

# Diseño

Félix Monasterio-Huelin & Álvaro Gutiérrez Martín

25 de marzo de 2020

## Índice

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>2</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Normalización de las funciones de transferencia de lazo cerrado . . . . .	4
<b>2. Sistemas de control de segundo orden</b>	<b>4</b>
2.1. Controlador P . . . . .	5
2.2. Controlador P-D . . . . .	7
2.3. Controlador PD . . . . .	9
2.4. Controlador PI . . . . .	12
2.5. Especificaciones de diseño del régimen permanente del sistema de control realimentado con los controladores P, PD, P-D y PI . . . . .	13
2.6. Especificaciones de diseño del régimen transitorio del sistema de control realimentado con los controladores P y P-D . . . . .	13
<b>3. Sistemas de control de tercer orden</b>	<b>14</b>
3.1. Introducción . . . . .	14
3.2. Controladores PID y PI-D . . . . .	15
3.2.1. Controladores P, PD, P-D y PI como casos particulares de los controladores PID y PI-D . . . . .	17
3.2.2. Normalización de las funciones de transferencia de lazo cerrado . . . . .	18
3.3. Problema de seguimiento con controladores PID, PI-D y PI . . . . .	18
3.4. Salida $y(t)$ para entrada escalón unidad con controladores de tipo PID, PI-D y PI . . . . .	19
3.4.1. Estudio de la respuesta al escalón unidad variando $\beta_2$ . . . . .	24
3.4.2. Estudio de la respuesta al escalón unidad variando $\beta$ . . . . .	25
3.5. Conclusiones de los estudios anteriores sobre la respuesta del sistema de lazo cerrado en el régimen transitorio: algoritmo de diseño del controlador PI-D. Comentarios al diseño de los controladores PI, P-D y P . . . . .	26
<b>4. Sistemas de 2 grados de libertad</b>	<b>29</b>
4.1. Introducción . . . . .	29
4.2. Estructuras de control realimentado . . . . .	30
4.3. Condiciones para la supresión de una señal de perturbación constante . . . . .	32
4.4. Sistema de control realimentado con PID-D . . . . .	34
4.5. Sistema de control realimentado con $D PID$ . . . . .	38
4.6. Salida parcial $y_w(t)$ a la señal de entrada de perturbación constante . . . . .	40
<b>A. Respuesta al escalón unidad de un sistema de tercer orden</b>	<b>44</b>
<b>B. Cancelación cero/polo en los sistemas de tercer orden</b>	<b>46</b>

C. Obtención del tiempo de pico $t_p$ y de la sobreelongación máxima $M_p$ con controladores PID y PI-D, para $\zeta < 1$	49
D. Obtención del tiempo de pico $t_p$ y de la sobreelongación máxima $M_p$ con controladores P, PD y P-D	53
E. Lema de los polinomios coprimos o identidad de Bézout	56
F. Estructuras de un grado de libertad	57
G. Respuesta a la señal de entrada de perturbación constante	59

## Índice de Figuras

1.1. Configuración de diferentes controladores	4
2.1. Controlador P para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno	5
2.2. Salida con controlador P	6
2.3. Controlador P-D para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno	7
2.4. Salida con controlador P-D	8
2.5. Salida con controlador P-D	9
2.6. Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno	9
2.7. Salida con controlador PD	11
2.8. Salida con controlador PD	11
2.9. Controlador PI para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno	12
2.10. Salida con controlador P-D del ejemplo de diseño	14
3.1. Esquemas de control realimentado con PID y PI-D	15
3.2. Polos de lazo cerrado con $\zeta < 1$ : parámetros de diseño $(\zeta, \beta, \beta_2)$ en el plano complejo $s$	17
3.3. Esquemas de control realimentado con PI, PD, P-D y P	17
3.4. Polos de lazo cerrado con $\zeta < 1$ : parámetros de diseño $(\zeta, \beta, \beta_2)$ en el plano complejo $s$	18
3.5. Salida PID con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$	22
3.6. Salida PI-D con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$	22
3.7. Salida PID con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$	23
3.8. Salida PI-D con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$	23
3.9. Salida con controladores PID, PI-D, PI, PD, P-D y P con $\zeta = 0,5$ variando $\beta_2$	24
3.10. Salida con controladores PID, PI-D, PI, PD y P-D con $\zeta = 0,5$ variando $\beta$	25
3.11. Primer paso PI-D: $M_p$	27
3.12. Segundo paso PI-D: $pt_s$	27
3.13. Respuesta al escalón del sistema realimentado con controlador PI-D, que satisface las especificaciones de diseño del régimen transitorio	28
4.1. Sistema de dos entradas: $w(t)$ y $u(t)$	29
4.2. Estructura general del Sistema de Control Realimentado	30
4.3. Principio de superposición de la estructura de la Figura 4.2: (a) Con $w(t) = 0$ (b) Con $r(t) = 0$	31
4.4. Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo Directo: $F_1 = F_2 = G_c(s)$ (b) Lazo Realimentado: $F_1 = 1$ y $F_2(s) = G_c(s)$	31
4.5. Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad: (a) Estructura Paralela (b) Estructura Prealimentada	32
4.6. Sistema de dos entradas	33
4.7. Esquema de control realimentado con PID-D	34
4.8. Salida PID-D con $\beta_2=0.5$ y $\beta=3.5$	37
4.9. Salida PID-D con $\beta_2=3.5$ y $\beta=0.5$	37
4.10. Esquema de control realimentado con $D PID$	38
4.11. Esquema de bloques del sistema de dos grados de libertad con entrada de perturbación.	40
4.12. Salida Perturbación con $\beta_2 = 0,5$ y $\beta = 3,5$	42
4.13. Salida Perturbación con $\beta_2 = 3,5$ y $\beta = 0,5$	42
B.1. Esquemas de control realimentado con cancelación cero/polo con PID, PD y PI	48

F.1. Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo directo, (b) Lazo realimentado . . . . .	58
--	----

## Índice de Tablas

3.1. Parámetros $\beta$ y $\beta_2$ de controladores derivados del PID o PI-D . . . . .	18
3.2. Funciones $r_1, r_2$ y $r_3$ de controladores derivados del PID o PI-D donde $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$ . . . . .	20
4.1. Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad. . . . .	32

# 1. Introducción

En este documento se estudian características de régimen permanente y transitorio para el diseño de sistemas de control de segundo orden, tercer orden y dos grados de libertad. Se estudiarán diferentes controladores, como combinaciones de acciones proporcionales, derivativas e integrales, bajo la configuración general que se muestra en la Figura 1.1. El controlador  $G_{FF}(s)$  hace referencia a la rama prealimentada (*Feedforward* en inglés),  $G_{FI}(s)$  a la rama directa (*Direct*),  $G_{PA}(s)$  a la paralela (*Parallel*) y  $G_{FB}(s)$  a la realimentada (*Feedback*).

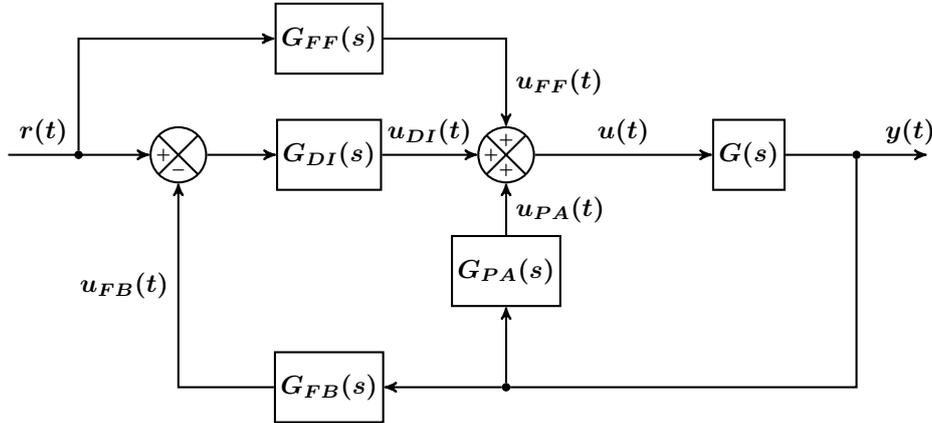


Figura 1.1: Configuración de diferentes controladores

## 1.1. Normalización de las funciones de transferencia de lazo cerrado

En este documento las gráficas en el dominio del tiempo se representan independientes de  $p$ , haciendo un cambio en la escala de tiempo, de tal manera que el eje de abscisas sea  $pt$ .

Hacer  $s = ps_1$  supone un cambio en la escala de tiempo  $t_1 = pt$ . La demostración de esto puede hacerse de la siguiente forma. El teorema del cambio de escala de tiempo afirma que

$$p\mathcal{L}_- \{f(pt)\} = F(s/p) = F(s_1) = \mathcal{L}'_- \{f(t_1)\} \quad (1.1)$$

donde  $f(t)$  es cualquier función en  $t$ ,  $\mathcal{L}_-$  es la Transformada de Laplace con la variable compleja  $s$  y  $\mathcal{L}'_-$  es la Transformada de Laplace con la variable compleja  $s_1$ . Haciendo  $f(t) = r_0(t)$ , la función escalón unidad, entonces  $p/s = 1/s_1$ .

De esta manera, al hacer el cambio de variable  $s = ps_1$ , representaremos  $P(s)$  como  $P(ps_1)$ ,  $G(s)$  como  $G(ps_1)$  y  $H(s)$  como  $H(ps_1)$ .

Con la nueva función de transferencia de lazo cerrado  $H(ps_1)$  puede calcularse cualquier variable en el tiempo, como por ejemplo la salida a la entrada escalón unidad, y hacer una representación gráfica cuyo eje de abscisas sea  $t_1 = pt$ . Así,  $Y(ps_1) = H(ps_1)R(ps_1)$  con  $R(ps_1) = 1/ps_1$ . Aplicando la transformada de Laplace inversa se obtendría  $y(t_1)$ . En las representaciones gráficas que haremos en este escrito se pondrá en el eje de abscisas  $pt$  en vez de  $t_1$  y en eje de ordenadas se pondrá  $y(t)$  en vez de  $y(t_1)$ , con la esperanza de que no se preste a confusión.

## 2. Sistemas de control de segundo orden

En esta Sección se va a analizar el problema de seguimiento de señales de referencia monómicas, de un sistema de control realimentado de un sistema de orden dos, orden relativo dos y tipo uno, con controladores P, PD, P-D y PI, pese a ser este último un sistema de orden tres.

La función de transferencia del sistema a controlar la escribiremos en la forma

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (2.1)$$

donde  $K, p \in \mathbb{R}^+$  son parámetros constantes y positivos del sistema.

Para los controladores P, PD y P-D la función de transferencia de lazo cerrado es un sistema de orden dos y tipo cero. Para el controlador PI la función de transferencia de lazo cerrado es un sistema de orden tres y tipo cero. Con los controladores P, P-D y PI el orden relativo es dos, mientras que con el controlador PD, el orden relativo es la unidad. Con los controladores P y P-D la función de transferencia de lazo cerrado se corresponde con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden, mientras que con el controlador PD, veremos que la función de transferencia de lazo cerrado es una combinación lineal de la primera y segunda forma canónica. El controlador PI se vuelve más complicado y su análisis se relega a la Sección 3.

En esta Sección también se definirán los parámetros de los controladores, y una forma de normalización de la función de transferencia de lazo cerrado, convenientes para el diseño de los controladores.

Se verá, finalmente, un ejemplo numérico de diseño de los controladores P y P-D.

## 2.1. Controlador P

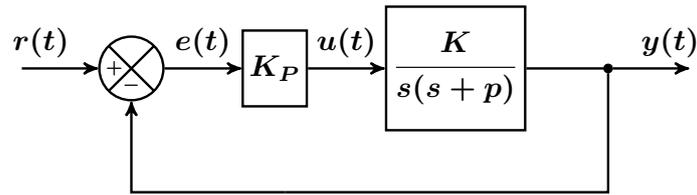


Figura 2.1: Controlador P para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 2.1 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional (P) donde el sistema a controlar es de segundo orden y de tipo uno. La función de transferencia de lazo cerrado  $H_P(s)$  tiene la forma,

$$H_P(s) = \frac{K_p K}{s^2 + ps + K_p K} \quad (2.2)$$

Se puede observar que la Ecuación 2.2 coincide con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden dada por la Ecuación 2.3,

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, si

$$H_P(s) = \mathcal{G}_1(s) \quad (2.4)$$

la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_n = \sqrt{K_p K} \quad (2.5a)$$

$$\zeta = \frac{p}{2\sqrt{K_p K}} = \frac{p}{2\omega_n} \quad (2.5b)$$

Puesto que el numerador contiene un “subpolinomio completo” del denominador de grado  $n_s = 0$ , sabemos que solo se podrá resolver el problema de seguimiento para las señales monómicas de grado  $q < 1$ , es decir, solo para la señal de referencia escalón.

La función de transferencia del error tiene la forma,

$$H_{e,P}(s) = \frac{s(s+p)}{s^2 + ps + K_p K} \quad (2.6)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+p)}{s(s+p) + K_p K} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 p}{K_p K} R(s) \quad (2.7)$$

Vemos que el error de régimen permanente para una señal de referencia escalón es nulo, mientras que es finito para la señal de referencia rampa:

$$e_{P,1}(\infty) = \frac{p}{KpK} = \frac{4\zeta^2}{p} \quad (2.8)$$

Para el diseño del controlador P conviene elegir el parámetro  $\zeta$  en vez de  $K_p$ , aunque el diseño no termine hasta que se asigne un valor a este parámetro.

