso contrario, es decir si para una entrada acotada su salida no está acotada, diremos que el sistema es inestable.

Ambas definiciones son equivalentes en el caso de los sistemas lineales, a excepción de la situación en que la salida sea oscilatoria sin amortiguación ($\alpha = 0$). Según la definición de estabilidad de Lyapunov esta situación sería inestable, mientras que según la definición de estabilidad BIBO sería estable. En este documento diremos que, en esta situación, el sistema es críticamente estable.

En un sistema de primer orden, ante una entrada nula y condiciones iniciales no nulas, el sistema tiene una salida no nula que define al polo del sistema:

$$Y(s) = \frac{\alpha_0}{s - p} \quad (2.5)$$

donde $\alpha_0 = y(0^-)$.

La salida en el dominio del tiempo es,

$$y(t) = y(0^-)e^{pt}r_0(t) \quad (2.6)$$

donde $r_0(t)$ es la función escalón unidad.

Cuando $p < 0$ la salida tiende al punto de equilibrio $y = 0$, mientras que para $p > 0$ la salida tiende al infinito $y \rightarrow \infty$, y para $p = 0$ tiende a una constante $y(0^-)$. Por lo tanto, un sistema de primer orden es estable cuando $p < 0$ y es inestable en caso contrario según la definición de Lyapunov. Sin embargo será BIBO-estable para $p = 0$ ya que la entrada $u(t) = 0$ está acotada y la salida también. Este es el caso en que el sistema tiene un polo en el origen $s = 0$. En lo que sigue consideraremos que en este caso el sistema es estable, aunque diremos que es críticamente estable.

La conclusión importante que debemos sacar es que los polos de un sistema lineal caracterizan la estabilidad del sistema. Esto es cierto para cualquier sistema lineal de orden n . Por lo tanto, las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia de un sistema lineal caracterizan la estabilidad del sistema.

2.2. Estabilidad de polinomios

Diremos que un polinomio $P(s)$ de grado n de la forma

$$P(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \quad (2.7)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{C}$ es **estable en el sentido de Hurwitz**, si las raíces de la ecuación

$$P(s) = 0 \quad (2.8)$$

tienen parte real negativa distinta de cero.

Diremos que el polinomio 2.7 es críticamente estable cuando la parte real de las raíces de la ecuación 2.8 es nula, es decir cuando las raíces son imaginarias puras. Puesto que el Teorema Fundamental del Álgebra demuestra que las ecuaciones polinómicas de grado n tienen n raíces, y que cuando sus coeficientes son reales, $a_i \in \mathbb{R}$ sus raíces son reales o complejas conjugadas, entonces un polinomio solo puede ser críticamente estable si su grado n es par.

Diremos que un polinomio $P(z)$ de grado n de la forma

$$P(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n \quad (2.9)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ es **estable en el sentido de Schur**, si las raíces de la ecuación

$$P(z) = 0 \quad (2.10)$$

tienen módulo menor que la unidad.

Diremos que el polinomio 2.9 es críticamente estable cuando el módulo de las raíces de la ecuación 2.10 es la unidad.

Diremos que los polinomios 2.7 o 2.9 son inestables si no son estables ni críticamente estables.

Por extensión diremos que una raíz concreta de las ecuaciones 2.8 o 2.10 es estable, críticamente estable o inestable.

Estas definiciones de estabilidad parecen exigir el cálculo de las raíces, sin embargo esto no es realmente necesario ya que es suficiente con aplicar algún test que verifique la condición de estabilidad. El test de Routh, que enunciamos a continuación, cumple este objetivo, además de que aporta información sobre la ubicación de las raíces en el plano complejo.

Una de las razones para utilizar métodos que no exijan el cálculo de raíces es el hecho de que los polinomios de grado mayor o igual al quinto no se pueden resolver por radicales (no hay expresión algebraica¹), salvo en casos particulares. Este hecho matemático exigiría utilizar métodos numéricos para el cálculo de las raíces y estos métodos siempre dan resultados aproximados por lo que en ocasiones son inaceptables.

¹Teorema de Abel-Ruffini y de Galois

2.3. Tabla de Routh para el análisis de la estabilidad de polinomios en el sentido de Hurwitz

Dado el polinomio 2.7, con $a_n \neq 0$,

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (2.11)$$

construimos la Tabla de Routh a partir de los coeficientes a_i , de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} s^n : \\ s^{n-1} : \\ s^{n-2} : \\ s^{n-3} : \\ s^{n-4} : \\ \vdots \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \end{array} \right. \quad (2.12)$$

donde los coeficientes b_i, c_i, d_i (y sucesivos) se calculan de la siguiente forma:

$$b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_{2i+1}}{a_1} = - \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_{2i} \\ a_1 & a_{2i+1} \end{bmatrix}}{a_1} \quad (2.13a)$$

$$c_i = \frac{b_1 a_{2i+1} - a_1 b_{i+1}}{b_1} = - \frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_{2i+1} \\ b_1 & b_{i+1} \end{bmatrix}}{b_1} \quad (2.13b)$$

$$d_i = \frac{c_1 b_{i+1} - b_1 c_{i+1}}{c_1} = - \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & b_{i+1} \\ c_1 & c_{i+1} \end{bmatrix}}{c_1} \quad (2.13c)$$

La columna de la izquierda es solo indicativa. Entenderemos que la primera columna de la izquierda de la Tabla es la de coeficientes $1, a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$.

Puede observarse que estamos suponiendo que los coeficientes de la primera columna de la izquierda son distintos de cero. En caso contrario los coeficientes sucesivos serían infinitos (salvo cancelaciones). Veremos enseguida como construir la Tabla de Routh en estos casos especiales.

La Tabla de Routh debe completarse con ceros a la derecha de cada fila.

El **Teorema de Routh** afirma dos cosas:

1. El polinomio $P(s)$ es estable en el sentido de Hurwitz si todos los coeficientes de la primera columna son positivos
2. El número de raíces positivas o con parte real positiva de $P(s) = 0$ coincide con el número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna.

Si el polinomio tuviese raíces complejas con parte real positiva deberán aparecer en pares conjugados por lo que habrá dos cambios de signo, pero el hecho de que haya dos cambios de signo no implica que sean complejas. Pueden ser dos raíces reales positivas. Tampoco indica este teorema el orden de multiplicidad de la raíces, ni permite saber si el polinomio es críticamente estable (raíces en el eje imaginario). Sin embargo puede conocerse esta información cuando una fila completa se hace nula, como vamos a ver a continuación.

Cada fila de grado j -ésimo (fila s^j) de la Tabla puede representarse como un polinomio de grado s^j llamado polinomio auxiliar. Por ejemplo, la primera fila puede representarse por el polinomio $P_n(s)$ y la segunda por el polinomio $P_{n-1}(s)$, de tal forma que $P(s) = P_n(s) + P_{n-1}(s)$,

$$P_n(s) = s^n + a_2 s^{n-2} + a_4 s^{n-4} + \dots \quad (2.14a)$$

$$P_{n-1}(s) = a_1 s^{n-1} + a_3 s^{n-3} + a_5 s^{n-5} + \dots \quad (2.14b)$$

y en general el polinomio auxiliar asociado a la fila de grado j -ésimo (fila s^j) tiene la forma

$$P_j(s) = f_{j1}s^j + f_{j2}s^{j-2} + f_{j3}s^{j-4} + \dots \quad (2.15)$$

donde f_{ji} son los coeficientes de la fila de grado j -ésimo.

A continuación se explica cómo construir la Tabla de Routh en dos casos especiales.

2.4. Filas nulas

Puede demostrarse que $P_j(s) = 0$ si y solamente si las ecuaciones $P(s) = 0$ y $P_{j-1} = 0$ tienen las mismas raíces radiales, es decir raíces simétricas con respecto al origen en el plano complejo. En este caso el polinomio P_{j-1} es par por lo que la ecuación $P_{j-1}(s) = 0$ tiene raíces opuestas, reales o complejas.

En este caso la fila nula puede sustituirse por otro polinomio $P'_j(s)$ y continuar construyendo la Tabla normalmente donde

$$P'_j(s) = \frac{dP_{j-1}(s)}{ds} \quad (2.16)$$

Una vez construida la Tabla debemos saber que las raíces radiales imaginarias no producen cambios de signo, pero las radiales reales y complejas sí, por lo que puede saberse si $P(s)$ es críticamente estable o inestable. Cuando las raíces radiales son complejas (con parte real no nula) deberán aparecer de cuatro en cuatro ya que debe haber a su vez raíces complejas conjugadas. En este caso dos de ellas serán inestables. Por ejemplo el polinomio $P(s) = s^4 + 4$ cumple esta condición. Para comprobarlo puede hacerse el cambio de variables $v = s^2$. Entonces $P(v) = v^2 + 4 = (v + j2)(v - j2)$. Por lo tanto $s^2 = \pm 2j$. Haciendo $s = \sigma + j\omega$, elevando al cuadrado e igualando a $\pm 2j$ se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \omega^2 \\ \sigma\omega &= \pm 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

y de aquí las cuatro raíces radiales, $(\pm 1 \pm j)$.

Consideremos el polinomio

$$P(s) = s^2 + 4 = (s + j2)(s - j2) \quad (2.18)$$

Su Tabla de Routh es

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{l} 1 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \\ ? \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Vemos que $P_1(s) = 0$, por lo que $P(s) = 0$ tendrá raíces radiales. Como el polinomio auxiliar $P_2(s) = s^2 + 4$ entonces su derivada con respecto a s es $P'_1(s) = 2s$ por lo que la Tabla queda en la forma:

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{l} 1 \quad 4 \\ 2 \quad 0 \\ 4 \quad 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Podemos observar que no hay cambios de signo en la primera columna, pero como se había producido una fila nula debemos sacar la conclusión de que las raíces radiales deben ser imaginarias, y en consecuencia el polinomio es críticamente estable.

En lo sucesivo escribiremos las dos tablas anteriores 2.19 y 2.21 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{l} 1 \quad 4 \\ 0; 2 \quad 0 \\ 4 \quad 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} P_2(s) = s^2 + 4 \\ P_1(s) = 0; P'_1(s) = 2s \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Veamos algunos ejemplos de ecuaciones con raíces radiales.

i) Sea el polinomio

$$P(s) = s^3 - s^2 + 4s - 4 = (s^2 + 4)(s - 1) \quad (2.22)$$

La ecuación $P(s) = 0$ tiene dos raíces en el eje imaginario y una raíz real inestable.

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & -4 \\ 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} P_2(s) = -s^2 - 4 \\ P_1(s) = 0; P_1'(s) = -2s \end{array} \quad (2.23)$$

Vemos que hay una fila nula $P_1(s) = 0$ que ha sido sustituida por una nueva $P_1'(s) = -2s$, y un cambio de signo en los coeficientes de la primera columna. Puesto que se ha anulado una fila sabemos que debe haber soluciones radiales. Como el polinomio es de grado 3 no es posible que sean complejas, pero podrían haber sido reales. La forma de saber si las radiales son imaginarias o reales es analizando el polinomio auxiliar $P_2(s) = s^2 + 4$. Puesto que las raíces de $P_2(s) = 0$ son imaginarias, podemos concluir que hay una raíz real inestable que no es radial. En cualquier caso el polinomio es inestable.

ii) Sea el polinomio

$$P(s) = s^3 + s^2 - 4s - 4 = (s^2 - 4)(s + 1) \quad (2.24)$$

La ecuación $P(s) = 0$ tiene una raíz radial real inestable.

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & -4 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} P_2(s) = s^2 - 4 \\ P_1(s) = 0; P_1'(s) = 2s \end{array} \quad (2.25)$$

Vemos que hay una fila nula $P_1(s) = 0$ que ha sido sustituida por una nueva $P_1'(s) = 2s$, y un cambio de signo en los coeficientes de la primera columna. Como en el ejemplo anterior tampoco sabemos si las soluciones radiales son imaginarias o reales. En este caso habría que estudiar el polinomio auxiliar $P_2(s) = s^2 - 4$. Puesto que las raíces de $P_2(s) = 0$ son reales, podemos concluir que hay una raíz real inestable que es radial.

iii) Sea el polinomio

$$P(s) = s^3 - s^2 - s + 1 = (s - 1)^2(s + 1) \quad (2.26)$$

Vemos que la ecuación $P(s) = 0$ tiene una raíz inestable de orden de multiplicidad 2.