Para ello conviene expresar la función de transferencia de lazo cerrado  $H_P(s)$ , en función de  $\zeta$ . Puesto que  $p = 2\zeta\omega_n$ ,

$$\omega_n^2 = \frac{p^2}{4\zeta^2} \quad (2.9)$$

De aquí que

$$H_P(s) = \frac{\frac{p^2}{4\zeta^2}}{s^2 + ps + \frac{p^2}{4\zeta^2}} \quad (2.10)$$

Por otro lado, también conviene normalizar la función de transferencia, tal y como se define en la Sección 1.1. Haciendo  $s = ps_1$  se obtiene una función de transferencia de lazo cerrado independiente de  $p$ , que supone un cambio de escala en el tiempo, de  $t$  a  $pt$ ,

$$H_P(s_1) = \frac{1}{s_1^2 + s_1 + \frac{1}{4\zeta^2}} \quad (2.11)$$

En la Figura 2.2 se muestran curvas de la salida para diferentes valores de  $\zeta$ , donde el eje de abscisas es  $pt$ .

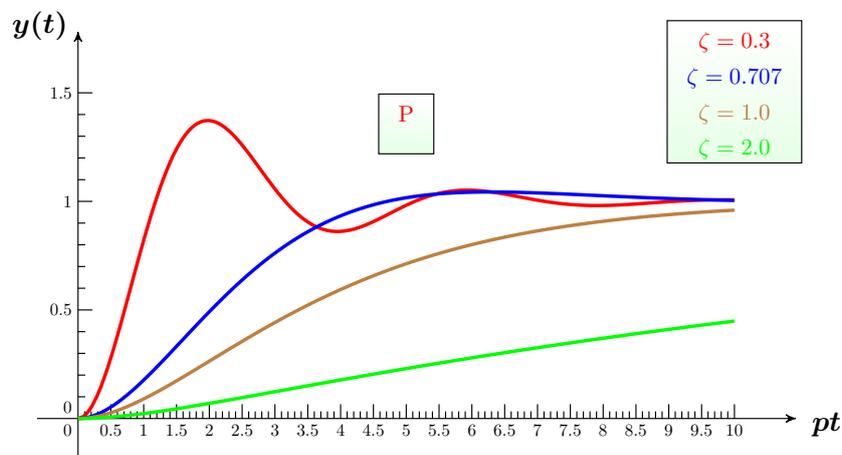


Figura 2.2: Salida con controlador P

## 2.2. Controlador P-D

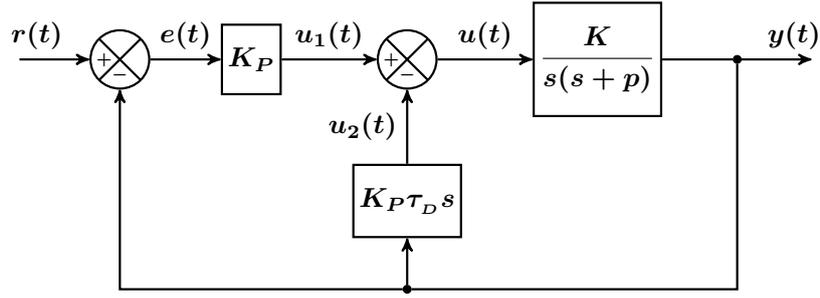


Figura 2.3: Controlador P-D para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 2.3 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador de tipo proporcional y derivativo con el factor proporcional en el lazo directo y el factor derivativo en el lazo paralelo. Utilizaremos la notación P-D para esta clase de controladores.

Este sistema de control tiene una función de transferencia de lazo cerrado  $H_{P-D}(s)$  que coincide con la primera forma canónica de los sistemas de segundo orden, de la misma forma que con el controlador P, pero a diferencia de este tiene dos parámetros de diseño ( $K_p, \tau_D$ ),

$$H_{P-D}(s) = \frac{K_p K}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (2.12)$$

donde la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento vienen dados por

$$\omega_n = \sqrt{K_p K} \quad (2.13a)$$

$$\zeta = \frac{p + K_p K \tau_D}{2\sqrt{K_p K}} = \frac{p + \omega_n^2 \tau_D}{2\omega_n} \quad (2.13b)$$

Puesto que el numerador contiene un "subpolinomio completo" del denominador de grado  $n_s = 0$ , sabemos que solo se podrá resolver el problema de seguimiento para las señales monómicas de grado  $q < 1$ , es decir, solo para la señal de referencia escalón.

La función de transferencia del error tiene la forma,

$$H_{e,P-D}(s) = \frac{s(s + p + K_p K \tau_D)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (2.14)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s + p + K_p K \tau_D)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 (p + K_p K \tau_D)}{K_p K} R(s) \quad (2.15)$$

Vemos que el error de régimen permanente para una señal de referencia escalón es nulo, mientras que es finito para la señal de referencia rampa.

Introduciendo el parámetro  $\beta_2 \neq 0$  tal que  $p = \beta_2 \zeta \omega_n$  podemos expresar  $\tau_D$  en la forma,

$$\tau_D = \frac{\zeta(2 - \beta_2)}{\omega_n} \quad (2.16)$$

En este caso, el error a la rampa puede ser escrito en la forma,

$$e_{P-D,1}(\infty) = \frac{p + K_p K \tau_D}{K_p K} = \frac{2\beta_2 \zeta^2}{p} \quad (2.17)$$

Puede observarse que el Controlador P es un caso particular del Controlador P-D, que se obtiene haciendo  $\beta_2 = 2$ .

Para el diseño del controlador P-D conviene elegir los parámetros  $(\zeta, \beta_2)$  en vez de  $(K_p, \tau_D)$ , aunque el diseño no termine hasta que se asignen valores a estos últimos parámetros.

Para ello conviene expresar la función de transferencia de lazo cerrado  $H_{P-D}(s)$  en función de los nuevos parámetros. Por definición  $p = \beta_2 \zeta \omega_n$ , por lo que,

$$\omega_n^2 = \frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2} \quad (2.18)$$

De aquí que

$$H_{P-D}(s) = \frac{\frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2}}{s^2 + \frac{2p}{\beta_2} s + \frac{p^2}{\beta_2^2 \zeta^2}} \quad (2.19)$$

Por otro lado, también conviene normalizar la función de transferencia, tal y como se define en la Sección 1.1. Haciendo  $s = p s_1$  se obtiene una función de transferencia de lazo cerrado independiente de  $p$ , que supone un cambio de escala en el tiempo, de  $t$  a  $pt$ ,

$$H_{P-D}(s_1) = \frac{1}{s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2}} \quad (2.20)$$

En las Figuras 2.4 y 2.5 se muestran curvas de la salida para diferentes valores de  $\zeta$  donde el eje de abscisas es  $pt$ . En la Figura 2.4 con  $\beta_2 = 0,5$ , y en la Figura 2.5 con  $\beta_2 = 2,5$ . Pueden compararse con la Figura 2.2 realizada con el controlador P, y aunque en ambos casos se trate de un sistema de segundo orden en su primera forma canónica, puede apreciarse que hay diferencias cuantitativas en la respuesta al escalón unidad, pero la variación de las curvas con  $\beta_2$  no altera la forma cualitativa de las curvas.

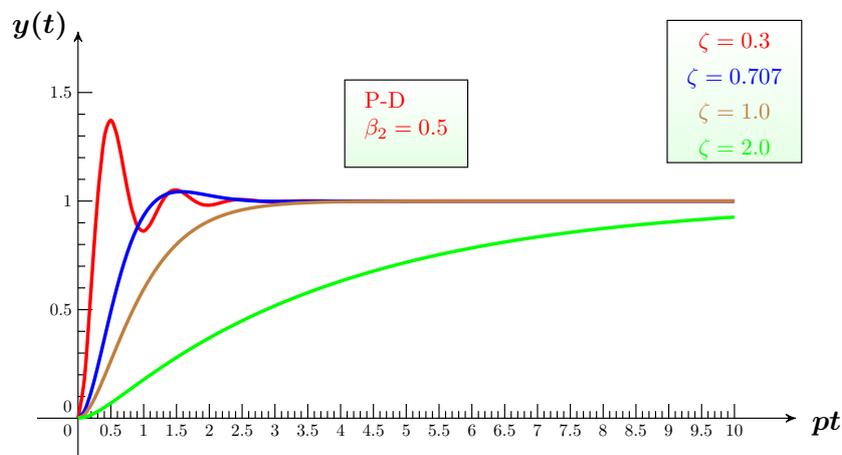


Figura 2.4: Salida con controlador P-D

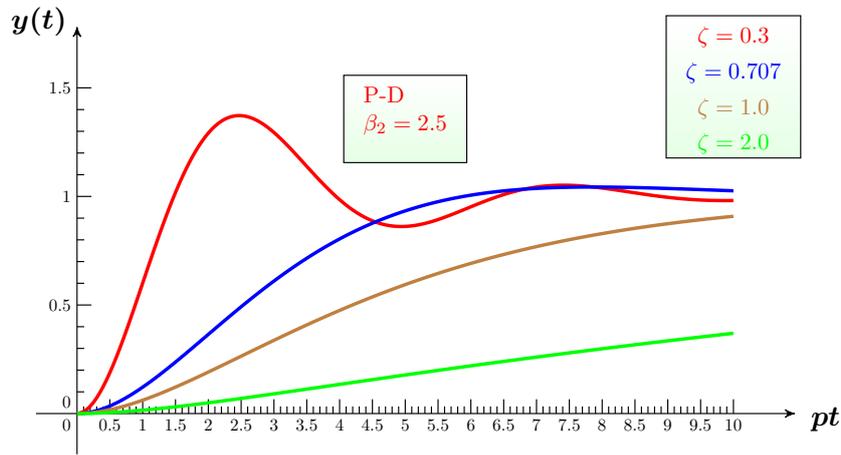


Figura 2.5: Salida con controlador P-D

### 2.3. Controlador PD

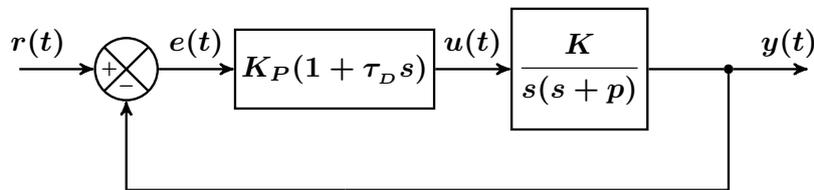


Figura 2.6: Controlador PD para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 2.6 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador proporcional y derivativo en el lazo directo (PD). La función de transferencia de lazo cerrado  $H_{PD}(s)$  tiene la forma

$$H_{PD}(s) = \frac{K_p K (1 + \tau_D s)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D) s + K_p K} \quad (2.21)$$

Como ocurre con el controlador P-D, es posible elegir independientemente la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento, ya que se dispone de dos parámetros de diseño ( $K_p, \tau_D$ ). Sin embargo, el sistema de lazo cerrado no coincide con la primera forma canónica  $\mathcal{G}_1(s)$  de los sistemas de segundo orden porque tiene un cero en  $s = -\frac{1}{\tau_D}$ .

Podemos ver que la función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control de la Figura 2.6, con un PD en el lazo directo, es una combinación lineal de las dos formas canónicas de los sistemas de segundo orden. De hecho,

$$H_{PD}(s) = \mathcal{G}_1(s) + \left(2\zeta - \frac{p}{\omega_n}\right) \mathcal{G}_2(s) \quad (2.22)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{K_p K} \quad (2.23a)$$

$$\zeta = \frac{p + K_p K \tau_D}{2\sqrt{K_p K}} = \frac{p + \omega_n^2 \tau_D}{2\omega_n} \quad (2.23b)$$

Puesto que el numerador contiene un “subpolinomio completo” del denominador de grado  $n_s = 0$  ( $K_p K$ ), sabemos que solo se podrá resolver el problema de seguimiento para las señales monómicas de grado  $q < 1$ , es decir, solo para la señal de referencia escalón.

La función de transferencia del error tiene la forma,

$$H_{e,PD}(s) = \frac{s(s+p)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} \quad (2.24)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+p)}{s^2 + (p + K_p K \tau_D)s + K_p K} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 p}{K_p K} R(s) \quad (2.25)$$

Vemos que el error de régimen permanente para una señal de referencia escalón es nulo, mientras que es finito para la señal de referencia rampa.

Utilizando el parámetro  $\beta_2 \neq 0$  tal que  $p = \beta_2 \zeta \omega_n$ , se obtiene que:

$$\omega_n = \sqrt{K K_p} \quad (2.26a)$$

$$\tau_D = \frac{\zeta(2 - \beta_2)}{\omega_n} \quad (2.26b)$$

En este caso, el error a la rampa puede ser escrito en la forma,

$$e_{PD,1}(\infty) = \frac{p}{K_p K} = \frac{\beta_2^2 \zeta^2}{p} \quad (2.27)$$

Además, utilizando el parámetro  $\beta_2 \neq 0$  puede verse la dependencia de  $H_{PD}(s)$  con la segunda forma canónica de una forma más sencilla,

$$H_{PD}(s) = \mathcal{G}_1(s) + \zeta(2 - \beta_2)\mathcal{G}_2(s) \quad (2.28)$$

La relación dada por 2.23b puede escribirse en la forma

$$\tau_D = \frac{\zeta(2 - \beta_2)}{\omega_n} \quad (2.29)$$

por lo que si se impone que  $\tau_D > 0$ , se deberá cumplir que  $\beta_2 < 2$ , ya que admitimos que  $\zeta > 0$  y  $\omega_n > 0$ . En consecuencia, el coeficiente de la segunda forma canónica será positivo. Por la misma razón,  $\tau_D < 0$  si  $\beta_2 > 2$ . Normalmente se escogerá  $\tau_D > 0$  ya que en caso contrario el sistema de control de lazo cerrado tendrá un cero inestable, y por lo tanto será de fase no mínima. Este hecho plantea algunos problemas que no vamos a analizar aquí.

Cuando  $\beta_2 = 2$  el efecto de la segunda forma canónica desaparece. Pero este caso se corresponde con  $\tau_D = 0$ , por lo que en realidad se trataría de un controlador P, y no PD. Como consecuencia, podemos entender que al añadir un factor derivativo al controlador del lazo directo, es inevitable que aparezca el efecto debido a la segunda forma canónica. Puesto que  $p$  es un valor conocido, entonces, fijando el valor de  $\zeta$  y  $\beta_2$ , se obtendría el valor de  $\omega_n$ , y puesto que  $K$  también es conocido, se obtendría el valor de  $K_p$ , quedando resuelto el problema de diseño del controlador.

Haciendo el cambio de variable  $s = p s_1$ , puede normalizarse la función de transferencia de lazo cerrado, de tal manera que dependa de los parámetros de diseño ( $\zeta, \beta_2$ ), como se hizo con el controlador P-D,

$$H_{PD}(s_1) = \frac{1}{s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2}} + \frac{2 - \beta_2}{\beta_2} \frac{s_1}{s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2}} \quad (2.30)$$

En las Figuras 2.7 y 2.8 se muestran curvas de la salida para diferentes valores de  $\zeta$  donde el eje de abscisas es  $pt$ . En la Figura 2.7  $\beta_2 = 0,5$  y en la Figura 2.8  $\beta_2 = 2,5$ . En este último caso  $\beta_2 > 2$  por lo que tiene un cero positivo, razón por la cual aparece una sub-elongación en las proximidades del origen. Vamos a demostrar, a continuación, que la pendiente de la curva en el origen es negativa, a diferencia de la pendiente de la salida del sistema realimentado con el controlador P-D, que es nula. La variación de las curvas con  $\beta_2$  altera ligeramente la forma cualitativa de las curvas.

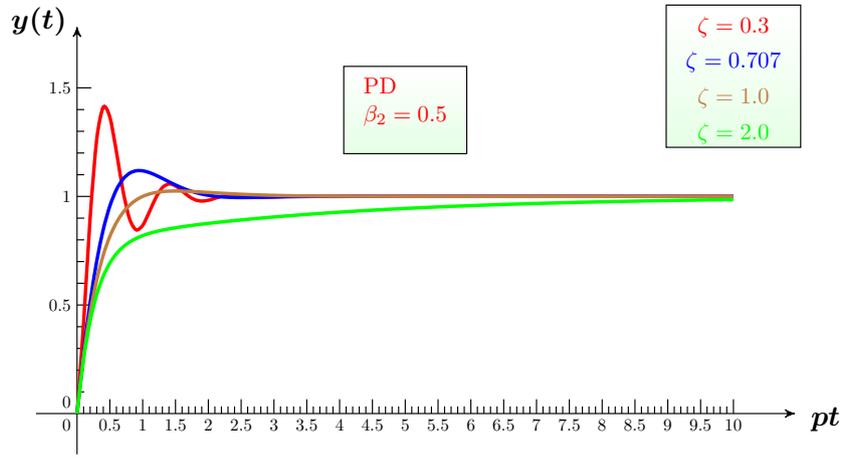


Figura 2.7: Salida con controlador PD

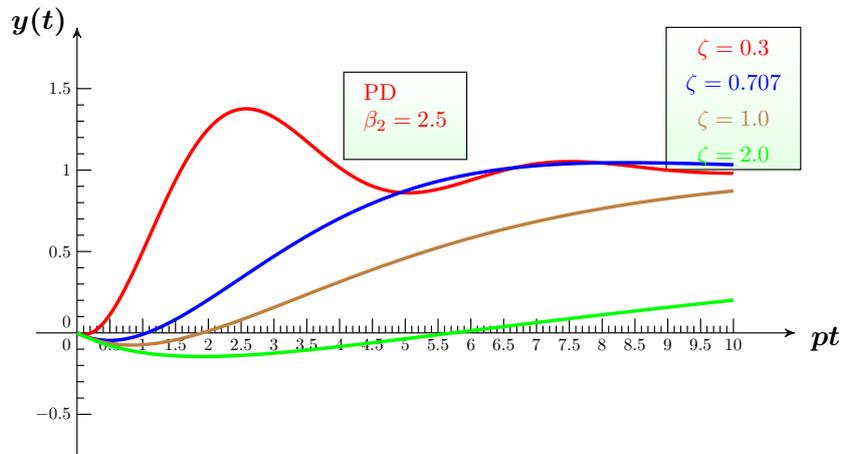


Figura 2.8: Salida con controlador PD

Teniendo en cuenta las respuestas al escalón de cada la primera forma canónica dada por la Ecuación 2.31 y de la segunda forma canónica dada por la Ecuación 2.32,

$$y(t) = \left( 1 - e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \right) r_0(t) \quad (2.31)$$

$$y(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right) r_0(t) \quad (2.32)$$

se obtiene la respuesta al escalón de sistema de control realimentado con un controlador PD en el lazo directo,

$$y_{PD}(t) = 1 - e^{-\alpha t} \left( \frac{\zeta(\beta_2 - 1)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \quad (2.33)$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo y simplificando, se obtiene,

$$\dot{y}_{PD}(t) = \omega_n e^{-\alpha t} \left( \frac{\zeta^2(\beta_2 - 2) + 1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t - \zeta(\beta_2 - 2) \cos \omega_d t \right) \quad (2.34)$$

La pendiente en el origen es

$$\dot{y}_{PD}(0) = -\omega_n \zeta (\beta_2 - 2) \quad (2.35)$$

Como vemos, si  $\beta_2 > 2$ , entonces  $\dot{y}_{PD}(0) < 0$ .

Con los controladores P y P-D, la pendiente en el origen siempre es nula, pero con el controlador PD puede ser positiva o negativa según sea el valor de  $\beta_2$ , pero nunca nula, ya que el caso  $\beta_2 = 2$  se corresponde con el controlador P.

## 2.4. Controlador PI

Pese a no ser un sistema de segundo orden, se presenta en esta sección el controlador Proporcional-Integral para su comparación con los anteriores. Posteriormente, en la Sección 3 se analizará el controlador PI en detalle.

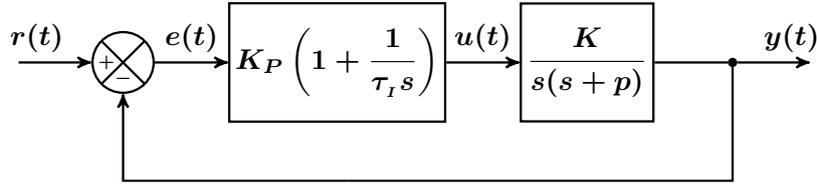


Figura 2.9: Controlador PI para un sistema continuo de segundo orden y tipo uno

En la Figura 2.9 se muestra el esquema de bloques de un sistema de control realimentado con un controlador Proporcional-Integral (PI). La función de transferencia de lazo cerrado  $H_{PI}(s)$  tiene la forma

$$H_{PI}(s) = \frac{K_p K \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + K_p K \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} \quad (2.36)$$

Puesto que el numerador contiene un "subpolinomio completo" del denominador de grado  $n_s = 1$ , sabemos que solo se podrá resolver el problema de seguimiento para las señales monómicas de grado  $q < 2$ , es decir, solo para las señales de referencia escalón y rampa.

La función de transferencia del error tiene la forma,

$$H_{e,PI}(s) = \frac{s^2(s+p)}{s^2(s+p) + K_p K \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} \quad (2.37)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e_{PI}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2(s+p)}{s^2(s+p) + K_p K \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_I p s^3}{K_p K} R(s) \quad (2.38)$$

Vemos que el error de régimen permanente para señales de referencia escalón y rampa son nulos, mientras que para una señal de referencia parabólica es finito, de valor

$$e_{PI,2}(\infty) = \frac{\tau_I p}{K_p K} \quad (2.39)$$

Introduciendo el parámetro de diseño  $\beta_2$  tal que  $p = \beta_2 \zeta \omega_n$ , puede demostrarse que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K K_p}{2(\beta_2 - 2)\zeta^2 + 1}} \quad (2.40a)$$

$$\tau_I = \frac{\zeta \left( 2 + \frac{1}{(\beta_2 - 2)\zeta^2} \right)}{\omega_n} \quad (2.40b)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  la frecuencia natural de un sistema de orden dos.

El error a la parábola puede ser escrito en la forma

$$e_{PI,2}(\infty) = \frac{\tau_I p}{K_p K} = \frac{\beta_2^3 \zeta^2}{p^2(\beta_2 - 2)} \quad (2.41)$$

La respuesta en el tiempo para distintos valores de  $\beta_2$  se analizará en la Sección 3 como un sistema de tercer orden.

## 2.5. Especificaciones de diseño del régimen permanente del sistema de control realimentado con los controladores P, PD, P-D y PI

En los ejemplos anteriores se ha demostrado que si la especificación de régimen permanente exige que el error a la rampa sea nulo, no puede ser elegido un sistema de control realimentado con controladores P, PD o P-D, pero sí podría ser elegido con un controlador PI.

Si la especificación de régimen permanente no fuese tan exigente, sino que fuese que el error a la rampa sea finito, pero con un valor  $e_1(\infty) \leq K_{e1}$ , donde  $K_{e1}$  sea una constante prefijada, sería necesario estudiar las relaciones 2.8, 2.17 y 2.27, a partir de las cuales se obtendría una relación de posibles valores de  $\zeta$  y  $\beta_2$ . Por ejemplo, si se define  $K_{e1} = 2/p$ , entonces,

$$\zeta^2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{Controlador P} \quad (2.42a)$$

$$\beta_2 \zeta^2 \leq 1 \quad \text{Controlador P-D} \quad (2.42b)$$

$$\beta_2^2 \zeta^2 \leq 2 \quad \text{Controlador PD} \quad (2.42c)$$

## 2.6. Especificaciones de diseño del régimen transitorio del sistema de control realimentado con los controladores P y P-D

Con los controladores P y P-D, las características de régimen transitorio se corresponden con las de un sistema de segundo orden en su primera forma canónica, por lo que se rigen por las ecuaciones:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (2.43a)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (2.43b)$$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega_d} \quad (2.43c)$$

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{1}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\zeta\omega_n} \quad (2.43d)$$

donde  $\nu$  es la tolerancia, y

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.44a)$$

$$\cos \varphi_0 = \zeta \quad (2.44b)$$

Eliminando  $\omega_n$  para expresarlas en función de los parámetros de diseño  $(\zeta, \beta_2)$ ,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (2.45a)$$

$$pt_p = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi \beta_2 \quad (2.45b)$$

$$pt_r = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)(\pi - \varphi_0) \beta_2 \quad (2.45c)$$

$$pt_s \approx \left(\ln\left(\frac{1}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right) \beta_2 \quad (2.45d)$$

Por lo tanto, la sobreelongación máxima  $M_p$  es la misma con los controladores P y P-D, ya que solo depende de  $\zeta$ , pero  $t_p, t_r$  y  $t_s$  dependen linealmente de  $\beta_2$ , por lo que el controlador P-D tiene un grado de libertad más que el controlador P para variar estas especificaciones de diseño.

Por ejemplo, si se especifica un valor de  $M_p$  del 15% de la señal de referencia, una tolerancia  $\nu$  del 2% de la señal de referencia y un tiempo de establecimiento de  $pt_s \approx 5$ , se obtendrían los siguientes valores de los parámetros de diseño  $(\zeta, \beta_2)$ ,

$$\zeta = 0,5169 \quad (2.46a)$$

$$\beta_2 = 1,2293 \quad (2.46b)$$

El valor de la frecuencia natural se obtiene de  $p = \beta_2 \zeta \omega_n$ ,

$$\omega_n = 1,5737p \quad (2.47)$$

Ahora, utilizando las expresiones dadas por 2.13a y 2.16, se obtienen los parámetros del controlador  $(K_p, \tau_D)$  en función de los parámetros del sistema  $(K, p)$ ,

$$K_p = \frac{2,4765p^2}{K} \quad (2.48a)$$

$$\tau_D = \frac{0,2532}{p} \quad (2.48b)$$

En la Figura 2.10 se muestra la curva de respuesta para este diseño del controlador P-D.

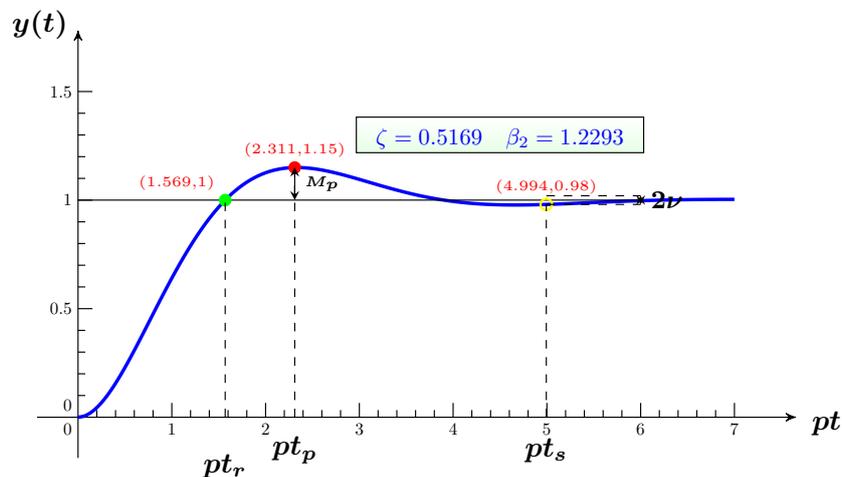


Figura 2.10: Salida con controlador P-D del ejemplo de diseño

Los controladores PD y PI no se corresponden con las de un sistema de segundo orden en su primera o segunda forma canónica y su diseño se estudiará como casos particulares de los sistemas de tercer orden en la Sección 3.