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} P_2(s) = -s^2 + 1 \\ P_1(s) = 0; P_1'(s) = -2s \end{array} \quad (2.27)$$

Vemos que la fila que se ha anulado se debe a las raíces radiales de $P_2(s) = -s^2 + 1 = 0$, es decir $s = \pm 1$, y nada tiene que ver con el hecho de que $P(s)$ tenga una raíz doble. Vemos que hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. No debe sacarse la conclusión de que si el orden de multiplicidad es mayor que la unidad se anulará una fila.

2.5. Filas cuyo primer coeficiente es nulo y los restantes no son nulos

Puede darse otro caso especial, que es cuando el primer coeficiente de una fila se hace nulo y los restantes son distintos de cero. Se trata de una reducción de grado del polinomio auxiliar.

Hay diversas formas de construir la tabla de Routh en estas circunstancias. Una de ellas es sustituir el valor nulo por una variable positiva $\epsilon > 0$ y seguir construyendo la Tabla normalmente. Una vez hecho esto los restantes coeficientes de la Tabla dependerán, en general, de ϵ y bastará con calcular el $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{j1}$, $\forall j$ para conocer el signo de los coeficientes de la primera columna.

Por ejemplo, sea el polinomio

$$P(s) = s^4 + 4 = ((s + 1)^2 + 1)((s - 1)^2 + 1) = (s^2 + 2j)(s^2 - 2j) \quad (2.28)$$

La ecuación $P(s) = 0$ tiene cuatro raíces complejas radiales pero que no son imaginarias puras.

La Tabla de Routh es:

$$\begin{array}{l} s^4 : \\ s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 0; 4 & 0 & 0 \\ 0 \approx \epsilon & 4 & 0 \\ -\frac{16}{\epsilon} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} P_4(s) = s^4 + 4 \\ P_3(s) = 0; P'_3(s) = 4s^3 \end{array} \quad (2.29)$$

En este ejemplo hay una fila nula $P_3(s) = 0$, que ha sido sustituida por $P'_3(s) = 4s^3$ como se ha explicado en la Subsección 2.4.

También hay una fila (la de s^2) con el primer coeficiente nulo y el siguiente distinto de cero. El coeficiente nulo se ha sustituido por $\epsilon > 0$ de tal manera que se ha podido terminar de construir la Tabla. Podemos ver que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_{11} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{16}{\epsilon} = -\infty < 0 \quad (2.30)$$

En consecuencia vemos dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna y por lo tanto hay dos raíces con parte real positiva.

2.6. Intervalo de estabilidad de la constante K_p de un controlador Proporcional de un sistema de control realimentado. Selección del periodo de muestreo

En la Figura 2.1 se muestra un sistema de control realimentado continuo con un controlador Proporcional en el lazo directo. El sistema a controlar es un sistema de segundo orden cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (2.31)$$

donde $K, p \in \mathbb{R}$.

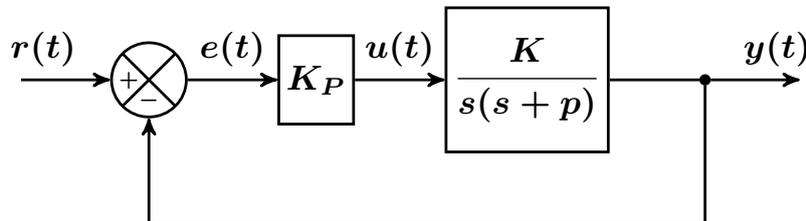


Figura 2.1: Controlador Proporcional en una estructura de Control de Lazo Directo Continuo

La función de transferencia de lazo cerrado es

$$H(s) = \frac{K_p K}{s^2 + ps + KK_p} \quad (2.32)$$

El intervalo de estabilidad de K_p puede calcularse utilizando la Tabla de Routh,

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & KK_p \\ p & 0 \\ KK_p & 0 \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Analizando los cambios de signo de la primera columna sacamos la conclusión de que para que el sistema de lazo cerrado sea estable deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$p > 0 \quad (2.34a)$$

$$KK_p > 0 \quad (2.34b)$$

Por ejemplo si $p > 0$ y $K < 0$ entonces K_p debe ser menor que cero.

La ecuación característica del sistema de control de lazo cerrado es

$$s^2 + ps + KK_p = 0 \quad (2.35)$$

En consecuencia los polos son

$$s = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4KK_p}}{2} \quad (2.36)$$

Cuando $p^2 < 4KK_p$ los polos serán complejos conjugados; en caso contrario serán reales y distintos. El caso de polos complejos no puede darse si $KK_p < 0$. En el caso de polos reales, si $KK_p < 0$ habrá un polo positivo.

Con este análisis podemos comprobar que es más sencillo obtener los intervalos de estabilidad utilizando la Tabla de Routh que obteniendo los polos del sistema, incluso en este sencillo ejemplo de un sistema de orden dos.

3. Análisis en el Dominio del Tiempo

3.1. Respuesta de los sistemas de primer orden

Definamos la función de transferencia de un sistema típico de primer orden como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3.1)$$

La salida $Y(s)$ ante una entrada escalón unidad con condiciones iniciales nulas $R(s) = \frac{1}{s}$ es

$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s} \quad (3.2)$$

Desarrollando en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + p(1/T)} \quad (3.3)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace obtenemos:

$$y(t) = 1 - e^{-t/T} \quad (3.4)$$

La Figura 3.1a muestra la respuesta del sistema a la entrada escalón y condiciones iniciales nulas. Observamos que la respuesta empieza en cero y en el régimen permanente alcanza el valor de la referencia de la unidad.

El mismo desarrollo se puede hacer para una rampa unidad como señal de referencia ($Y(s) = \frac{1}{s^2}$). En este caso, la salida del sistema es:

$$y(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (3.5)$$

La Figura 3.1b muestra la respuesta del sistema a la rampa unidad y condiciones iniciales nulas. Observamos que la respuesta empieza en cero y se dirige hacia infinito en el régimen permanente. Sin embargo, al contrario que con el escalón, el sistema mantiene un error en régimen permanente.

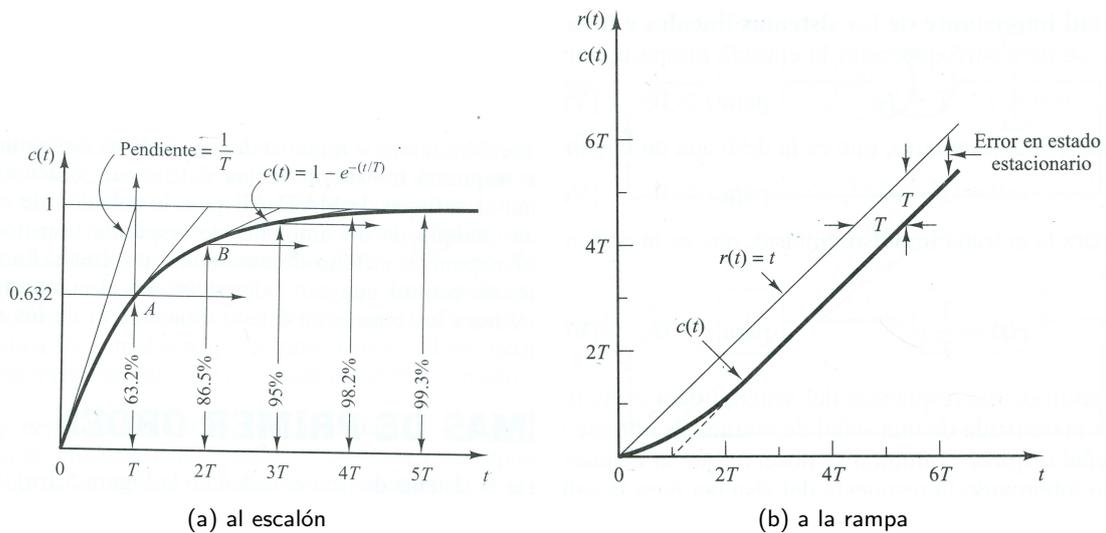


Figura 3.1: Respuesta de un sistema de primer orden. Imagen de Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata.

3.2. Respuesta de los sistemas continuos de segundo orden a una entrada escalón unidad

Para el estudio de la respuesta de un sistema de segundo orden a la entrada escalón unidad obtendremos la función de transferencia de los sistemas de segundo orden en la primera forma canónica, a partir de la ecuación diferencial,

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (3.6)$$

donde $\omega_n \in \mathbb{R}^+$ es la frecuencia natural, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el coeficiente de atenuación, $u(t) \in \mathbb{R}$ la entrada e $y(t) \in \mathbb{R}$ la salida del sistema continuo.

Aplicando la Transformada de Laplace se obtiene la función de transferencia $\mathcal{G}_1(s)$ que llamaremos **primera forma canónica** de los sistemas de segundo orden,

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \quad (3.7)$$

Cuando $u(t)$ es un escalón unidad $r_0(t)$ se obtiene la salida, bajo condiciones iniciales nulas,

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)} \quad (3.8)$$

Descomponiendo en fracciones simples, $Y(s)$ queda en la forma

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\alpha}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \quad (3.9)$$

La respuesta (causal) al escalón unidad de un sistema de segundo orden $\mathcal{L}_-^{-1}\{Y(s)\}$,

$$y(t) = \left(1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t\right)\right) r_0(t) \quad (3.10)$$

donde ω_d se denomina frecuencia natural amortiguada, siendo $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$ cuando la respuesta es subamortiguada, $\omega_d = -j\tilde{\omega}_d$ con $\tilde{\omega}_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$ cuando la respuesta es sobreamortiguada, y $\omega_d = 0$ cuando la respuesta es críticamente amortiguada.

Es habitual representar la respuesta al escalón para diversos valores del coeficiente de amortiguamiento ζ definido como $\alpha = \zeta\omega_n$ como se muestra en las Figuras 3.2 y 3.3. Se produce una

respuesta subamortiguada cuando $\zeta < 1$, una respuesta sobreamortiguada cuando $\zeta > 1$ y una respuesta críticamente amortiguada cuando $\zeta = 1$.

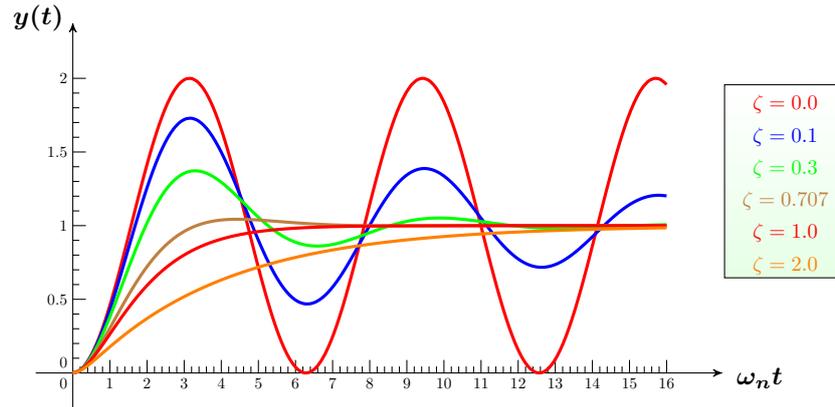


Figura 3.2: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su primera forma canónica con entrada escalón unidad

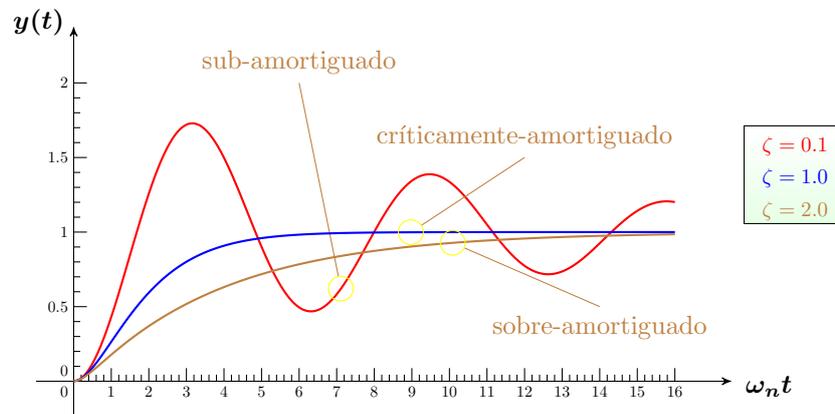


Figura 3.3: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su primera forma canónica con entrada escalón unidad: clases de respuesta