### 3. Sistemas de control de tercer orden

#### 3.1. Introducción

En esta Sección se estudian los sistemas de tercer orden. Se hará a partir de estructuras de control realimentado con controladores de tipo PID y PI-D, con un sistema a controlar de función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (3.1)$$

donde  $K, p \in \mathbb{R}^+$ .

El objetivo principal es diseñar los controladores cuando se establecen especificaciones de régimen permanente y de régimen transitorio. Para ello se introduce un conjunto de parámetros de diseño  $(\zeta, \beta, \beta_2)$ , y se obtienen relaciones de estos parámetros con los parámetros de los controladores  $(K_p, \tau_D, \tau_I)$ .

Se estudian también los casos particulares derivados de los controladores PID y PI-D, que son los controladores PI, PD, P-D y P vistos en la Sección 2.

Todo el estudio se realiza normalizando las funciones de transferencia de lazo cerrado, de tal manera que puedan realizarse gráficas de curvas donde el eje de tiempos sea  $pt$  en vez de  $t$ .

En los Apéndices se encuentran las demostraciones de las expresiones y resultados matemáticos que se utilizan en el cuerpo principal del documento.

A diferencia de los sistemas de segundo orden expresados en su primera forma canónica, los sistemas de tercer orden no permiten obtener expresiones analíticas de la sobreelongación máxima  $M_p$  de la respuesta al escalón del sistema de control. Esto es debido a que la ecuación que permite obtener el tiempo de pico  $t_p$  es una ecuación trascendente, lo que obliga a utilizar métodos numéricos para su resolución. En consecuencia, para la satisfacción de las especificaciones del régimen transitorio, es necesario realizar simulaciones. Al final de la Sección se propone un algoritmo que permite resolver el problema de diseño de manera exacta para el controlador PI-D, utilizando los parámetros de diseño  $(\zeta, \beta, \beta_2)$ .

También se estudia en un Apéndice el tiempo de pico y la sobreelongación máxima de la respuesta al escalón con el controlador PD. En este caso la función de transferencia de lazo cerrado es de orden dos, pero no puede expresarse en su primera forma canónica, sino como una combinación lineal de sistemas de orden dos expresados en su primera y segunda forma canónica. La razón para incluirlo en esta Sección, es porque aunque la sobreelongación máxima  $M_p$  de la respuesta al escalón del sistema de control tenga una solución analítica, no es sencillo obtener los parámetros de diseño a partir de las especificaciones de régimen transitorio. Como consecuencia, el diseño del controlador PD se vuelve tan complejo como el diseño de los controladores PID y PI-D, requiriendo la realización de simulaciones.

### 3.2. Controladores PID y PI-D

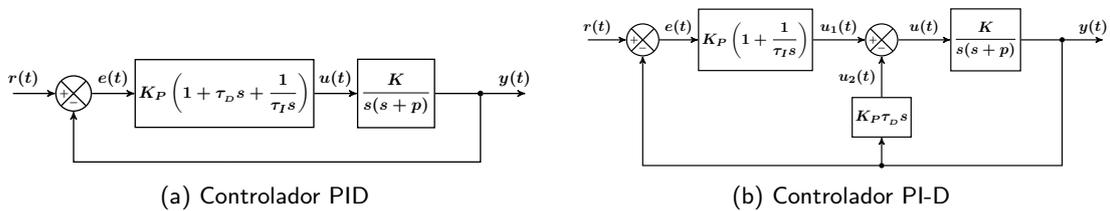


Figura 3.1: Esquemas de control realimentado con PID y PI-D

La función de transferencia de lazo cerrado de un PID en el lazo directo (ver Figura 3.1a), tiene la forma

$$H_{PID}(s) = \frac{KK_P\tau_D \left( s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_D \left( s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)} \quad (3.2)$$

La función de transferencia de lazo cerrado de un PI en el lazo directo y un D en el lazo paralelo (PI-D, ver Figura 3.1b), tiene la forma

$$H_{PI-D}(s) = \frac{KK_P \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_D \left( s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)} \quad (3.3)$$

Puede comprobarse que en ambos casos la función de transferencia de lazo cerrado a bajas frecuencias es la unidad, es decir,

$$H(0) = 1 \quad (3.4)$$

El sistema de control de lazo cerrado con controladores PID y PI-D es un sistema de tercer orden cuyo polinomio característico  $P(s)$  escribiremos en la forma

$$P(s) = s^3 + (p + KK_P\tau_D) s^2 + KK_P s + \frac{KK_P}{\tau_I} \quad (3.5)$$

El polinomio puede escribirse también en la forma,

$$P(s) = (s + c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (3.6)$$

donde  $c, \zeta, \omega_n \in \mathbb{R}^+$ .

Cuando no hay factor integral,  $P(s)$  es de grado dos, dando lugar a los casos particulares de sistemas de control realimentado con controladores P, PD o P-D,

$$P(s) = s^2 + (p + KK_P\tau_D) s + KK_P \quad (3.7a)$$

$$P(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (3.7b)$$

Como vemos, los parámetros del controlador  $\{K_P, \tau_D, \tau_I\}$  pueden ser sustituidos por los parámetros  $\{c, \zeta, \omega_n\}$ . Sin embargo, interesará introducir los parámetros de diseño  $\beta$  y  $\beta_2$ , definidos de la siguiente forma:

$$p = \beta_2\zeta\omega_n \quad (3.8a)$$

$$c = \beta\zeta\omega_n \quad (3.8b)$$

Entonces, los parámetros del controlador  $\{K_P, \tau_D, \tau_I\}$  pueden ser sustituidos por los parámetros de diseño  $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$ .

Identificando los polinomios 3.5 y 3.6, y teniendo en cuenta las definiciones dadas por 3.8, puede comprobarse que los parámetros  $\{K_P, \tau_D, \tau_I\}$  de los controladores PID y PI-D, dependen de los parámetros  $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$  de la siguiente forma,

$$K_P = \frac{p^2 \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta_2^2 K} \quad (3.9a)$$

$$\tau_D = \frac{\beta_2 (\beta - \beta_2 + 2)}{p \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)} \quad (3.9b)$$

$$\tau_I = \frac{\beta_2 \zeta^2 \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta p} \quad (3.9c)$$

Las ganancias de los factores Derivativo e Integral de los controladores PID y PI-D vienen dados por

$$K_D = K_P\tau_D = \frac{p(\beta - \beta_2 + 2)}{\beta_2 K} \quad (3.10a)$$

$$K_I = \frac{K_P}{\tau_I} = \frac{\beta p^3}{\beta_2^3 \zeta^2 K} \quad (3.10b)$$

En la Figura 3.2 se muestran los polos de lazo cerrado en el plano complejo, indicando cómo pueden variar de posición al variar los parámetros de diseño  $(\zeta, \beta, \beta_2)$ . Podemos apreciar que la variación de  $\zeta$  solo afecta a la parte imaginaria de los polos complejos conjugados (flecha de color azul), y que la variación de  $\beta$  solo afecta al polo real (flecha de color magenta), mientras que la variación de  $\beta_2$  afecta a los tres polos de manera proporcional. Por ejemplo, al aumentar  $\beta_2$  los polos de lazo cerrado se aproximan al origen simultáneamente, y radialmente de manera lineal (flecha de color verde).

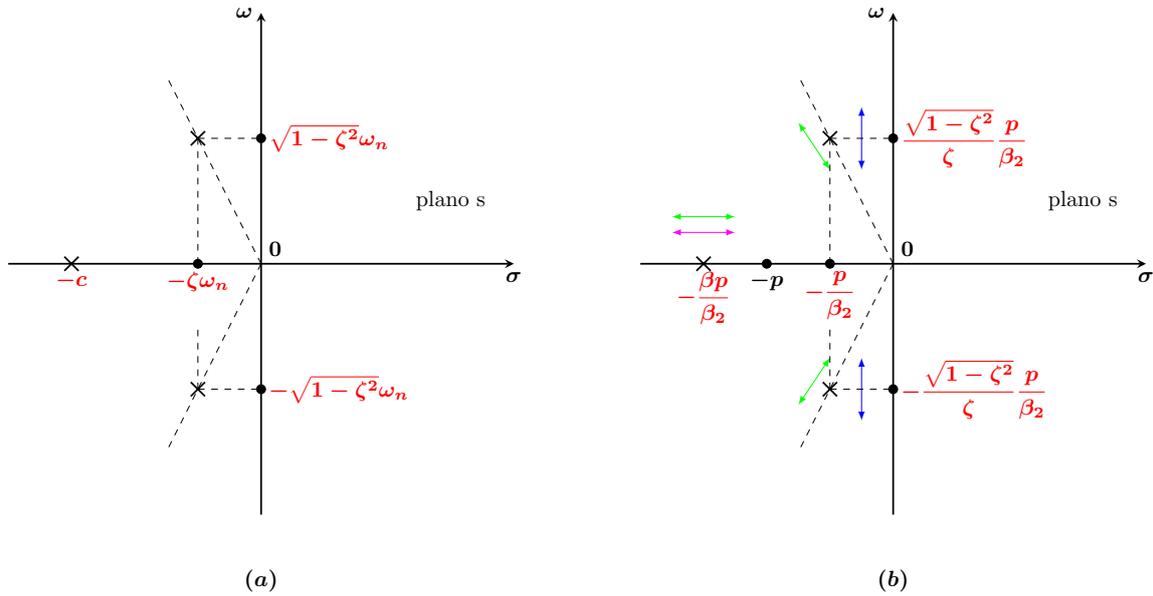


Figura 3.2: Polos de lazo cerrado con  $\zeta < 1$ : parámetros de diseño ( $\zeta, \beta, \beta_2$ ) en el plano complejo  $s$

### 3.2.1. Controladores P, PD, P-D y PI como casos particulares de los controladores PID y PI-D

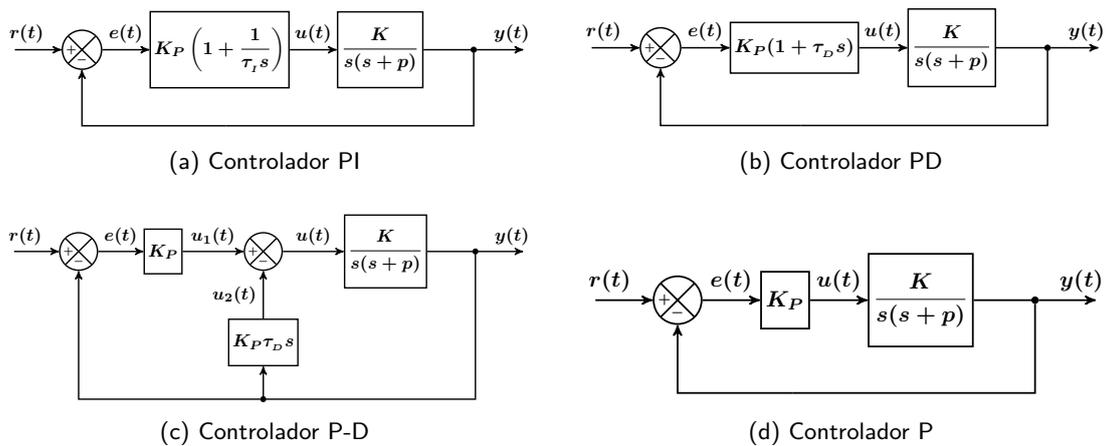


Figura 3.3: Esquemas de control realimentado con PI, PD, P-D y P

En la Tabla 3.1 se muestran los valores que deben tomar  $\beta$  y  $\beta_2$  para obtener controladores que son casos particulares de los controladores PID o PI-D, que son los que se muestran en los esquemas de bloques de la Figura 3.3. Los controladores PD y P-D son casos particulares de los controlador PID y PI-D respectivamente. Los controladores PI y P son casos particulares tanto del controlador PID como del controlador PI-D.

Para que el sistema de lazo cerrado sea estable deben ser los sus polos, por lo que  $c > 0$ , de aquí que  $\beta > 0$ . Puesto que el controlador PI satisface que  $\beta = \beta_2 - 2$ , entonces se deberá cumplir que  $\beta_2 > 2$ .