La expresión 3.10 puede escribirse en la forma

$$y(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \right) r_0(t) \quad (3.11)$$

donde

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.12a)$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (3.12b)$$

En el caso sobreamortiguado conviene escribir la respuesta al escalón 3.10 en la forma de exponenciales, teniendo en cuenta que las funciones trigonométricas de argumentos complejos son funciones hiperbólicas,

$$y(t) = \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\tilde{\omega}_d} e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_2}{2\tilde{\omega}_d} e^{-\alpha_1 t} \right) r_0(t) \quad (3.13)$$

donde

$$\alpha_1 = \alpha + \tilde{\omega}_d \quad (3.14a)$$

$$\alpha_2 = \alpha - \tilde{\omega}_d \quad (3.14b)$$

El caso críticamente amortiguado puede obtenerse calculando el límite cuando $\omega_d \rightarrow 0$ en la expresión 3.10

$$y(t) = (1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}) r_0(t) \quad (3.15)$$

La **segunda forma canónica** de los sistemas de segundo orden deriva de la ecuación diferencial,

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n \dot{u}(t) \quad (3.16)$$

Su función de transferencia es $\mathcal{G}_2(s)$,

$$\mathcal{G}_2(s) = \frac{\omega_n s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \quad (3.17)$$

Cuando $u(t)$ es un escalón unidad $r_0(t)$ se obtiene la salida

$$Y(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} \quad (3.18)$$

por lo que la respuesta al escalón unidad es

$$y(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right) r_0(t) \quad (3.19)$$

En la Figura 3.4 se muestran las respuestas al escalón unidad variando el coeficiente de amortiguamiento ζ para un sistema de orden dos en su segunda forma canónica.

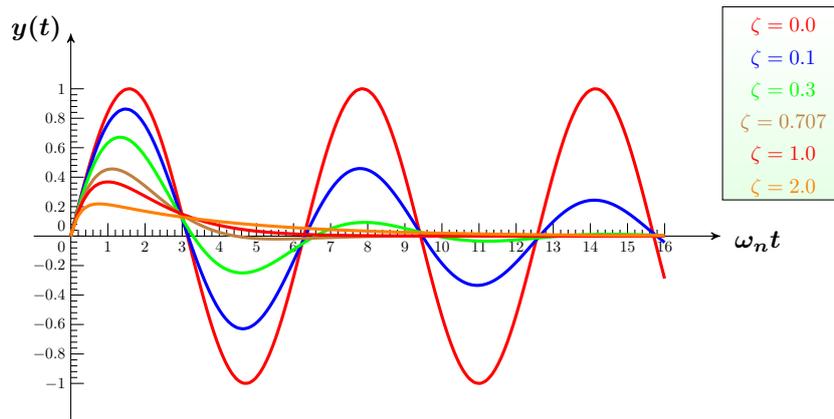


Figura 3.4: Salida $y(t)$ de un sistema de orden dos en su segunda forma canónica con entrada escalón unidad

Cuando los polos son reales conviene expresar la respuesta al escalón en forma de exponenciales,

$$y(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}) \right) r_0(t) \quad (3.20)$$

donde α_1, α_2 vienen dados por las relaciones 3.14.

Por último, la respuesta al escalón para el caso $\zeta = 1$ viene dado por

$$y(t) = (\omega_n t e^{-\omega_n t}) r_0(t) \quad (3.21)$$

3.3. Características de régimen transitorio de los sistemas continuos de segundo orden

En la Figura 3.5 se muestran dos características fundamentales del régimen transitorio que deben utilizarse como especificaciones de diseño de los controladores: el tiempo de establecimiento t_s y la

sobreelongación máxima M_p . También se muestran en la Figura 3.5 otras características que pueden resultar útiles, como el tiempo de pico t_p y el tiempo de subida t_r .

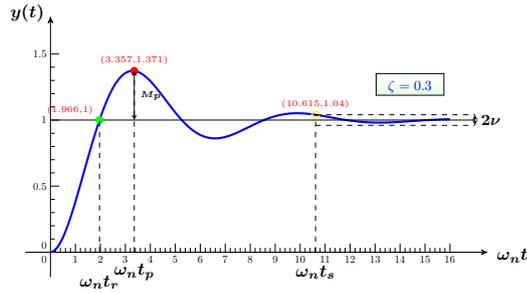


Figura 3.5: Características del régimen transitorio, con intervalo de tolerancia del 4%

El tiempo de establecimiento t_s marca una frontera entre el régimen permanente práctico y el régimen transitorio. Se define en relación a un factor de tolerancia ν con respecto a la señal de referencia. Dota de sentido práctico a la calidad del problema de seguimiento de una señal de referencia.

La sobreelongación máxima M_p solo tiene sentido para respuestas subamortiguadas, y es muy importante para evitar la saturación de la señal de control (salida del controlador). Por lo tanto debe ser seleccionado cuidadosamente.

Para el caso de sistemas de segundo orden en su primera forma canónica con una entrada escalón unidad, los valores de estas especificaciones de diseño satisfacen las siguientes relaciones:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (3.22a)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3.22b)$$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega_d} \quad (3.22c)$$

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\zeta\omega_n} \quad (3.22d)$$

donde ν es la tolerancia, y

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (3.23a)$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (3.23b)$$

3.4. Régimen permanente

El problema de seguimiento de una señal de referencia consiste en el estudio del comportamiento del sistema realimentado en el régimen permanente, es decir el estudio cuando $t \rightarrow \infty$ de la señal de error $e(t)$ ante diferentes señales de referencia.

Para analizar este problema suele ser suficiente con utilizar el teorema del valor final para obtener el error de régimen permanente $e(\infty)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}^{-1}\{e(t)\} \quad (3.24a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\{e(k)\} \quad (3.24b)$$

Estos teoremas son solo válidos cuando las señales $e(t)$ y $e(kT)$ son estables. En caso contrario no pueden ser aplicados.

La señal de error se define como

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3.25a)$$

$$e(k) = r(k) - y(k) \quad (3.25b)$$

por lo que su función de transferencia es

$$H_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - H(s) \quad (3.26a)$$

$$H_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = 1 - H(z) \quad (3.26b)$$

donde $H(s)$ y $H(z)$ son las funciones de transferencia de lazo cerrado continuo y discreto respectivamente.

Podemos reescribir el teorema del valor final para el problema de seguimiento de sistemas de control realimentado estables, como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - H(s))R(s) \quad (3.27a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})(1 - H(z))R(z) \quad (3.27b)$$

Escribiremos $H(s)$ y $H(z)$ en la forma racional siguiente,

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.28a)$$

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (3.28b)$$

donde $N(s)$, $D(s)$ y $N(z)$, $D(z)$ son polinomios coprimos en s y z respectivamente. Los polinomios del numerador son de grado m y los del denominador de grado n , con $m \leq n$, ya que admitimos que el sistema de lazo cerrado es causal.

De nuevo, podemos reescribir el teorema del valor final para el problema de seguimiento de sistemas de control realimentado estables, como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{D(s) - N(s)}{D(s)} R(s) \quad (3.29a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{D(z) - N(z)}{D(z)} R(z) \quad (3.29b)$$

Al representar las funciones de transferencia de lazo cerrado en la forma racional de dos polinomios en s o z , y teniendo en cuenta que los sistemas son causales, es decir, que el grado del polinomio del numerador es menor o igual que el grado del polinomio del denominador, podemos comprender que el tipo de sistema de $H(s)$ o $H(z)$, es decir el número de polos en $s = 0$ o $z = 1$ que tengan $H(s)$ o $H(z)$, tendrá mucha importancia para el problema de seguimiento.

Por ejemplo, supongamos que $H(s)$ viene dado por,

$$H(s) = \frac{s + 7}{s^2(s + 5)} \quad (3.30)$$

entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^3 + 5s^2 - s - 7}{s^2(s + 5)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-7}{5s} R(s) \quad (3.31)$$

En este ejemplo, el tipo de sistema es dos, lo que ha permitido una cancelación del monomio s que aparece en el teorema del valor final.

Pero también puede comprenderse que la diferencia de los polinomios $D(s) - N(s)$ o $D(z) - N(z)$ jugará un papel, nada despreciable, en el problema de seguimiento.

Por ejemplo, supongamos que $H(s)$ viene dado por,

$$H(s) = \frac{11s + 5}{(s + 1)^2(s + 5)} = \frac{11s + 5}{s^3 + 7s^2 + 11s + 5} \quad (3.32)$$

entonces $D(s) - N(s) = s^2(s + 7)$. Como consecuencia,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3(s + 7)}{s^3 + 7s^2 + 11s + 5} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{7s^3}{5} R(s) \quad (3.33)$$

En este ejemplo, el tipo de sistema es cero, pero al ser el numerador un “subpolinomio completo” del denominador, se ha logrado que en el numerador de $1 - H(s)$ pueda extraerse como factor común un monomio en s de grado dos.

En lo que sigue se realizará el estudio del problema de seguimiento de señales monómicas, o en general, polinómicas.

En el primer ejemplo, podemos comprobar con la relación 3.31 que $e(\infty) = \infty$ para cualquier señal de referencia monómica causal $r(t) = r_q(t)$, pero en el segundo ejemplo, podemos comprobar con la relación 3.33 que

$$e(\infty) = \begin{cases} 0 & q < 2 \\ \frac{7}{5} & q = 2 \\ \infty & q > 2 \end{cases} \quad (3.34a)$$

$$q = 2 \quad (3.34b)$$

$$q > 2 \quad (3.34c)$$

donde

$$r_q(t) = \frac{1}{q!} t^q r_0(t) \quad (3.35a)$$

$$\mathcal{L}_- \{r_q(t)\} = \frac{1}{s^{q+1}} \quad (3.35b)$$

siendo $r_0(t)$ la función escalón unidad, $q \in \mathbb{N}$ y $q!$ el factorial de q , $q! = q(q - 1) \cdots 1$.

Por lo tanto, en el primer ejemplo no se resuelve el problema de seguimiento de las señales de referencia monómicas, pero en el segundo se resuelve para las señales escalón y rampa, y se resuelve parcialmente para la parábola, ya que se produce un error en régimen permanente finito y distinto de cero.

El objetivo de diseño del controlador para la resolución del problema de seguimiento de un conjunto de señales de referencia concretas, consiste, por lo tanto, en la obtención de una función de transferencia de lazo cerrado adecuada. En el último ejemplo se ha visto que la selección de los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado ha sido suficiente para resolver el problema de seguimiento, si las especificaciones de diseño del régimen permanente no exigen que se resuelva el problema de seguimiento para señales monómicas de grado tres. Como consecuencia, podemos decir que **el problema de seguimiento consiste en un problema de asignación de ceros de la función de transferencia de lazo cerrado**.

Una conclusión que puede sacarse a partir del segundo ejemplo, es que es imposible resolver el problema de seguimiento con un error de régimen permanente nulo para cualquier señal de referencia si se ha elegido a priori un controlador.

En general, el problema de seguimiento, utilizando la técnica de asignación de ceros, se resuelve para señales de referencia monómicas de grado $q < n_s + 1$, donde n_s es el grado del “subpolinomio completo” del denominador que aparece en el numerador.

Por ejemplo, si se diseña un controlador de tal forma que la función de transferencia de lazo cerrado sea la siguiente,

$$H(s) = \frac{7s^2 + 11s + 5}{(s + 1)^2(s + 5)} = \frac{7s^2 + 11s + 5}{s^3 + 7s^2 + 11s + 5} \quad (3.36)$$

entonces, $e(\infty) = 0$, para $q < 3$.

Otro ejemplo. Supongamos que,

$$H(s) = \frac{23s^2 + 11s + 5}{(s + 1)^2(s + 5)} = \frac{23s^2 + 11s + 5}{s^3 + 7s^2 + 11s + 5} \quad (3.37)$$

entonces, $e(\infty) = 0$, para $q < 2$, ya que el “subpolinomio completo” es $11s + 5$.

Hay que tener en cuenta que un “subpolinomio completo” incluye los de grado cuyo coeficiente es nulo. Por ejemplo, si

$$H(s) = \frac{11s + 5}{s^3 + 11s + 5} \quad (3.38)$$

entonces $n_s = 2$.

En resumen, la selección de la estructura del controlador se convierte en un problema que afecta a la satisfacción de las especificaciones de régimen permanente, ya que no solo debe resolverse un problema de asignación de ceros, sino que debe seleccionarse un controlador que fije el orden mínimo del sistema de control realimentado de acuerdo con las especificaciones de régimen permanente.

4. Análisis en el Dominio Complejo

4.1. Introducción al Lugar de Raíces

El Lugar de Raíces representa en el plano complejo s el lugar geométrico de los polos de lazo cerrado del sistema de control realimentado, en función de los diferentes valores de la ganancia $K \in [0, \infty]$ de un controlador situado en el lazo directo, como se muestra en la Figura 4.1. Es decir es la representación de las raíces de la ecuación característica para los infinitos valores de K positivos,

$$1 + KG(s) = 0 \quad (4.1)$$

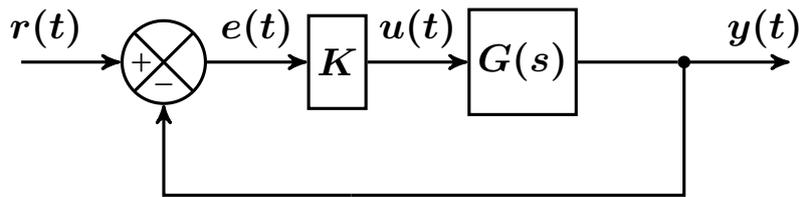


Figura 4.1: Esquema general para la representación del Lugar de Raíces

El objetivo de esta Sección es explicar cómo debe interpretarse la representación gráfica del Lugar de Raíces a través de un ejemplo numérico. Para ello conviene representar la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ en la forma racional de dos polinomios en s , $N(s)$ y $D(s)$,

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.2)$$

Entonces la ecuación característica del sistema realimentado tendrá la forma

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad (4.3)$$

Consideremos la función de transferencia de lazo abierto siguiente:

$$G(s) = \frac{s + c}{(s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.4)$$

En la Figura 4.2 se muestra el Lugar de Raíces para la función de transferencia dada por 4.4 con los siguientes valores:

$$c = \frac{3}{2} \quad (4.5a)$$

$$p = 25 \quad (4.5b)$$

$$\omega_n = 2 \quad (4.5c)$$

$$\zeta = \frac{3}{4} \quad (4.5d)$$

La función de transferencia simulada es:

$$G(s) = \frac{s + 1,5}{s^3 + 28s^2 + 79s + 100} \quad (4.6)$$

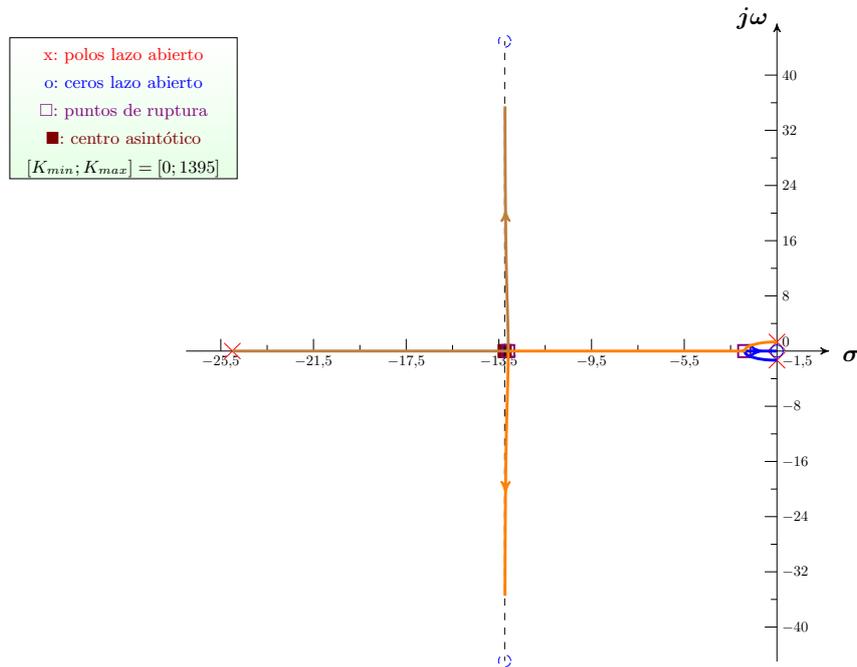


Figura 4.2: Lugar de Raíces de 4.6

Podemos apreciar que hay una simetría del Lugar de Raíces con respecto al eje real. Esto se debe a que los polos complejos aparecen en pares conjugados.

El lugar de raíces se construye a partir de los polos y ceros en lazo abierto, que en este ejemplo numérico son:

$$cero = -c = -\frac{3}{2} \quad (4.7a)$$

$$polo_1 = -p = -25 \quad (4.7b)$$

$$polo_2 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (4.7c)$$

$$polo_3 = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (4.7d)$$

Hay además dos ceros en lazo abierto en el infinito ya que el orden relativo (n^o polos- n^o de ceros) de $G(s)$ es 2.

Puede apreciarse en la Figura 4.2 que los polos de lazo abierto así como los ceros de lazo abierto y los ceros del infinito son terminales. Es sencillo comprender que esto siempre debe ser así debido a la ecuación característica 4.3. Cuando $K = \infty$ entonces $N(s) = 0$ lo que indica que los ceros en lazo abierto son a su vez polos en lazo cerrado para $K = \infty$. Y cuando $K = 0$ se cumple que $D(s) = 0$, lo que indica que los polos en lazo abierto son a su vez polos en lazo cerrado para $K = 0$.

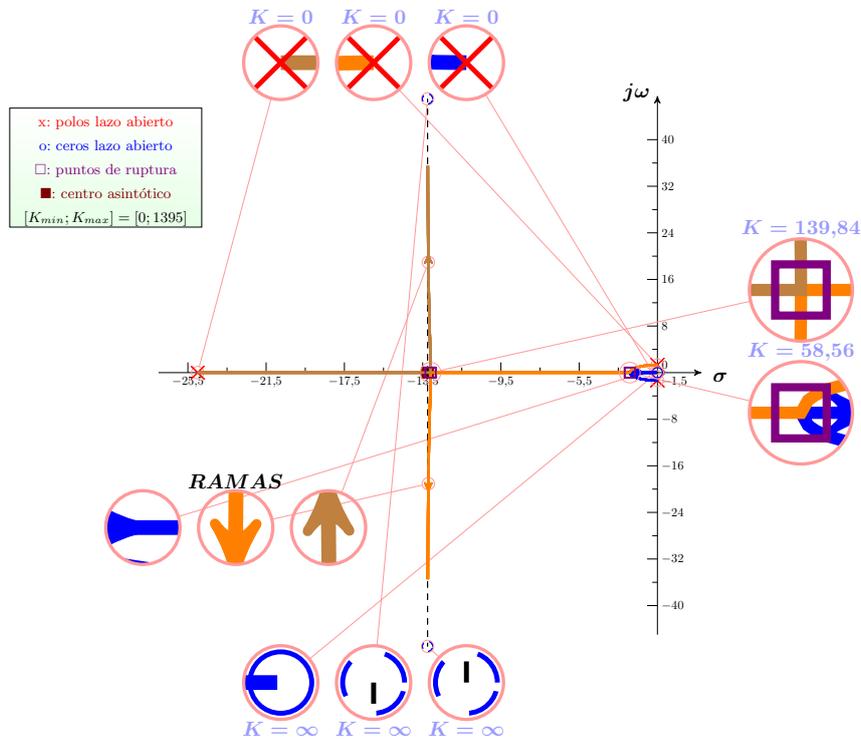


Figura 4.3: Lugar de Raíces de 4.6 señalando las tres ramas y sus puntos notables.

El Lugar de Raíces está formado por un conjunto de ramas obtenidas para distintos valores de $K \in [0, \infty]$, por lo que son ramas salientes de los polos de lazo abierto y ramas entrantes en los ceros de lazo abierto incluyendo los ceros del infinito. En la Figura 4.3 se vuelve a representar el Lugar de Raíces del ejemplo resaltando los puntos más notables.

Hay tantas ramas como polos en lazo cerrado. En consecuencia, puesto que el sistema de control de lazo cerrado del ejemplo es de orden 3 el lugar de raíces constará de tres ramas distintas (azul, naranja y marrón en la Figura 4.3). Cada punto de cada rama representa un único polo de lazo cerrado para un valor concreto de la ganancia K . Para cada valor de K habrá tantos polos como sea el orden del sistema de lazo cerrado, y cada uno de ellos caerá en una rama distinta.

A continuación explicamos las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6 en las que se marcan las ramas para diferentes valores de K .

Supongamos que partimos de los valores de $K = 0$, es decir de los polos en lazo abierto, y aumentamos el valor de K hasta $K = 36,08$. En la Figura 4.4 se estarían recorriendo tres ramas desde los polos de lazo abierto hasta los polos de lazo cerrado $(-23,34; -2,31 + j1,1; -2,31 - j1,1)$.

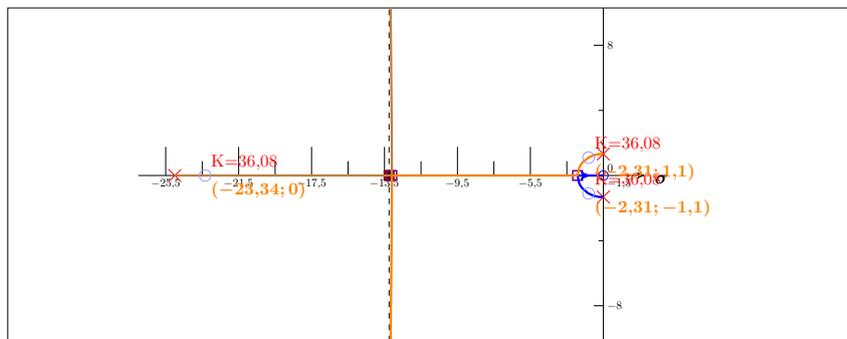


Figura 4.4: Lugar de Raíces para $K = 36,08$

Al aumentar el valor de K hasta $K = 131,65$ como se muestra en la Figura 4.5 los polos complejos de lazo cerrado anteriores se bifurcan en dos polos reales de lazo cerrado, alejándose de los polos de lazo abierto, pero acercándose a los ceros de lazo abierto. Sigue habiendo tres ramas pero ahora los polos de lazo cerrado son reales $(-15,99; -10,17; -1,83)$.