Controlador	$\beta \in \mathbb{R}^+$	$\beta_2 \in \mathbb{R}^+$
P	0	2
PD	0	$\neq 2$
P-D	0	$\neq 2$
PI	$= \beta_2 - 2 \neq 0$	$= \beta + 2 \neq 2$
PID	$\neq \beta_2 - 2 \neq 0$	$\neq \beta + 2 \neq 2$
PI-D	$\neq \beta_2 - 2 \neq 0$	$\neq \beta + 2 \neq 2$

Tabla 3.1: Parámetros  $\beta$  y  $\beta_2$  de controladores derivados del PID o PI-D

### 3.2.2. Normalización de las funciones de transferencia de lazo cerrado

Como se ha visto en la Sección 1.1, una de las ventajas de utilizar los parámetros  $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$  es que pueden realizarse representaciones gráficas en el dominio del tiempo independientes de  $p$ , ya que puede hacerse un cambio en la escala de tiempo, de tal manera que el eje de abscisas sea  $pt$ . Entonces, en los sistemas de tercer orden estudiados en esta Sección,  $P(s)$  puede escribirse en la forma

$$P(ps_1) = p^3 \left( s_1 + \frac{\beta}{\beta_2} \right) \left( s_1^2 + \frac{2}{\beta_2} s_1 + \frac{1}{\beta_2^2 \zeta^2} \right) \quad (3.11)$$

donde se ha hecho  $s = ps_1$ .

Como vemos, los polos resultantes de esta transformación de escala dependen de los parámetros  $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$ . En la Figura 3.4, se compara cómo se desplazan los polos en lazo cerrado en el plano  $s$  y en el plano  $s_1$ .

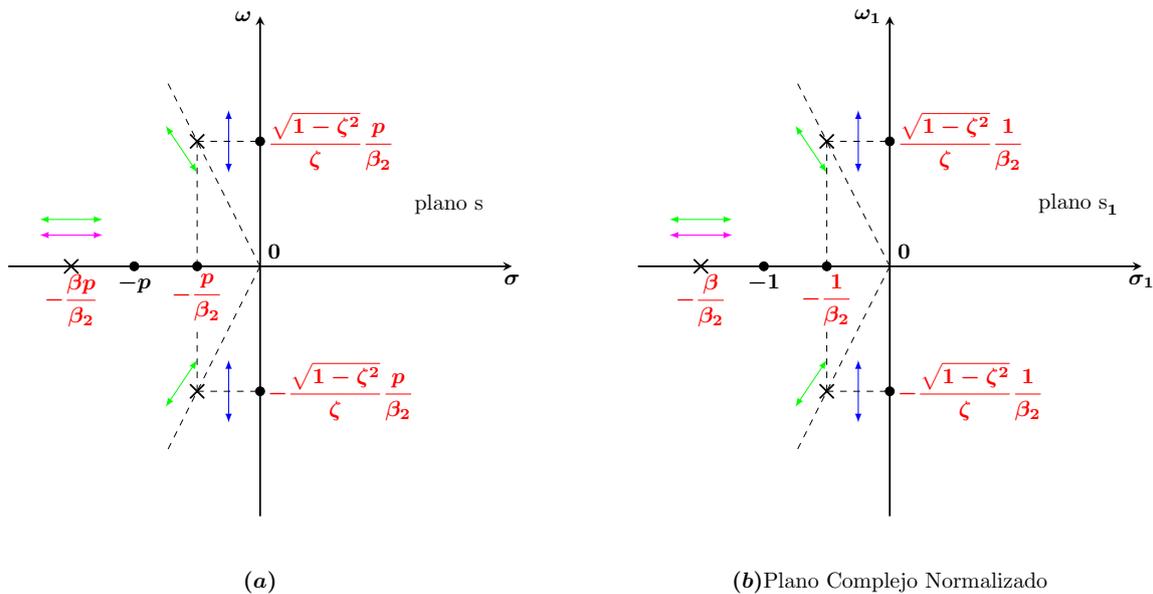


Figura 3.4: Polos de lazo cerrado con  $\zeta < 1$ : parámetros de diseño  $(\zeta, \beta, \beta_2)$  en el plano complejo  $s$

### 3.3. Problema de seguimiento con controladores PID, PI-D y PI

Puede observarse que la función de transferencia de lazo cerrado con los controladores PID y PI-D de la Figura 3.1, dados por la Ecuación 3.2 y la Ecuación 3.3, tienen en el numerador un "subpolinomio completo" del denominador de grado  $n_s = 1$ , que es  $KK_P \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)$ . Como consecuencia, solo puede resolverse el problema de seguimiento de señales de referencia monómicas causales de grado  $q < 2$ , es decir, para las señales de referencia escalón y rampa, produciéndose un error en régimen permanente finito y distinto de cero para la parábola.

La función de transferencia del error tiene la forma

$$H_{e,PID}(s) = \frac{s^2(s+p)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_D \left( s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)} \quad (3.12a)$$

$$H_{e,PI-D}(s) = \frac{s^2(s+p + KK_P\tau_D)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_D \left( s^2 + \frac{s}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D\tau_I} \right)} \quad (3.12b)$$

Aplicando el teorema del valor final,

$$e_{PID}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p\tau_I s^3}{KK_P} R(s) \quad (3.13a)$$

$$e_{PI-D}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(p + KK_P\tau_D)\tau_I s^3}{KK_P} R(s) \quad (3.13b)$$

En consecuencia, solo se resuelve el problema de seguimiento para las señales de referencia escalón y rampa, produciéndose un error en régimen permanente finito y distinto de cero para la parábola,

$$e_{PID,2}(\infty) = \frac{p\tau_I}{KK_P} \quad (3.14a)$$

$$e_{PI-D,2}(\infty) = \frac{(p + KK_P\tau_D)\tau_I}{KK_P} \quad (3.14b)$$

Los parámetros de los controladores ( $K_p, \tau_I, \tau_D$ ) pueden ser sustituidos por los parámetros de diseño ( $\beta, \beta_2, \zeta$ ) de acuerdo con las expresiones dadas por 3.9. Por lo tanto,

$$e_{PID,2}(\infty) = \frac{\beta_2^3 \zeta^2}{\beta p^2} \quad (3.15a)$$

$$e_{PI-D,2}(\infty) = \frac{\beta_2^2 (\beta + 2) \zeta^2}{\beta p^2} \quad (3.15b)$$

Puesto que el controlador PI es un caso particular que se obtiene haciendo  $\beta_2 = \beta + 2$ , entonces

$$e_{PI,2}(\infty) = \frac{(\beta + 2)^3 \zeta^2}{\beta p^2} \quad (3.16)$$

Supongamos que la especificación de diseño de régimen permanente consiste en definir un límite al error en régimen permanente para la señal de referencia parabólica,  $e_2(\infty) \leq K_{e2}$ . Por ejemplo, si se define  $K_{e2} = 5/p^2$ , entonces se cumplirá una relación entre los parámetros de diseño de los controladores,

$$\frac{\beta_2^3 \zeta^2}{\beta} \leq 5 \quad \text{Controlador PID} \quad (3.17a)$$

$$\frac{\beta_2^2 (\beta + 2) \zeta^2}{\beta} \leq 5 \quad \text{Controlador PI-D} \quad (3.17b)$$

$$\frac{(\beta + 2)^3 \zeta^2}{\beta} \leq 5 \quad \text{Controlador PI} \quad (3.17c)$$

### 3.4. Salida $y(t)$ para entrada escalón unidad con controladores de tipo PID, PI-D y PI

En el Apéndice A se obtiene la expresión de la salida  $y(t)$  para una entrada escalón unidad de un sistema de tercer orden, en función de los parámetros  $\{\zeta, \beta, \omega_n\}$  de manera genérica.

En esta Sección se aborda el estudio con los controladores PID y PI-D, y sus casos particulares PI, PD P-D y P. La función de transferencia de lazo cerrado  $H(s)$  de los diferentes controladores puede expresarse en la forma de descomposición en fracciones simples siguiente,

$$H(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (3.18)$$

donde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ , son funciones que, en general, dependen de  $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$  con  $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$ , y en particular, alguna de ellas o varias puede ser nula. Por ejemplo, si  $r_3 = 0$ , el sistema será de segundo orden, por lo que se corresponde con los sistemas de control con controladores PD, P-D o P. En la Tabla 3.2 se recogen las funciones  $r_1, r_2, r_3$  para diferentes controladores.

Controlador	$r_1$	$r_2$	$r_3$
P	0	$\omega_n^2$	0
P-D	0	$\omega_n^2$	0
PD	$\zeta(2 - \beta_2)\omega_n$	$\omega_n^2$	0
PI	$\frac{2\beta^2\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$	$\frac{\left(\beta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\omega_n^2}{Q(\beta)}$	$\frac{-2\beta^2\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$
PI-D	$\frac{2\beta^2\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$	$\frac{\left(\beta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\omega_n^2}{Q(\beta)}$	$\frac{-2\beta^2\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$
PID	$\frac{\left(\left(\frac{1}{\zeta^2} + 2(\beta_2 - 2)\right)\beta - (\beta_2 - 2)\frac{1}{\zeta^2}\right)\zeta\omega_n}{Q(\beta)}$	$\frac{\left((\beta_2 - 2)\beta + \frac{1}{\zeta^2}\right)\omega_n^2}{Q(\beta)}$	$\frac{\left(\beta^2 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\omega_n^2}{Q(\beta)}$

Tabla 3.2: Funciones  $r_1, r_2$  y  $r_3$  de controladores derivados del PID o PI-D donde  $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$

Se pueden dar algunos casos anómalos para los cuales no pueden utilizarse las tablas anteriores, que son de dos tipos:

1.  $Q(\beta) = 0$ . Se trata de la situación en que hay un polo doble o triple reales que coincide con el polo  $-c = -\beta\zeta\omega_n$ .

Los valores de  $\beta$  para los cuales  $Q(\beta) = 0$  son

$$\beta = \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta} \quad (3.19)$$

Las raíces de  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ , para  $\zeta > 1$ , son las siguientes

$$s = -\omega_n \left( \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (3.20)$$

El sistema de control de lazo cerrado tendrá un polo doble en el caso  $\zeta > 1$ , cuando  $\beta = \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta}$ .

El polo de lazo cerrado será triple cuando  $\zeta = 1$ , y en consecuencia,  $\beta = 1$ .

2. Cancelación cero/polo de lazo cerrado. Un caso particular es la cancelación de un cero del controlador situado en el lazo directo con el polo  $-p$  de  $G(s)$ . Estos se estudian en el Apéndice B. Esta cancelación solo puede ocurrir con los controladores PID, PI y PD.

Teniendo en cuenta la relación 3.4, es decir, que  $H(0) = 1$ , se cumple la siguiente relación,

$$\frac{r_2}{\omega_n^2} + \frac{r_3}{\beta\zeta\omega_n} = 1 \quad (3.21)$$

La salida  $y(t)$  para una entrada escalón unidad con los controladores PID y PI-D son las siguientes:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} (b \sin \omega_d t + a \cos \omega_d t) & \zeta < 1 & (3.22a) \\ 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} (b' \sinh \omega_d' t + a \cosh \omega_d' t) & \zeta > 1 & (3.22b) \\ 1 - (1 - a)e^{-\beta\omega_n t} - e^{-\omega_n t} (b'' \omega_n t + a) & \zeta = 1 & (3.22c) \end{cases}$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (3.23a)$$

$$b = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.23b)$$

$$b' = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (3.23c)$$

$$b'' = a - \frac{r_1}{\omega_n} \quad (3.23d)$$

Podemos observar en las expresiones 3.22 que si  $a = 1$  desaparece el término debido al polo  $-c$ , por lo que el sistema se reduce a uno de segundo orden. Este es el caso con controladores P, PD y P-D.

La expresión de  $a$  para el controlador PID puede escribirse de la forma,

$$a_{PID} = 1 + \frac{\beta(\beta_2 - \beta)}{Q(\beta)} \quad (3.24)$$

Teniendo en cuenta la relación 3.24, vemos que también puede ser  $a = 1$  con el controlador PID cuando  $\beta = \beta_2$ , y por lo tanto cuando  $c = p$ , pero en este caso se produce una cancelación cero/polo de la que ya se ha hablado.

Puede comprobarse también que con el controlador PID,

$$\beta < \beta_2 \Leftrightarrow a_{PID} > 1 \quad (3.25)$$

Observando la Tabla 3.2 también puede verse que, con los controladores PI-D y PI, se cumple que  $a > 1$  si  $\beta > 0$ , por lo que siempre será  $a > 1$ .

Por lo tanto,  $a$  solo puede ser menor que la unidad con el controlador PID. Con los demás controladores o es la unidad (P-D, PD y P) o es mayor que la unidad (PI-D y PI).

Puede comprobarse también que solo puede darse  $a < 0$  con el controlador PID y para valores  $\beta > \beta_2$  y  $\beta_2 < 2 - \frac{1}{\beta\zeta^2}$ , o lo que es lo mismo, para  $\beta > \beta_2$  y  $\beta > \frac{1}{(2 - \beta_2)\zeta^2}$ .

Los sistemas de control realimentado con controladores PID, PI-D, PI y PD, a diferencia de los sistemas de segundo orden que puedan expresarse en su primera forma canónica (P y P-D), pueden presentar una sobreelongación cuando  $\zeta \geq 1$ , aunque la respuesta sea también sobreamortiguada en el sentido de que no presenta oscilaciones. Cuando  $\zeta < 1$  la respuesta es subamortiguada en el mismo sentido que para los sistemas de segundo orden.