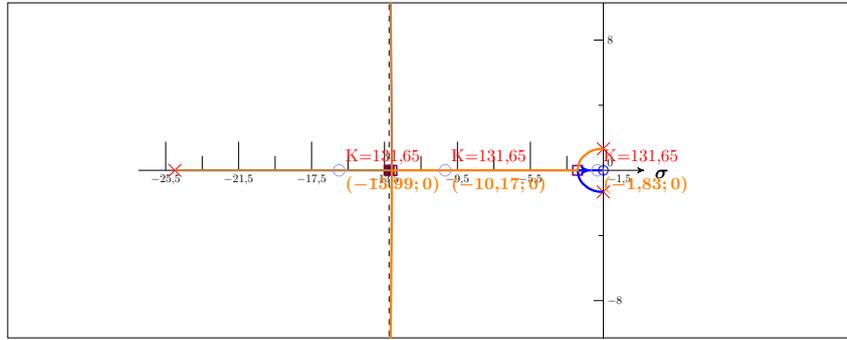


Figura 4.5: Lugar de Raíces para $K = 131,65$

Por último, al seguir aumentando K hasta $K = 300,64$, dos de los polos reales de lazo cerrado anteriores se bifurcan en dos polos complejos conjugados aproximándose a los dos ceros de lazo abierto en el infinito, como se muestra en la Figura 4.6. Los polos en lazo cerrado para este valor de la ganancia K son $(-13,7 + j12,8; -13,7 - j12,8; -1,65)$

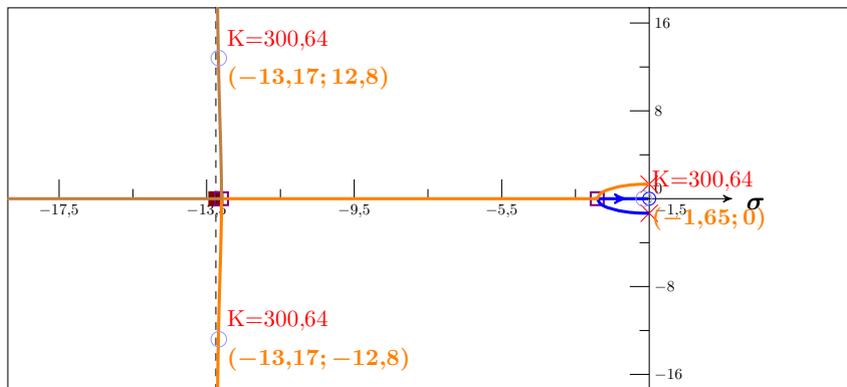


Figura 4.6: Lugar de Raíces para $K = 300,64$

Los puntos de bifurcación se denominan **puntos de ruptura**, y representan polos de lazo cerrado con un orden de multiplicidad superior al primero. En el ejemplo los dos puntos de ruptura son polos de lazo cerrado reales de multiplicidad 2. En la Figura 4.3 se muestran estos polos de lazo cerrado dobles. Uno de ellos se produce para los valores aproximados de $K = 139,84$ y de polo de lazo cerrado $-13,097$, y el otro para los valores aproximados de $K = 58,564$ y de polo de lazo cerrado $-2,9102$.

La posible existencia de puntos de ruptura del ejemplo es evidente ya que un sistema de orden tres tiene tres polos, por lo que puede haber tres polos reales distintos o tres reales con dos de ellos dobles, o dos polos complejos conjugados y uno real. No obstante para algunos valores de los parámetros de la función de transferencia genérica dada por 4.4 puede no haber puntos de ruptura para valores de $K \in [0, \infty]$, en cuyo caso deberá haberlos para valores de $K \in [-\infty, 0]$, es decir para valores de K negativos. El Lugar de Raíces obtenido para valores de K negativos se denomina Lugar de Raíces Complementario.

Para terminar esta introducción podemos observar en la Figura 4.7 que existe una asíntota vertical cuyos extremos son los ceros de lazo abierto en el infinito. En realidad son semiasíntotas, cuyo número coincide con el orden relativo de $G(s)$, que en el ejemplo es dos.

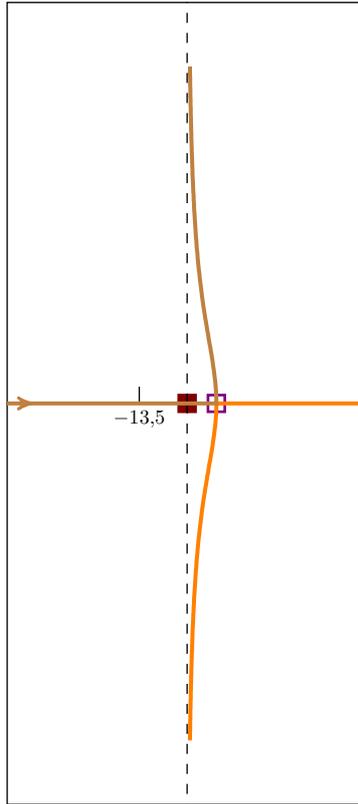


Figura 4.7: Lugar de Raíces: semiasíntotas y centro asintótico

Una particularidad de las semiasíntotas es que siempre se cortan en un único punto llamado centro asintótico o centro de gravedad σ_A que puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$\sigma_A = -\frac{a_1 - b_1}{n - m} \quad (4.8)$$

donde n es el orden de $G(s)$ (número de polos), m es el número de ceros de $G(s)$, a_1 y b_1 son los coeficientes del monomio de grado $n - 1$ y $m - 1$ de los polinomios del denominador y del numerador de $G(s)$ respectivamente.

En la Figura 4.7 se muestra el centro asintótico, cuyo valor exacto obtenido aplicando la fórmula 4.8 al ejemplo ($n = 3$, $m = 1$, $b_1 = 1,5$, $a_1 = 28$) es $\sigma_A = -13,25$.

También es posible calcular de manera exacta las pendientes ϕ_A de las semiasíntotas con respecto al eje real positivo utilizando la siguiente fórmula:

$$\phi_A = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m} \quad (4.9)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

En el ejemplo hay dos semiasíntotas. Dando valores a $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ se obtienen las pendientes de las semiasíntotas $\phi_A \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

4.2. Ejemplo de semiasíntotas y de centro asintótico

Consideremos la función de transferencia en lazo abierto.

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2(s^2 + 5)(s^2 + 6s + 8)(s^2 + 2s + 9)} \quad (4.10)$$

Podemos escribirla en la forma

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^8 + 8s^7 + 34s^6 + 110s^5 + 217s^4 + 350s^3 + 360s^2} \quad (4.11)$$

En la Figura 4.8 se muestra el Lugar de Raíces de esta función de transferencia.

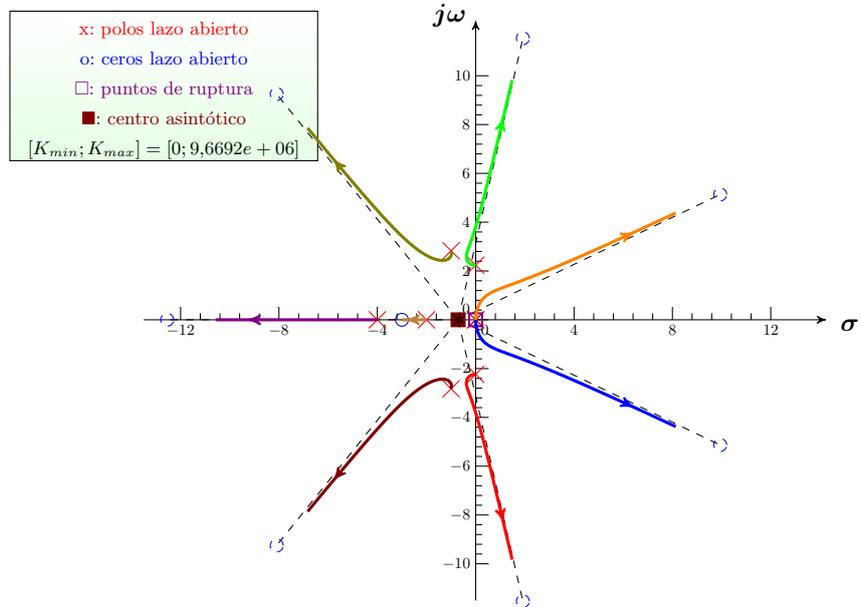


Figura 4.8: Lugar de Raíces: semiasíntotas

Utilizando las fórmulas 4.8 y 4.9 se obtienen los valores exactos del centro asintótico y de las pendientes de las 7 semiasíntotas:

$$\sigma_A = -\frac{5}{7} \approx -0,7143 \quad (4.12a)$$

$$\phi_A \in \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\} \quad (4.12b)$$

4.3. Lugar de Raíces en el eje real

No todas las funciones de transferencia de lazo abierto dan lugar a polos de lazo cerrado reales para $K \geq 0$. Un ejemplo es la función de transferencia siguiente y cuyo Lugar de Raíces se representa en la Figura 4.9,

$$G(s) = \frac{2s^2 - 3,4s + 1,5}{s^2 - 1,6s + 0,8} \quad (4.13)$$

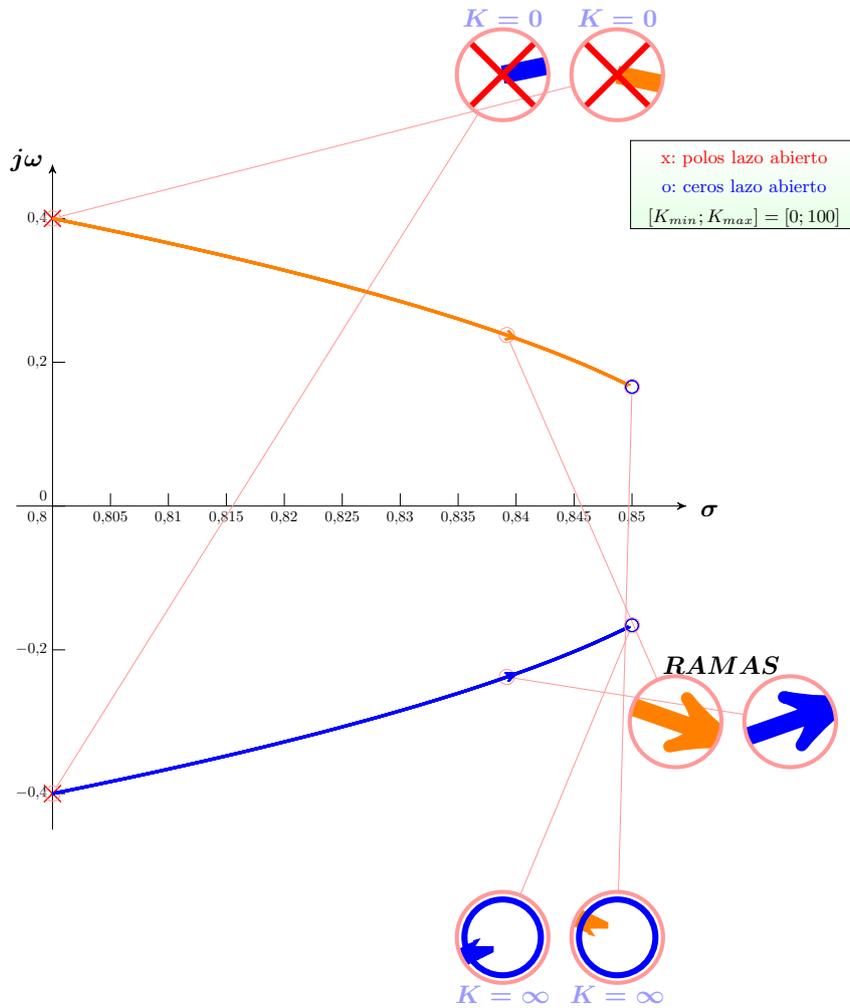


Figura 4.9: Lugar de Raíces de 4.13

El Lugar de Raíces de la Figura 4.10 tiene un único punto en el eje real que es un polo de lazo cerrado doble. Se corresponde con el doble integrador,

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad (4.14)$$

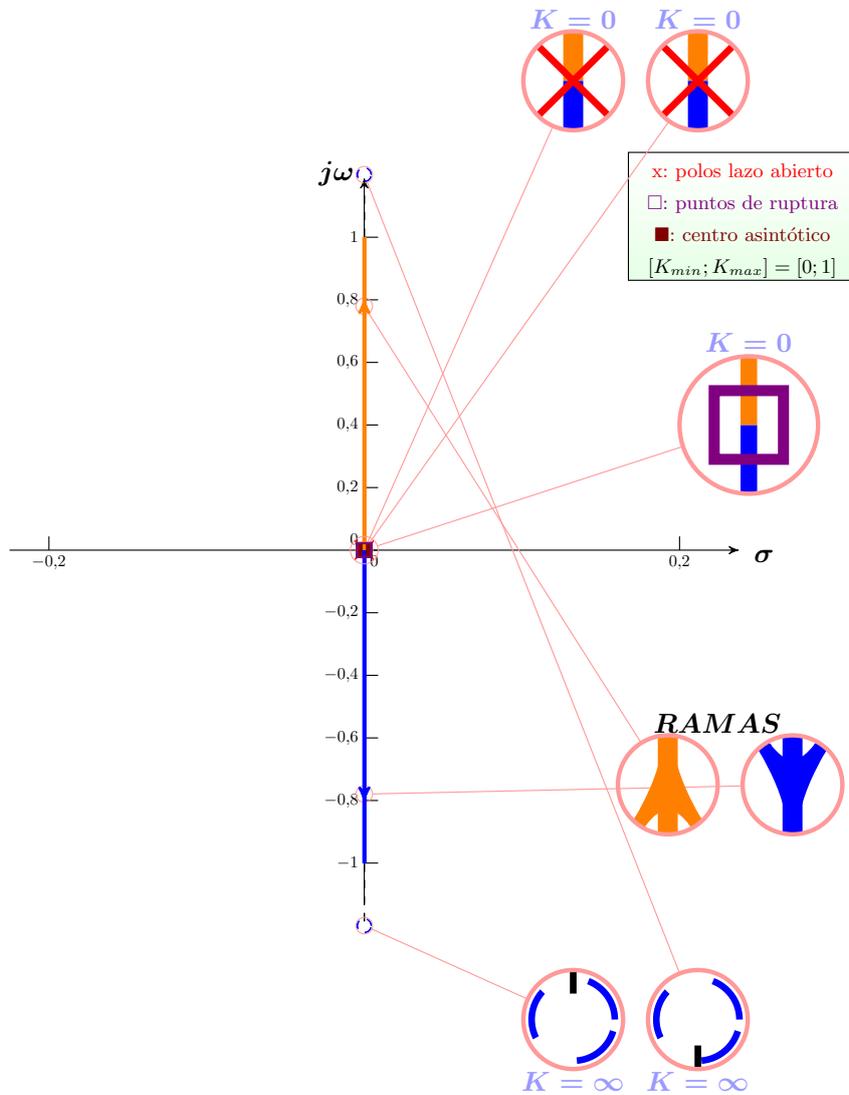


Figura 4.10: Lugar de Raíces de 4.14

El Lugar de Raíces del doble integrador también tiene un punto de ruptura en el origen. En la Figura 4.11 se representa el Lugar de Raíces de la función de transferencia,

$$G(s) = \frac{s - 5}{s(s + 1)} \quad (4.15)$$

En este caso todos los polos de lazo cerrado para $K \geq 0$ son reales.

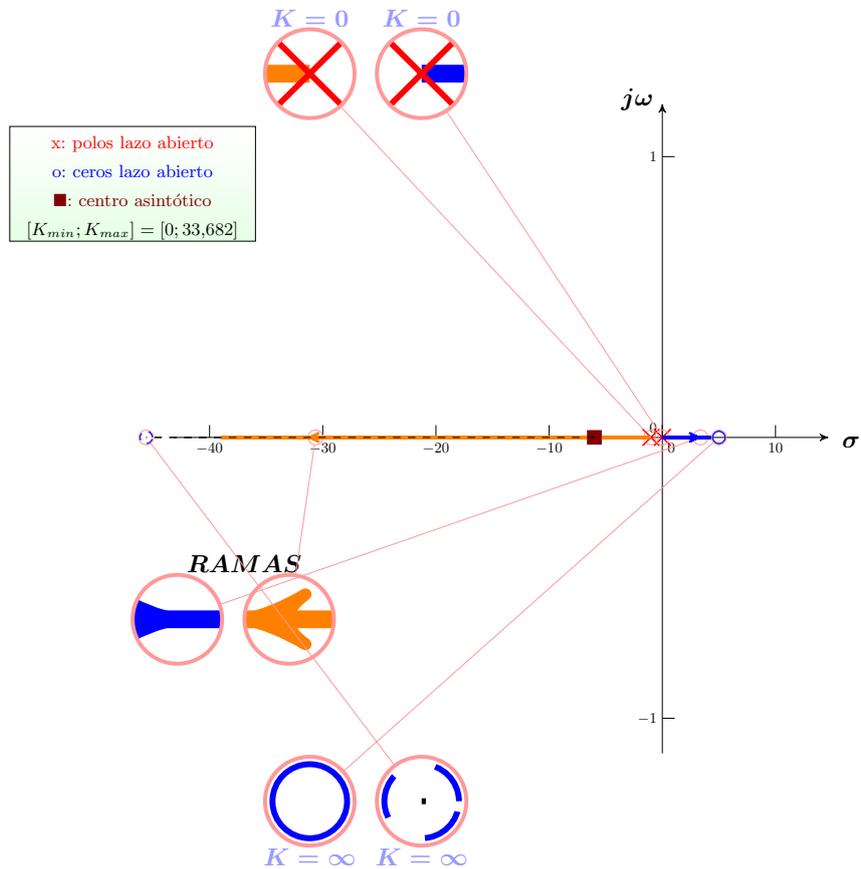


Figura 4.11: Lugar de Raíces de 4.15

Para comprender con claridad qué puntos del lugar de raíces pertenecen al eje real es necesario comprender la idea clave que permite trazar el Lugar de Raíces.

Por un lado la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ puede expresarse en la forma polar

$$G(s) = |G(s)|e^{\phi_G(s)} \quad (4.16)$$

donde $|G(s)|$ es el módulo de $G(s)$ y $\phi_G(s)$ su fase.

Consideremos un punto cualquiera $s^* \in \mathbb{C}$ perteneciente al Lugar de Raíces. Deberá satisfacer la relación 4.1

$$KG(s^*) = -1 \quad (4.17)$$

Esta relación compleja puede expresarse como dos condiciones reales, que llamaremos condición de módulo o magnitud y condición de ángulo respectivamente:

$$|K| = \frac{1}{|G(s^*)|} \quad (4.18a)$$

$$\phi_G(s^*) = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.18b)$$

La condición de ángulo indica que el argumento de $G(s)$ debe ser un múltiplo impar de π para que un punto del plano complejo $s \in \mathbb{C}$ pertenezca al Lugar de Raíces.

Para el trazado del Lugar de Raíces es suficiente con utilizar la condición de ángulo. La condición de módulo puede utilizarse para calcular el valor de la ganancia K para valores concretos del Lugar de raíces como se hizo en la Sección 4.1 con las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6.

La función de transferencia $G(s^*)$ también puede expresarse como

$$G(s^*) = \frac{N(s^*)}{D(s^*)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s^* - c_i)}{\prod_{i=1}^n (s^* - p_i)} \quad (4.19)$$

donde m es el número de ceros de lazo abierto, n el número de polos de lazo abierto, c_i la raíz i -ésima de $N(s^*) = 0$ y p_i la raíz i -ésima de $D(s^*) = 0$.

Expresando los ceros y los polos de lazo abierto en la forma polar,

$$s^* - c_i = r_{c_i} e^{j\psi_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.20a)$$

$$s^* - p_i = r_{p_i} e^{j\phi_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.20b)$$

y teniendo en cuenta que la fase $\phi_G(s^*)$ de $G(s)$ es la suma de fases de cada uno de estos factores, se obtiene la relación de ángulos

$$\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{i=1}^n \phi_i = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.21)$$

donde ϕ_i es la fase de $s^* - p_i$ y ψ_i es la fase de $s^* - c_i$.

La relación 4.21 permite comprender todo lo que se ha visto en la Sección 4.1, pero es especialmente sencilla de aplicar para el estudio de los puntos del Lugar de Raíces pertenecientes al eje real, es decir al estudio de los polos de lazo cerrado reales.

Para ello consideremos el ejemplo de la Figura 4.11, que reproducimos en la Figura 4.12.

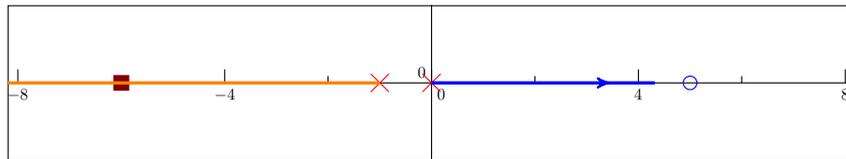


Figura 4.12: Lugar de Raíces de 4.15

Escogiendo un punto de prueba σ con el que recorreremos de derecha a izquierda el eje real, observamos que la contribución de ángulos ϕ_i y ψ_i solo satisfacen la relación 4.21 si σ se encuentra en los intervalos de color de la Figura. Si σ se encuentra a la derecha del cero, las contribuciones del cero y de los dos polos de lazo abierto será de 0 radianes, por lo que no suman un múltiplo impar de π . Pero si σ se encuentra entre el cero y el polo del origen, la contribución del cero será de π radianes, y la de los dos polos de 0 radianes por lo que todos los puntos de ese intervalo deben pertenecer al Lugar de Raíces. Y así sucesivamente.

Podemos concluir que en el momento en que se descubra un intervalo del eje real que pertenezca al Lugar de Raíces, pueden deducirse inmediatamente los restantes ya que los intervalos deben estar alternados.

4.4. Intervalos de estabilidad del Lugar de Raíces

Normalmente interesa conocer los intervalos de valores de K para los cuales el polinomio característico $P(s) = D(s) + KN(s)$ es estable en el sentido de Hurwitz para el caso continuo o estable en el sentido de Schur para el caso discreto. Es evidente que los valores de K para los cuales el Lugar de Raíces corta al eje imaginario $j\omega$ representan extremos de estos intervalos para el caso continuo, mientras que aquellos que cortan el círculo unidad lo son para el caso discreto.

El cálculo de estos valores de K puede hacerse utilizando la Tabla de Routh explicada en la Sección 2.3.

Para el cálculo de los puntos del Lugar de Raíces ω^* que cortan al eje imaginario (caso continuo) bastará con sustituir los valores de K que hacen críticamente estable a $P(s)$ y satisfacen la ecuación

$$D(j\omega^*) + KN(j\omega^*) = 0 \quad (4.22)$$

Obviamente solo serán válidas las soluciones reales $\omega^* \in \mathbb{R}$.

El trazado del Lugar de Raíces es una buena herramienta gráfica para resolver numéricamente este problema.

Apéndices

A. Salida de sistemas libres de segundo orden con condiciones iniciales no nulas

Consideremos el sistema de segundo orden continuo libre dado por la ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

con las condiciones iniciales $[y(0^-), \dot{y}(0^-)]$ y $\alpha, \omega_n \in \mathbb{R}^+$.

Aplicando la Transformada de Laplace se obtiene

$$(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)Y(s) = y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + 2\alpha y(0^-) \quad (\text{A.2})$$

que puede escribirse en la forma

$$Y(s) = \frac{T(s)}{P(s)} \quad (\text{A.3})$$

donde $T(s)$ es el polinomio de condiciones iniciales y $P(s)$ el polinomio característico,

$$T(s) = y(0^-)(s + 2\alpha) + \dot{y}(0^-) \quad (\text{A.4a})$$

$$P(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2 \quad (\text{A.4b})$$

Nos interesará escribir $Y(s)$ en la forma siguiente:

$$Y(s) = \frac{y(0^-)(s + 2\alpha)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} + \frac{\dot{y}(0^-)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\alpha_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} \quad (\text{A.6})$$

Podemos distinguir tres casos según que $\alpha < \omega_n$, $\alpha > \omega_n$ o $\alpha = \omega_n$ que analizamos a continuación por separado. Para caracterizarlos utilizaremos el coeficiente de amortiguamiento ζ donde

$$\alpha = \zeta\omega_n \quad (\text{A.7})$$

A.1. Sistema de segundo orden subamortiguado: $\zeta < 1$

Cuando $\zeta < 1$ podemos hacer

$$\alpha_1 = \alpha + j\omega_d \quad (\text{A.8a})$$

$$\alpha_2 = \alpha - j\omega_d \quad (\text{A.8b})$$

donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

De la relación A.5 extraemos los factores de la derecha, y los escribimos en la forma de fracciones simples,

$$\frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{1}{2j\omega_d} \left[\frac{\alpha_1}{s + \alpha_2} - \frac{\alpha_2}{s + \alpha_1} \right] \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{1}{2j\omega_d} \left[\frac{1}{s + \alpha_2} - \frac{1}{s + \alpha_1} \right] \quad (\text{A.9b})$$