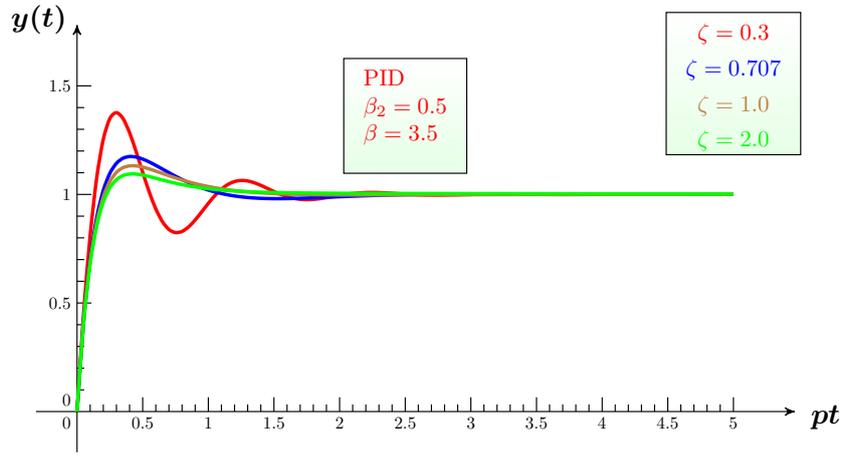


Figura 3.5: Salida PID con  $\beta_2 = 0,5$  y  $\beta = 3,5$

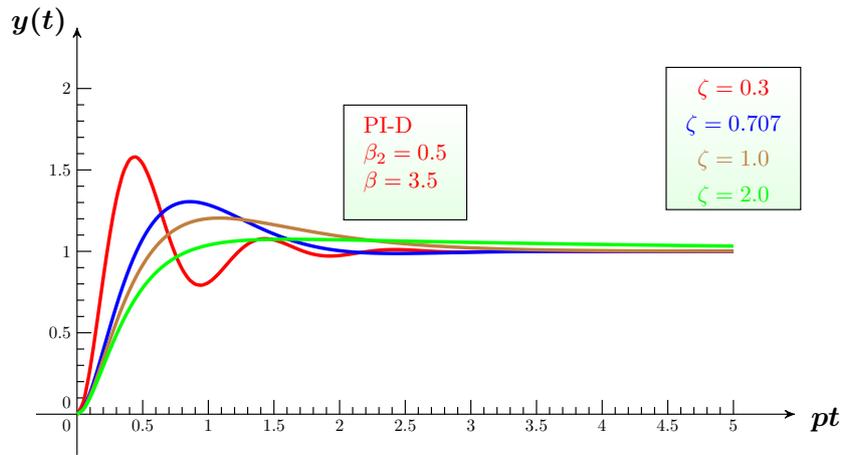


Figura 3.6: Salida PI-D con  $\beta_2 = 0,5$  y  $\beta = 3,5$

En las Figuras 3.5 y 3.6 se muestran curvas de respuesta al escalón variando  $\zeta$  con los controladores PID y PI-D respectivamente, para los mismos valores de  $\beta_2$  y  $\beta$ , en las que puede apreciarse una sobreelongación con valores de  $\zeta \geq 1$ . Con el PI-D,  $a > 1$ , pero con el PID,  $a < 1$ , ya que  $\beta > \beta_2$ . Además, con el PID,  $a < 0$  para  $\zeta > 2/\sqrt{21} \approx 0,44$ . Podemos observar en las figuras, que, con el controlador PID, tanto la sobreelongación máxima como el tiempo de establecimiento son menores que con el controlador PI-D para valores de  $\zeta$  bajos.

Por otro lado, podemos comprobar, aplicando el teorema del valor inicial, que el valor inicial para una entrada escalón unidad es nulo,  $y(0^+) = 0$ , con todos los controladores que se están estudiando,

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s)R(s) = 0 \quad (3.26)$$

donde  $R(s) = 1/s$  y  $H(s)$  viene dado por 3.18.

Teniendo en cuenta que, bajo condiciones iniciales nulas,  $\mathcal{L}_-\{\dot{y}(t)\} = sY(s)$ , podemos ver, aplicando el teorema del valor inicial, que

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2H(s)R(s) = r_1 + r_3 \quad (3.27)$$

donde  $R(s) = 1/s$  y  $H(s)$  viene dado por 3.18.

Con este resultado puede comprobarse, observando la Tabla 3.2, que la pendiente de la salida en el origen de tiempos es nula con los controladores PI-D, PI, P-D y P.

Puede demostrarse que, con los controladores PID y PD, se cumple la siguiente relación,

$$r_1 + r_3 = \zeta\omega_n(\beta - \beta_2 + 2) \quad (3.28)$$

Como consecuencia, la pendiente de la salida en el origen de tiempos será negativa si  $\beta_2 - \beta > 2$ , y positiva o nula en caso contrario. Con el PID, siempre que la pendiente en el origen sea negativa el valor de  $a_{PID} > 1$ . Además, la pendiente en el origen es negativa con los controladores PID y PD, si  $\tau_D < 0$ , como se desprende de la relación 3.9b.

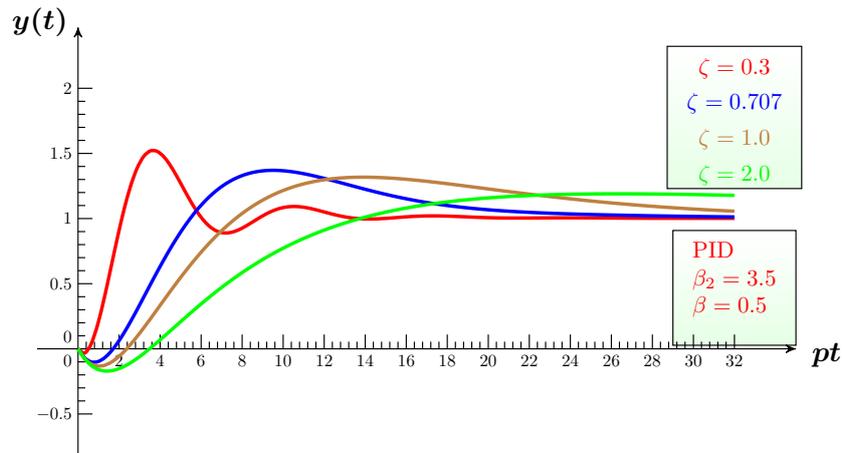


Figura 3.7: Salida PID con  $\beta_2 = 3,5$  y  $\beta = 0,5$

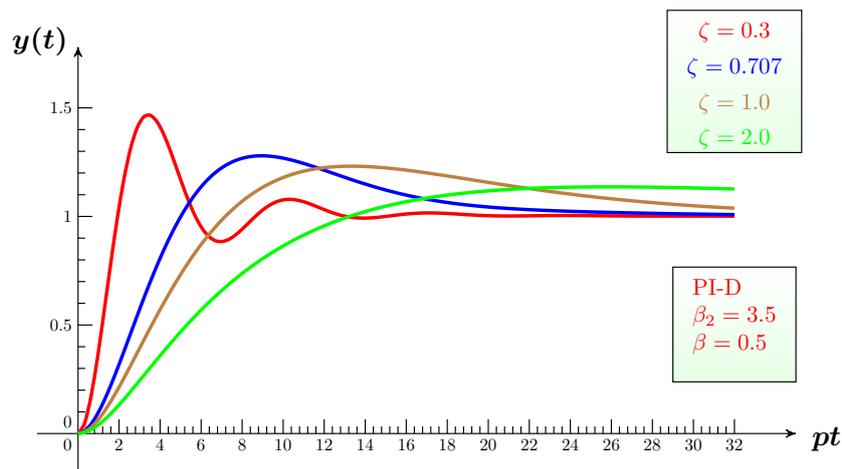


Figura 3.8: Salida PI-D con  $\beta_2 = 3,5$  y  $\beta = 0,5$

En las Figuras 3.7 y 3.8 se muestran curvas de respuesta al escalón variando  $\zeta$  con los controladores PID y PI-D respectivamente, para los mismos valores de  $\beta_2$  y  $\beta$ , en las que puede apreciarse la sobreelongación con valores de  $\zeta \geq 1$ , y que la pendiente en el origen es negativa con el controlador PID, ya que  $\beta_2 - \beta = 3 > 2$ .

### 3.4.1. Estudio de la respuesta al escalón unidad variando $\beta_2$

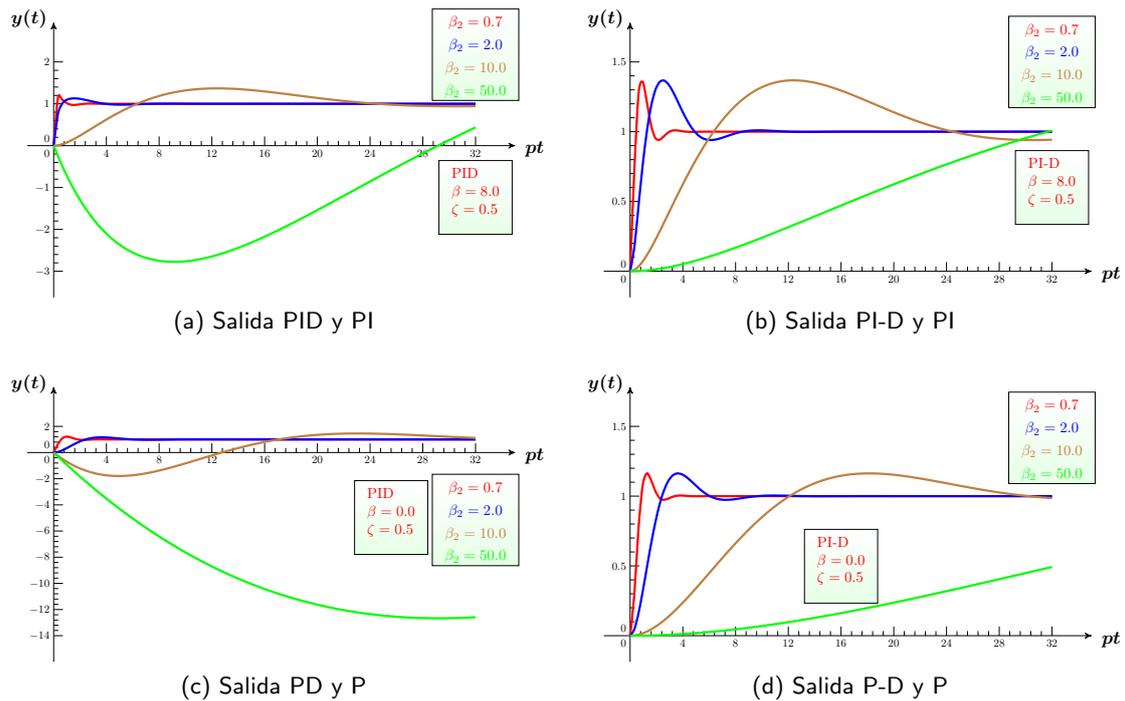


Figura 3.9: Salida con controladores PID, PI-D, PI, PD, P-D y P con  $\zeta = 0,5$  variando  $\beta_2$

En la Figura 3.9 se muestran las salidas de diferentes controladores variando  $\beta_2$ . En las Figuras 3.9a y 3.9b hay una curva (la marrón) que se corresponde con el controlador PI, puesto que satisface que  $\beta = \beta_2 - 2$ . En las Figuras 3.9c y 3.9d ( $\beta = 0$ ) hay una curva (la azul) que se corresponde con el controlador P, puesto que satisface que  $\beta_2 = 2$ .

Podemos apreciar con los controladores PID y PD que para  $\beta_2 = 50$ ,  $\beta_2 - \beta > 2$ , por lo que la pendiente de la salida en el origen de tiempos es negativa. Puede apreciarse que se produce una sobreelongación muy negativa, lo cual puede ser indeseable. Con el controlador PD la pendiente de la salida en el origen también es negativa con  $\beta_2 = 10 > 2$ , pero la elongación es mucho menor. Esto no ocurre con los controladores PI-D y P-D, para los cuales  $\dot{y}(0^+) = 0$ .

En todas las curvas se aprecia que al aumentar  $\beta_2$  la respuesta al escalón se hace más lenta, lo que supone que el tiempo de establecimiento aumenta con  $\beta_2$ .

Puede verse en las curvas de la Figura 3.9b, con el controlador PI-D, que  $pt_p \approx \beta_2$ , donde  $t_p$  es el tiempo de pico. En el Apéndice C se demuestra que con el controlador PI-D,  $t_{p,PI-D}$  varía linealmente con  $\beta_2$ , y que la sobreelongación máxima  $M_{p,PI-D}$  es independiente de  $\beta_2$ . Sin embargo, esto no ocurre con el controlador PID.

Lo mismo puede decirse de las curvas de salida con el controlador P-D de la Figura 3.9d. Se sabe que la sobreelongación máxima de los sistemas de segundo orden expresados en su primera forma canónica solo dependen de  $\zeta$ . A su vez, el tiempo de pico es una función que depende de  $\zeta$ , y linealmente de  $\beta_2$ . El Apéndice D muestra el desarrollo de dichos parámetros.

Comparando las curvas de las figuras 3.9b y 3.9d puede apreciarse que  $M_p$  aumenta con  $\beta$  para el mismo valor de  $\zeta$ . En la subsección siguiente se verá que  $M_p$  no aumenta con  $\beta$  sino que la curva de  $M_p$  con respecto a  $\beta$  presenta un máximo, es decir, que  $M_p$  aumenta con  $\beta$  desde cero hasta un cierto valor de  $\beta$ , y después disminuye al seguir aumentando  $\beta$ .