Por lo tanto calculando $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, se obtiene

$$y(t) = \frac{y(0^-)}{2j\omega_d} [\alpha_1 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{-\alpha_1 t}] + \frac{\dot{y}(0^-)}{2j\omega_d} [e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}] \quad (\text{A.10})$$

que puede escribirse en la forma

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t} \frac{\alpha_1 e^{j\omega_d t} - \alpha_2 e^{-j\omega_d t}}{2j\omega_d} + \dot{y}(0^-)e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j\omega_d} \quad (\text{A.11})$$

Por fin puede escribirse en la forma trigonométrica

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (\text{A.12})$$

Podemos escribir la solución A.12 en las componentes trigonométricas.

$$y(t) = \left(\frac{y(0^-)\alpha + \dot{y}(0^-)}{\omega_d} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + y(0^-) e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \quad (\text{A.13})$$

Comparando las relaciones A.12 y A.3 puede comprobarse que

$$\mathcal{L}_- \{ e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \} = \frac{\omega_d}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2} \quad (\text{A.14a})$$

$$\mathcal{L}_- \{ e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2} \quad (\text{A.14b})$$

A.2. Sistema de segundo orden sobreamortiguado: $\zeta > 1$

Cuando $\zeta > 1$

$$\alpha_1 = \alpha + \tilde{\omega}_d \quad (\text{A.15a})$$

$$\alpha_2 = \alpha - \tilde{\omega}_d \quad (\text{A.15b})$$

donde $\tilde{\omega}_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Observando que

$$\omega_d = -j\tilde{\omega}_d \quad (\text{A.16})$$

podemos utilizar las relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas:

$$\sin jx = j \sinh x \quad (\text{A.17a})$$

$$\cos jx = \cosh x \quad (\text{A.17b})$$

Sustituyendo estas relaciones en A.12 se obtiene

$$y(t) = y(0^-)e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\tilde{\omega}_d} \sinh \tilde{\omega}_d t + \cosh \tilde{\omega}_d t \right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\tilde{\omega}_d} e^{-\alpha t} \sinh \tilde{\omega}_d t \quad (\text{A.18})$$

Este resultado conviene expresarlo en la forma de exponenciales, obteniéndolo fácilmente de las expresiones A.9a y A.9b, junto con A.5

$$y(t) = \left(\frac{\alpha_1 y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{2\tilde{\omega}_d} \right) e^{-\alpha_2 t} - \left(\frac{\alpha_2 y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{2\tilde{\omega}_d} \right) e^{-\alpha_1 t} \quad (\text{A.19})$$

A.3. Sistema de segundo orden críticamente amortiguado: $\zeta = 1$

Cuando $\zeta = 1$ se cumple que $\alpha = \omega_n$ y que $\omega_d = 0$.

Calculando el límite cuando $\omega_d \rightarrow 0$ en la ecuación A.12

$$y(t) = \lim_{\omega_d \rightarrow 0} \left\{ y(0^-) e^{-\omega_n t} \left(\frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_d} e^{-\omega_n t} \sin \omega_d t \right\} \quad (\text{A.20})$$

resulta

$$y(t) = y(0^-) e^{-\omega_n t} \left(\omega_n \lim_{\omega_d \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} + 1 \right) + \dot{y}(0^-) e^{-\omega_n t} \lim_{\omega_d \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d} \quad (\text{A.21})$$

Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$y(t) = y(0^-) (\omega_n t + 1) e^{-\omega_n t} + \dot{y}(0^-) t e^{-\omega_n t} \quad (\text{A.22})$$

En este caso, la ecuación diferencial dada por A.1 puede escribirse en la forma

$$\ddot{y}(t) + 2\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$(s + \omega_n)^2 Y(s) = y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + 2\omega_n y(0^-) \quad (\text{A.24})$$

La ecuación A.22 puede escribirse en la forma

$$y(t) = (y(0^-)\omega_n + \dot{y}(0^-)) te^{-\omega_n t} + y(0^-)e^{-\omega_n t} \quad (\text{A.25})$$

Aplicando ahora la Transformada de Laplace a la ecuación A.25 se obtiene

$$Y(s) = (y(0^-)\omega_n + \dot{y}(0^-)) \mathcal{L}_- \{te^{-\omega_n t}\} + y(0^-) \frac{1}{s + \omega_n} \quad (\text{A.26})$$

Comparando las expresiones A.24 y A.26 se obtiene

$$\mathcal{L}_- \{te^{-\omega_n t}\} = \frac{1}{(s + \omega_n)^2} \quad (\text{A.27})$$

B. Resumen de ecuaciones de la salida con controladores P y P-D

Escribiremos la salida de un sistema de segundo orden con una entrada escalón unidad como

$$\tilde{y}(t) = y(t) + y_0(t) \quad (\text{B.1})$$

donde $y(t)$ es la salida bajo condiciones iniciales nulas e $y_0(t)$ la contribución en la salida de las condiciones iniciales.

Las ecuaciones de $y(t)$ y $y_0(t)$ son las siguientes

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) & \zeta < 1 & (\text{B.2a}) \\ 1 - \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\alpha_2 t} + \frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\alpha_1 t} & \zeta > 1 & (\text{B.2b}) \\ 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} & \zeta = 1 & (\text{B.2c}) \end{cases}$$

$$y_0(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \left(\frac{\zeta y(0^-) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + y(0^-) \cos \omega_d t \right) & \zeta < 1 & (\text{B.3a}) \\ \left(\frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) y(0^-) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) e^{-\alpha_2 t} - \left(\frac{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) y(0^-) + \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) e^{-\alpha_1 t} & \zeta > 1 & (\text{B.3b}) \\ y(0^-) e^{-\omega_n t} + \left(\frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n} + y(0^-) \right) \omega_n t e^{-\omega_n t} & \zeta = 1 & (\text{B.3c}) \end{cases}$$

donde

$$\alpha = \zeta \omega_n \quad (\text{B.4a})$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{B.4b})$$

$$\alpha_1 = \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (\text{B.4c})$$

$$\alpha_2 = \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (\text{B.4d})$$

La expresión de $y(t)$ (condiciones iniciales nulas) y de la derivada con respecto al tiempo $\dot{y}(t)$ para $\zeta < 1$ puede escribirse en la forma

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \quad (\text{B.5a})$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (\text{B.5b})$$

donde

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{B.6a})$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (\text{B.6b})$$

La expresión de $\tilde{y}(t)$ y de la derivada con respecto al tiempo $\dot{\tilde{y}}(t)$ para $\zeta < 1$, puede escribirse en la forma

$$\tilde{y}(t) = 1 - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (\text{B.7a})$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi - \varphi_0) \quad (\text{B.7b})$$

donde

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{B.8a})$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{B.8b})$$

$$a = \zeta(1 - y(0^-)) - \frac{\dot{y}(0^-)}{\omega_n} \quad (\text{B.8c})$$

$$b = \sqrt{1 - \zeta^2}(1 - y(0^-)) \quad (\text{B.8d})$$

C. Ecuación de la sobreelongación máxima M_p , del tiempo de pico t_p y del tiempo de subida t_r de los sistemas de segundo orden subamortiguados en su primera forma canónica

En el Apéndice B, expresiones B.5, se recogen las expresiones de $y(t)$ y de su derivada con respecto al tiempo, $\dot{y}(t)$, en el caso subamortiguado,

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_0) \quad (\text{C.1a})$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (\text{C.1b})$$

donde

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{C.2a})$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (\text{C.2b})$$

Igualando a cero la expresión C.1b se obtiene el conjunto de instantes de tiempo en que se producen máximos y mínimos en $y(t)$,

$$\omega_d t_p^* = n\pi \quad (\text{C.3})$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

El tiempo de pico se define como el instante de tiempo t_p en el que se produce el máximo de los máximos. Se dará para $n = 1$, por lo cual

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (\text{C.4})$$

Sustituyendo t_p en la ecuación C.1 se obtiene la sobreelongación máxima $M_p = 1 - y(t_p)$,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)\pi} \quad (\text{C.5})$$

Para el caso sobreamortiguado,

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\alpha t} \sinh \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t \quad (\text{C.6})$$

Las únicas soluciones posibles de $\dot{y}(t) = 0$ son $t = 0$ y $t = \infty$, por lo que no se producen sobreelongaciones.

Para el caso críticamente amortiguado,

$$\dot{y}(t) = \omega_n t e^{-\omega_n t} \quad (\text{C.7})$$

por lo que tampoco se producen sobreelongaciones.

Podemos observar también que, en todos los casos, la pendiente de $y(t)$ en el origen es nula,

$$\dot{y}(0) = 0 \quad (\text{C.8})$$

El tiempo de subida se define como el primer instante de tiempo t_r tal que $y(t_r) = 1$. Resolviendo esta ecuación con la expresión C.1a se obtiene el conjunto de instantes de tiempo siguiente,

$$\omega_d t_r^* = n\pi - \varphi_0 \quad (\text{C.9})$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto,

$$t_r = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega_d} \quad (\text{C.10})$$

D. Ecuación del tiempo de establecimiento t_s de los sistemas de segundo orden subamortiguados en su primera forma canónica

Las envolventes de la curva $y(t)$ son las curvas $\tilde{y}(t)$ tangentes a ella por el exterior,

$$\tilde{y}(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \quad (\text{D.1})$$

La diferencia entre las dos envolventes en el instante de tiempo de establecimiento t_s define aproximadamente el doble del margen de tolerancia ν , por lo que

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_s}\right) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_s}\right) \approx 2\nu \quad (\text{D.2})$$

De aquí que

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\zeta\omega_n} \quad (\text{D.3})$$

De hecho, t_s es menor o igual que el valor del término de la derecha, ya que los puntos de las envolventes están en el exterior de la curva $y(t)$ o son tangentes a ella. El valor exacto cumple que $|1 - y(t_s)| = \nu$.

Para una tolerancia del 2%, $\nu = 0,02$ suele definirse el tiempo de establecimiento como

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{D.4})$$

y para una tolerancia del 5%, $\nu = 0,05$ suele definirse el tiempo de establecimiento como

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{D.5})$$

Estas definiciones siguen aproximadamente la fórmula

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\zeta\omega_n} \quad (\text{D.6})$$

E. Lugar de Raíces: Puntos de ruptura reales

Consideremos la función de transferencia continua de lazo abierto siguiente,

$$G(s) = \frac{s + c}{s^2(s + p)} \quad (\text{E.1})$$

En las Figuras E.1 a E.6 se muestran los lugares de raíces de una secuencia de casos variando el parámetro c con $p = 27$: $c \in \{30, 10, 4, 3, 2, -2\}$.

Esta función de transferencia tiene la particularidad de que produce un punto de ruptura triple cuando se da la relación $p = 9c$ con un valor de ganancia $K = 27c^2$. El punto de ruptura es $s_r = -3c$. (Figura E.4).