### 3.4.2. Estudio de la respuesta al escalón unidad variando $\beta$

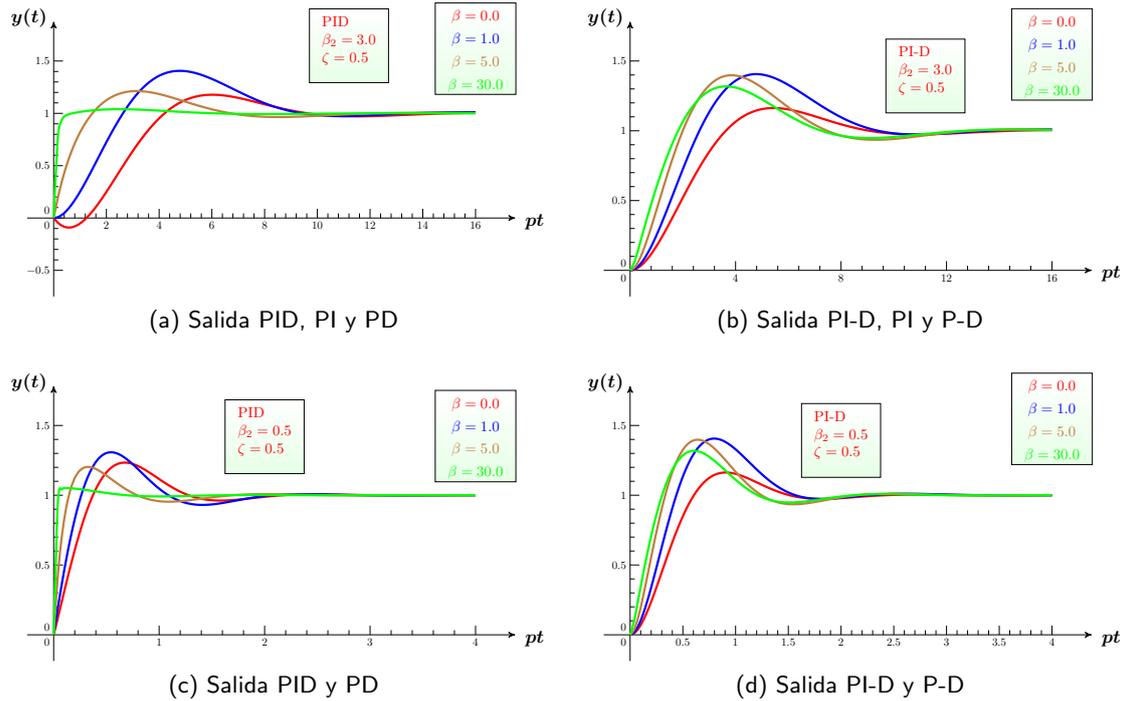


Figura 3.10: Salida con controladores PID, PI-D, PI, PD y P-D con  $\zeta = 0,5$  variando  $\beta$

En la Figura 3.10 se muestran las salidas con todos los controladores, a excepción del controlador P, variando  $\beta$ . En las Figuras 3.10a y 3.10b hay una curva (la azul) que se corresponde con el controlador PI, puesto que satisface que  $\beta = \beta_2 - 2$ . En todas las figuras se ha escogido un valor de  $\beta = 0$  para que se den los casos particulares PD y P-D (curva roja).

Puede apreciarse un rasgo común en todas las curvas, en relación con la sobreelongación máxima. Se aprecia que la sobreelongación máxima presenta un máximo para algún valor de  $\beta$ . Este máximo se encuentra en valores de  $\beta$  entre 1 y 5, para  $\zeta = 0,5$ . Es de esperar que este máximo dependa de  $\zeta$ .

También puede apreciarse que con los controladores PID y PD, la sobreelongación máxima disminuye, a partir de su máximo, más rápidamente que con los controladores PI-D y P-D.

El tiempo de pico disminuye al aumentar  $\beta$ , pero lo hace más rápidamente con los controladores PID y PD que con los controladores PI-D y P-D.

En cuanto al tiempo de establecimiento, se aprecia, al comparar las figuras superiores con las inferiores, que disminuye con  $\beta_2$ , pero varía mucho menos con  $\beta$ .

Las relaciones de  $a$  y  $b$  dadas por 3.23a y 3.23b junto con la Tabla 3.2, explican parte de estos resultados con los controladores PID y PI-D:

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (3.29a)$$

$$b = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.29b)$$

Cuando  $\beta \rightarrow \infty$  puede comprobarse utilizando la Tabla 3.2, que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_{PID} = 0 \quad (3.30a)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_{PID} = 0 \quad (3.30b)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_{PI-D} = 1 \quad (3.30c)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_{PI-D} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.30d)$$

La respuesta al escalón unidad con el controlador PID, cuando  $\beta \rightarrow \infty$ , tiende al escalón unidad, mientras que con el controlador PI-D no ocurre así, sino que tiende a un sistema de segundo orden, como puede verse con la ecuación de  $y(t)$  dada por 3.22a,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} y_{PI-D}(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \quad (3.31)$$

En este caso, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control límite, tendría la forma,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} H_{PI-D}(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.32)$$

Como vemos, es una combinación lineal de un sistema de segundo orden en su primera y segunda forma canónica, algo parecido al caso en que hubiese un controlador PD, de hecho un controlador PD-D.

En el Apéndice C se demuestra que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} > \lim_{\beta \rightarrow 0} M_{p,PI-D} \quad (3.33)$$

donde  $M_{p,PI-D}$  es la sobreelongación máxima de la respuesta al escalón del sistema de control realimentado con el controlador PI-D.

### 3.5. Conclusiones de los estudios anteriores sobre la respuesta del sistema de lazo cerrado en el régimen transitorio: algoritmo de diseño del controlador PI-D. Comentarios al diseño de los controladores PI, P-D y P

Esta Sección se centra en el problema de diseño del controlador PI-D. Atendiendo a la sobreelongación máxima  $M_p$ , se ha visto que es independiente de  $\beta_2$ , dependiendo de manera no lineal de  $\beta$  y  $\zeta$ . En cuanto al tiempo de establecimiento  $t_s$ , se ha visto que depende linealmente de  $\beta_2$ , y de manera no lineal de  $\beta$  y  $\zeta$ , aumentando al aumentar  $\beta$ .

Este resultado sugiere un algoritmo de dos pasos para la resolución del problema de satisfacción de las especificaciones de diseño del régimen transitorio:

1. Puesto que  $M_p$  es independiente de  $\beta_2$ , puede seleccionarse un valor cualquiera de  $\beta_2$  y obtener, mediante una simulación del sistema de lazo cerrado, las curvas de  $M_p$  con respecto a  $\beta$  para un conjunto de valores de  $\zeta$ . Se escogerían los pares  $(\zeta, \beta)$  que satisfagan que  $M_p$  es la deseada.
2. Posteriormente se haría otra simulación obteniendo las curvas de  $t_s$  en función de  $\beta_2$  para cada par obtenido anteriormente. El proceso terminaría seleccionando el conjunto de parámetros de diseño que satisfagan que  $t_s$  es la deseada.

Cualquiera de estas soluciones sería válida si las especificaciones de diseño del régimen transitorio solo fuesen sobre  $M_p$  y  $t_s$ .

Si además se hubiese definido alguna restricción en las especificaciones del régimen permanente, podría seleccionarse, del conjunto de soluciones anterior, la mejor. En cualquier caso, si el problema de diseño tiene solución, puede repetirse el proceso discretizando más los valores de  $\zeta$  del primer paso.

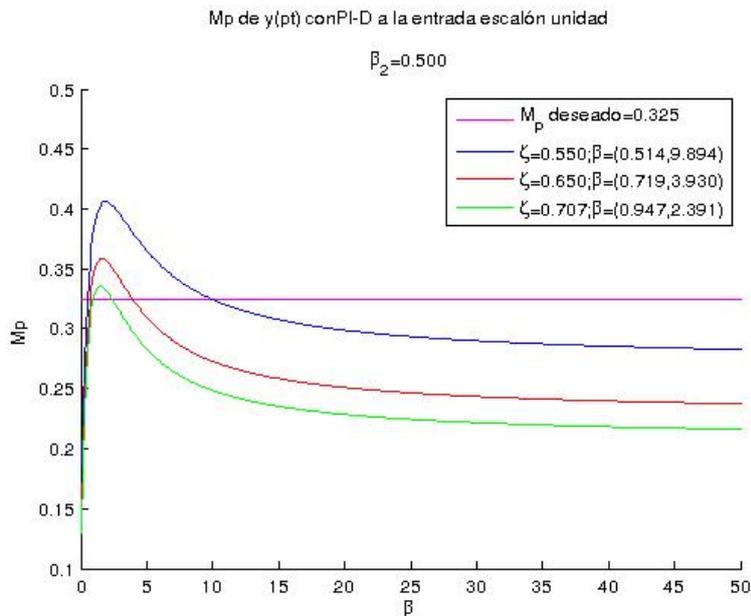


Figura 3.11: Primer paso PI-D:  $M_p$

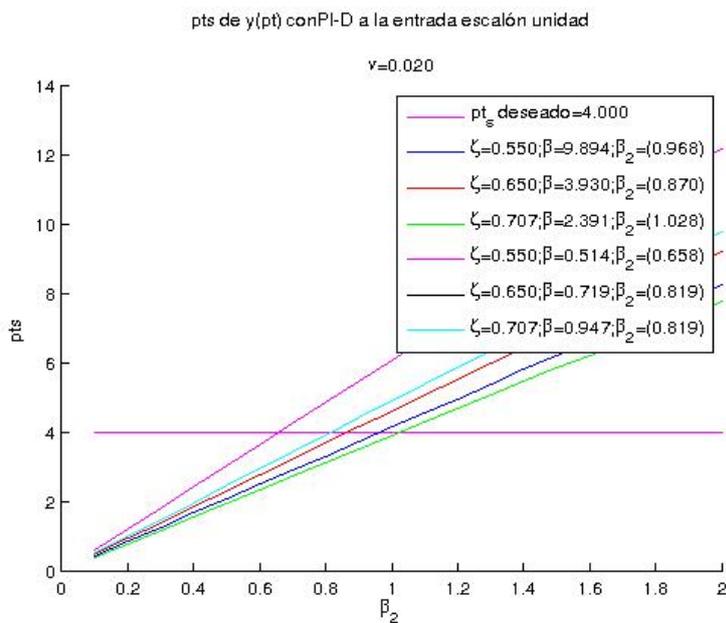


Figura 3.12: Segundo paso PI-D:  $pt_s$

Las curvas de las Figuras 3.11 y 3.12 muestran un ejemplo del algoritmo anterior. Se han obtenido con funciones de transferencia de lazo cerrado normalizadas.

En la Figura 3.11 se ha elegido un valor de  $\beta_2$  arbitrario, y se muestran las curvas de  $M_{p,PI-D}$  en función de  $\beta$ , para distintos valores de  $\zeta$ . A partir de estas curvas se selecciona un conjunto de pares  $(\zeta, \beta)$  que satisfagan la especificación de régimen transitorio referida a  $M_p$ . Puede apreciarse que las curvas de  $M_p$  presentan un máximo para un valor de  $\beta$  dependiente de  $\zeta$ .

Además, también se aprecia que se cumple la desigualdad dada por 3.33,  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} > \lim_{\beta \rightarrow 0} M_{p,PI-D}$ . Este hecho conocido teóricamente permite seleccionar el valor de  $\zeta$  mínimo que satisface la especificación referida a  $M_p$ . Esto es así porque, dado un valor de  $\zeta$  para  $\beta = 0$ , se produce el mínimo valor posible de la sobreelongación máxima. Como consecuencia puede conocerse el valor de  $\zeta_{min}$  que puede utilizarse en las simulaciones del primer paso. Para  $\beta = 0$  el PI-D se transforma

en un P-D, cuya sobreelongación máxima viene dada por la expresión,

$$M_{p,P-D} = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \quad (3.34)$$

Por lo tanto, si  $M_p^*$  es el valor deseado de  $M_{p,PI-D}$ , resolviendo la anterior relación se obtendría  $\zeta_{min}$ ,

$$\zeta_{min} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ln M_p^*}{\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\ln M_p^*}{\pi}\right)^2}} \quad (3.35)$$

Supongamos que se especifica que el valor deseado de la sobreelongación máxima sea  $M_p^* = 32,5\%$ . De aquí que el valor de  $\zeta_{min} = 0,3369$ .

También existe un valor de  $\zeta_{max}$  ya que  $M_{p,PI-D}$  presenta un máximo. Sin embargo, no es sencillo conocer ese valor ya que las expresiones que habría que resolver son ecuaciones trascendentes. Para obtenerlo puede realizarse un estudio de simulación.

Para obtener la Figura 3.11 se han elegido tres valores de  $\zeta$  que permiten obtener seis valores de  $\beta$  que satisfacen la especificación de  $M_p$ . Por lo tanto, se han obtenido seis pares de valores  $(\zeta, \beta)$  que se utilizarán en el segundo paso del algoritmo de diseño del PI-D.

En la Figura 3.12 se realiza una simulación por cada par  $(\zeta, \beta)$  seleccionado. Se muestran las curvas de  $pt_s$  en función de  $\beta_2$ . Puede apreciarse que, para cada par  $(\zeta, \beta)$ ,  $pt_s$  varía linealmente con  $\beta_2$ . A partir de estas curvas, se selecciona el conjunto de valores de  $\beta_2$  asociado al conjunto de pares  $(\zeta, \beta)$ , que satisfagan la especificación de régimen transitorio referida a  $t_s$ . Las simulaciones se han realizado para una tolerancia  $\nu = 2\%$ , y para la selección de  $\beta_2$  se ha supuesto que el valor deseado del tiempo de establecimiento es  $pt_s^* = 4$ .