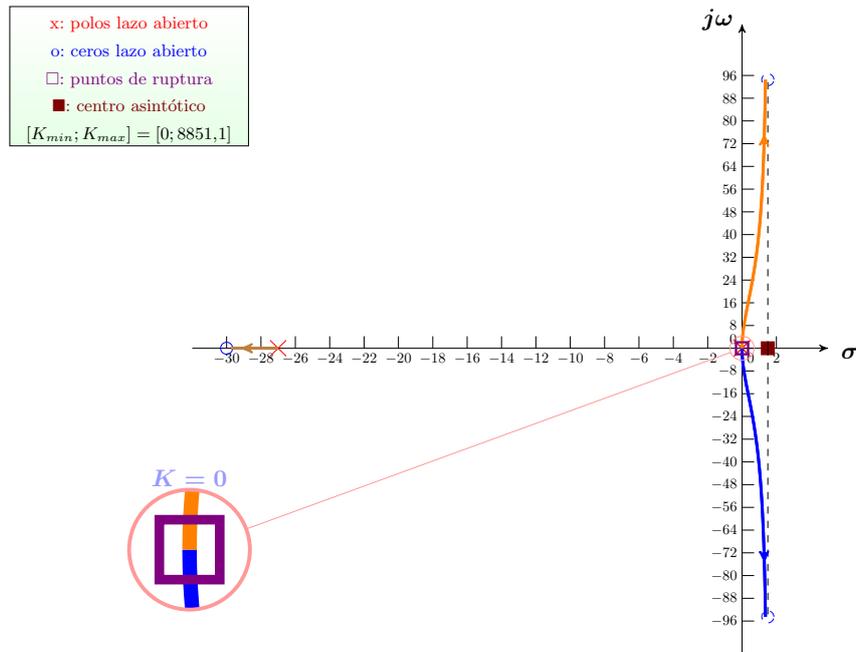


Figura E.1: Puntos de ruptura doble para $K = 0$

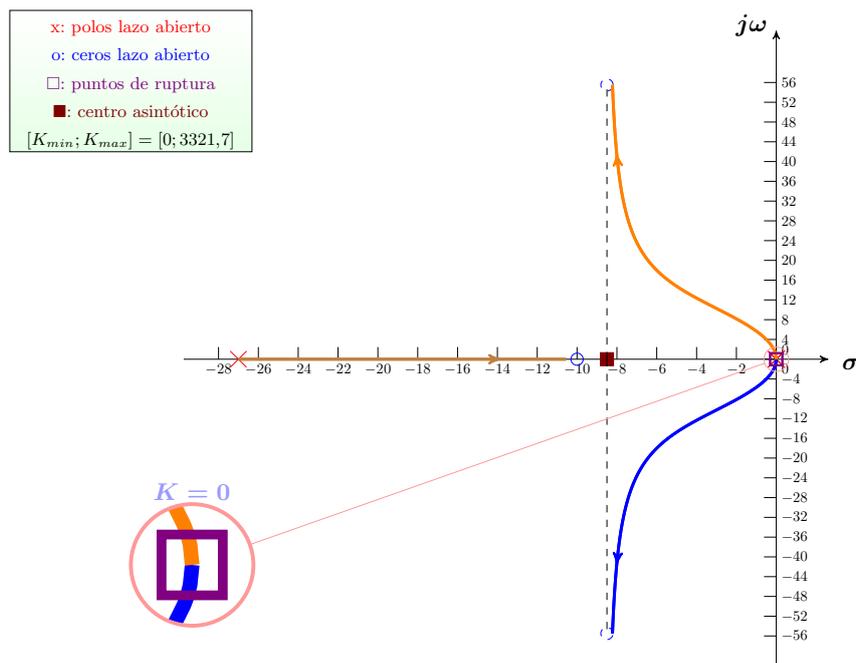


Figura E.2: Punto de ruptura doble para $K = 0$

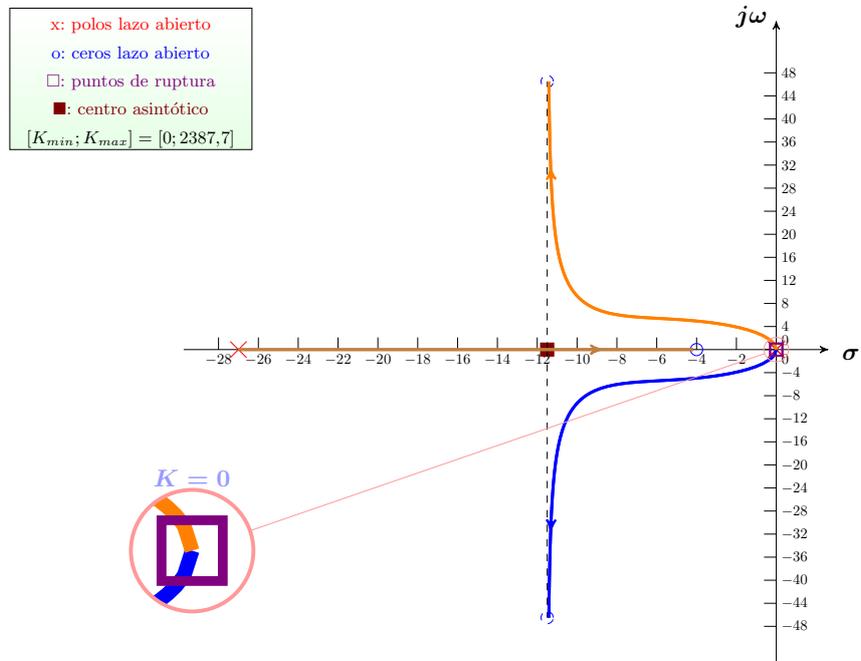


Figura E.3: Punto de ruptura doble para $K = 0$

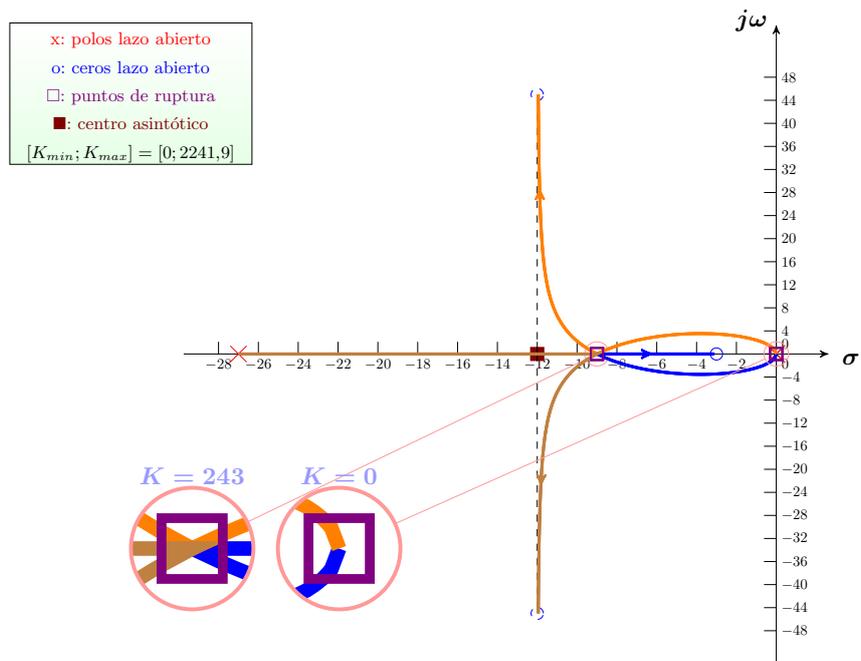


Figura E.4: Puntos de ruptura: doble para $K = 0$ y triple para $K = 243$

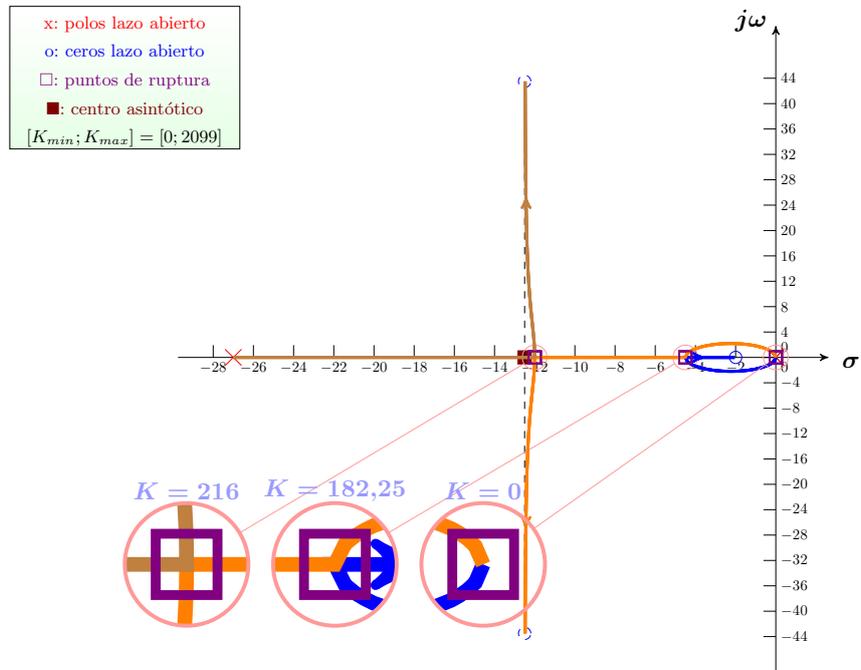


Figura E.5: Puntos de ruptura: dobles para $K = 0$, $K = 182,25$ y $K = 216$

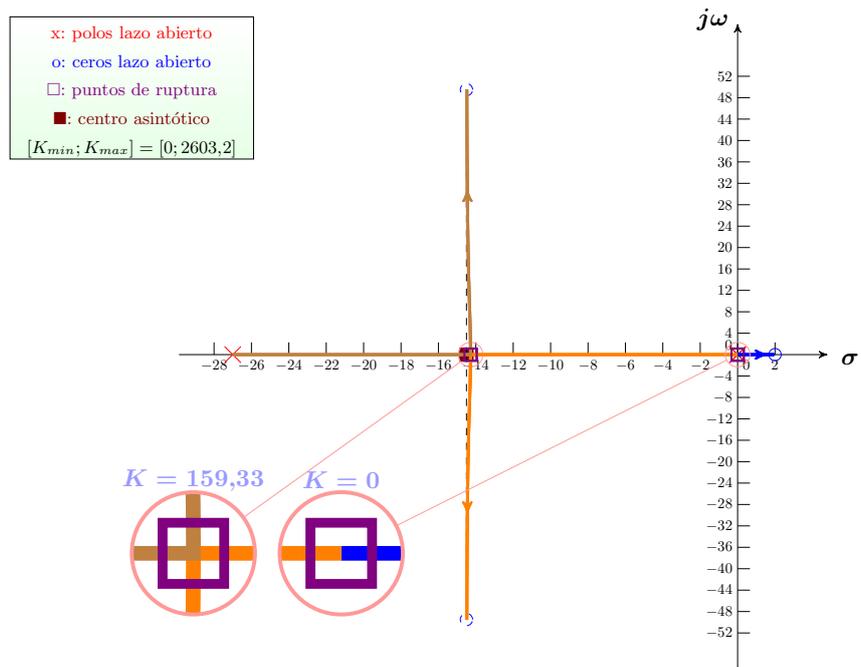


Figura E.6: Puntos de ruptura dobles para $K = 0$ y $K = 159,33$

El siguiente teorema da una condición necesaria para la existencia de puntos de ruptura reales s_r . Una vez calculadas las posibles raíces múltiples de lazo cerrado utilizando el teorema, será una condición suficiente el hecho de que estos posibles puntos de ruptura satisfagan la condición de que $K_r \geq 0$ donde $1 + K_r G(s_r) = 0$.

Teorema de los puntos de ruptura del Lugar de Raíces

Se cumple lo siguiente:

1. Una condición necesaria para que haya puntos de ruptura s_r es que

$$\left. \frac{dK(s)}{ds} \right|_{s=s_r} = 0 \tag{E.2}$$

donde

$$K(s) = -\frac{1}{G(s)} \quad (\text{E.3})$$

Si $N(s)$ no es constante, la condición necesaria puede expresarse en la forma

$$G(s_r) = \frac{\left. \frac{dN(s)}{ds} \right|_{s=s_r}}{\left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_r}} \quad (\text{E.4})$$

Si $N(s)$ es constante entonces la condición necesaria queda en la forma

$$\left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_r} = 0 \quad (\text{E.5})$$

2. Si un punto real del lugar de raíces s_r es de orden de multiplicidad $p > 1$ entonces se deberá cumplir que

$$\left. \frac{dK(s)}{ds} \right|_{s=s_r} = \left. \frac{d^2K(s)}{ds^2} \right|_{s=s_r} = \dots = \left. \frac{d^{p-1}K(s)}{ds^{p-1}} \right|_{s=s_r} = 0 \quad (\text{E.6})$$

Si $\frac{d^{j-1}N(s)}{ds^{j-1}}$ no es constante, la condición necesaria puede expresarse en la forma

$$G(s_r) = \frac{\left. \frac{d^j N(s)}{ds^j} \right|_{s=s_r}}{\left. \frac{d^j D(s)}{ds^j} \right|_{s=s_r}}, \quad j = 1, \dots, p-1 \quad (\text{E.7})$$

Si $\frac{d^{j-1}N(s)}{ds^{j-1}}$ es constante entonces la condición necesaria queda en la forma

$$\left. \frac{d^j D(s)}{ds^j} \right|_{s=s_r} = 0, \quad j = 1, \dots, p-1 \quad (\text{E.8})$$