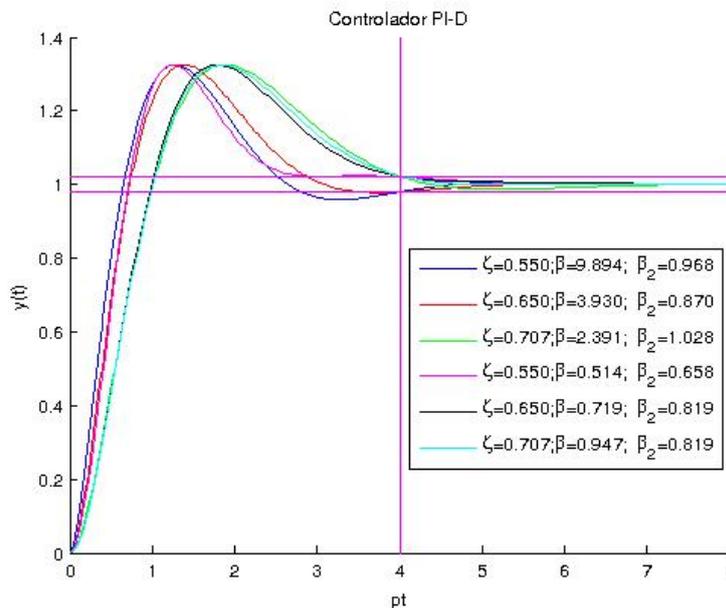


Figura 3.13: Respuesta al escalón del sistema realimentado con controlador PI-D, que satisface las especificaciones de diseño del régimen transitorio

En la Figura 3.13 se muestran las curvas de respuesta al escalón para cada terna de parámetros de diseño obtenido.

Una vez obtenidos los parámetros de diseño  $(\zeta, \beta, \beta_2)$  que satisfacen las especificaciones de diseño, se obtendrían los parámetros del controlador  $(K_p, \tau_D, \tau_I)$  a partir de las relaciones 3.9.

El diseño de un controlador PI se haría de forma similar, ya que  $M_p$  solo depende de  $\zeta$  y  $\beta$ , pero puede obviarse el segundo paso, ya que  $\beta_2 = \beta + 2$ . El problema que surge debido a esta

restricción, es que de todos los pares  $(\zeta, \beta)$  obtenidos o posibles que satisfacen la especificación de  $M_p$ , ninguno de ellos satisfaga la especificación de  $t_s$ . Si esto es así, el controlador PI no podría ser seleccionado por incumplir las especificaciones de diseño. Hay que tener en cuenta que el controlador PI es un caso particular del controlador PI-D, por lo puede observarse en la leyenda de la Figura 3.12, que no hay ningún valor de  $\beta_2 = \beta + 2$ . Como consecuencia, con el conjunto de valores de  $\zeta$  utilizados en el primer paso no existe ninguna solución con controlador PI. Sin embargo, sí la habría si la especificación del valor de  $pt_s$  fuese mucho mayor que 4. En cualquier caso, debería hacerse el estudio del primer paso con valores de  $\zeta$  mucho más bajos.

El diseño de un controlador P-D puede hacerse de manera exacta. En primer lugar, se obtendría el valor de  $\zeta$  que satisface la especificación de  $M_p$ . Este valor ya se ha calculado y es  $\zeta = 0,3369$ . En segundo lugar, se obtendría  $\beta_2$  a partir de la expresión de  $pt_s$ .

$$pt_s = \ln \left( \frac{1}{\nu \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \beta_2 \quad (3.36)$$

Para  $pt_s = 4$  se obtiene  $\beta_2 = 1,007$ .

Teniendo en cuenta que los controladores PI y P-D son casos particulares del PI-D, no es posible encontrar ningún controlador PI que satisfaga la especificación de diseño de  $pt_s$ , ya que, para  $\beta = 0$ ,  $\beta_{2,P-D} < 2$ .

Para el diseño del controlador P solo puede imponerse una especificación de diseño. Si ésta se refiere a  $M_p$  entonces se obtendría  $\zeta = 0,3369$ . A partir de aquí puede obtenerse el valor de  $pt_s$  aplicando la relación 3.36 con  $\beta_2 = 2$ . Se obtendría  $pt_s = 7,9445$ .

De este resultado también se infiere que no existe ningún controlador PI que satisfaga las especificaciones de diseño, ya que para valores muy bajos de  $\beta$ ,  $\beta_{2,PI} \approx 2$ , por lo que  $pt_{s,PI} \approx pt_{s,P}$ . Hay que tener en cuenta que al aumentar  $\beta$ ,  $pt_{s,PI}$  también aumenta.

## 4. Sistemas de 2 grados de libertad

### 4.1. Introducción

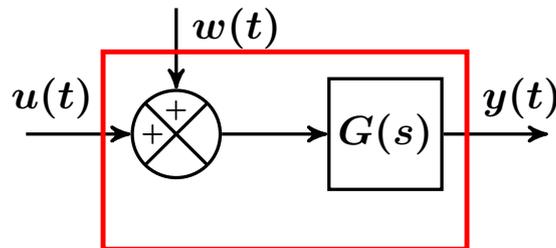


Figura 4.1: Sistema de dos entradas:  $w(t)$  y  $u(t)$

En las siguientes secciones abordamos conjuntamente los problemas de supresión de la señal de perturbación de entrada  $w(t)$  y de seguimiento de un conjunto de señales de referencia  $r(t)$  del sistema de dos entradas, una de control  $u(t)$  y otra de perturbación  $w(t)$ , que se muestra en la Figura 4.1.

En primer lugar, se introduce el concepto de Sistema de Control Realimentado de dos grados de libertad, y se definen dos estructuras distintas, que llamaremos Prealimentada y Paralela.

En segundo lugar, se estudia un ejemplo en el que el sistema a controlar  $G(s)$  tiene la forma

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (4.1)$$

donde  $K > 0$  y  $p > 0$ .

Se resolverá el problema de supresión de una señal de perturbación constante y de seguimiento de señales de referencia hasta la parábola incluida:  $r(t) \in \{A_0, A_1 t, \frac{A_2}{2} t^2\}$ , seleccionando, de todas las soluciones posibles, los controladores más simples.

## 4.2. Estructuras de control realimentado

En la Figura 4.2 se muestra el esquema de bloques de la estructura general del Sistema de Control Realimentado que vamos a estudiar en esta Sección y las siguientes.

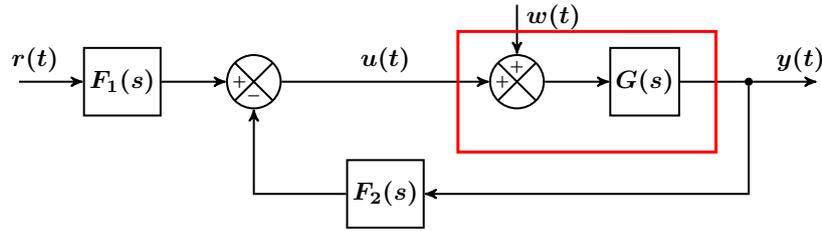


Figura 4.2: Estructura general del Sistema de Control Realimentado

La estructura de la Figura 4.2 satisface las siguientes relaciones,

$$U(s) = F_1(s)R(s) - F_2(s)Y(s) \quad (4.2a)$$

$$Y(s) = (U(s) + W(s))G(s) \quad (4.2b)$$

donde  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  representan los controladores.

En lo que sigue supondremos que el polinomio del numerador y el polinomio del denominador de cada una de las funciones de transferencia  $G(s)$ ,  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  son coprimos, es decir que no tienen factores comunes.

Sustituyendo 4.2a en 4.2b, y despejando  $Y(s)$  se obtiene la relación

$$Y(s) = \frac{F_1(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + F_2(s)G(s)}W(s) \quad (4.3)$$

Denominaremos funciones de transferencia de lazo cerrado a  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  donde

$$H_{yr}(s) = \frac{F_1(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (4.4a)$$

$$H_{yw}(s) = \frac{G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (4.4b)$$

De esta manera se cumple el principio de superposición de los sistemas lineales, es decir

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_w(s) \quad (4.5)$$

donde

$$H_{yr} = \frac{Y_r(s)}{R(s)} \quad (4.6a)$$

$$H_{yw} = \frac{Y_w(s)}{W(s)} \quad (4.6b)$$

Podemos observar que se cumple la siguiente relación entre las funciones de transferencia de lazo cerrado,

$$H_{yr}(s) = F_1(s)H_{yw}(s) \quad (4.7)$$

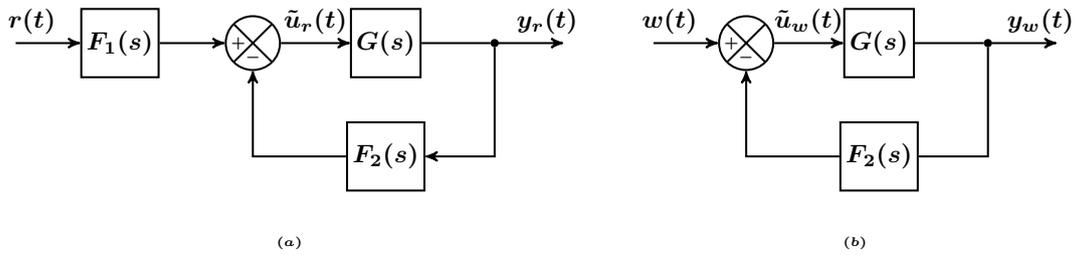


Figura 4.3: Principio de superposición de la estructura de la Figura 4.2: (a) Con  $w(t) = 0$  (b) Con  $r(t) = 0$

En la Figura 4.3 se muestran los esquemas de bloques que explican el principio de superposición.

Diremos que el Sistema de Control Realimentado dado por las relaciones 4.4 es de dos grados de libertad si  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  son funciones de transferencia independientes, en el sentido de que puedan ser sintonizadas de manera independiente.

En el Apéndice F se demuestra que  $F_2(s)$  es una función de transferencia de un grado de libertad, por lo que si  $F_1(s)$  es también una función de transferencia de un grado de libertad pero independiente de  $F_2(s)$ , entonces el Sistema de Control Realimentado será de dos grados de libertad. Esto es así porque  $H_{yw}(s)$  solo depende de  $F_2(s)$ , mientras que  $H_{yr}(s)$  depende de  $F_1(s)$  y de  $F_2(s)$ . Si  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  no son independientes tampoco lo serán  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$ .

Si el Sistema de Control Realimentado es de dos grados de libertad, será posible obtener funciones de transferencia de lazo cerrado  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  que satisfagan especificaciones de diseño independientes, y en consecuencia sea posible resolver conjuntamente los problemas de régimen permanente de supresión de la señal de perturbación y de seguimiento de un conjunto de señales de referencia.

En la Figura 4.4 se muestran los esquemas de bloques de dos sistemas de control realimentado de un grado de libertad obtenidos a partir de la estructura general, imponiendo restricciones a  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$ . Se obtiene una estructura con un controlador en el lazo directo haciendo  $F_1(s) = F_2(s) = G_c(s)$ , y una estructura con un controlador en el lazo realimentado haciendo  $F_1(s) = 1$  y  $F_2(s) = G_c(s)$ . Esto puede comprobarse sin más que sustituir estos valores en la ecuación 4.2a.

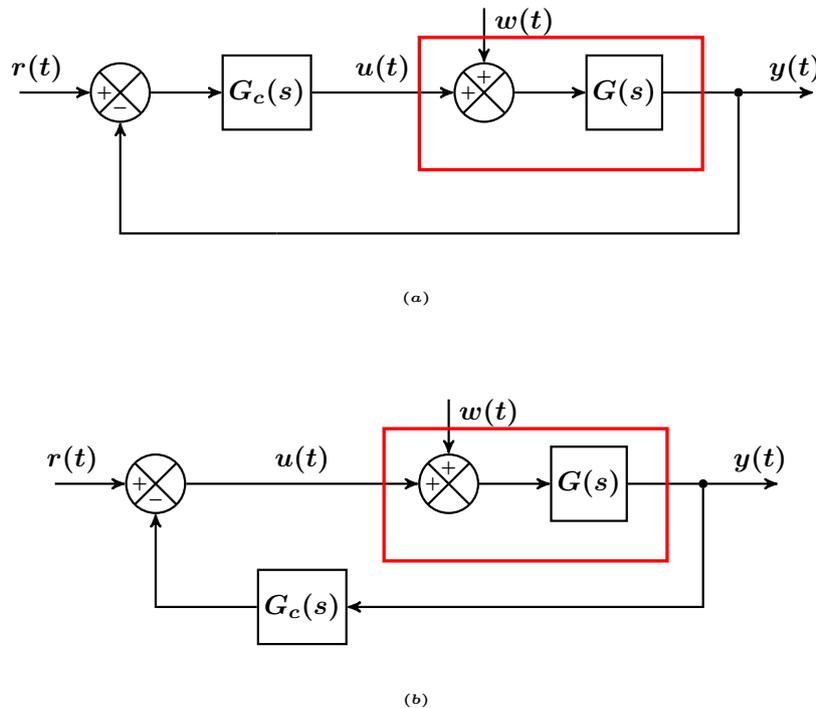


Figura 4.4: Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo Directo:  $F_1 = F_2 = G_c(s)$  (b) Lazo Realimentado:  $F_1 = 1$  y  $F_2(s) = G_c(s)$

Substituyendo  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  por los valores de la Tabla 4.1, se obtienen las estructuras de la Figura 4.5.

	Prealimentada	Paralela
$F_1(s)$	$G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$	$G_{c1}(s)$
$F_2(s)$	$G_{c1}(s)$	$G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$
$U(s)$	$G_{c1}(s)E(s) + G_{c2}(s)R(s)$	$G_{c1}(s)E(s) - G_{c2}(s)Y(s)$

Tabla 4.1: Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad.

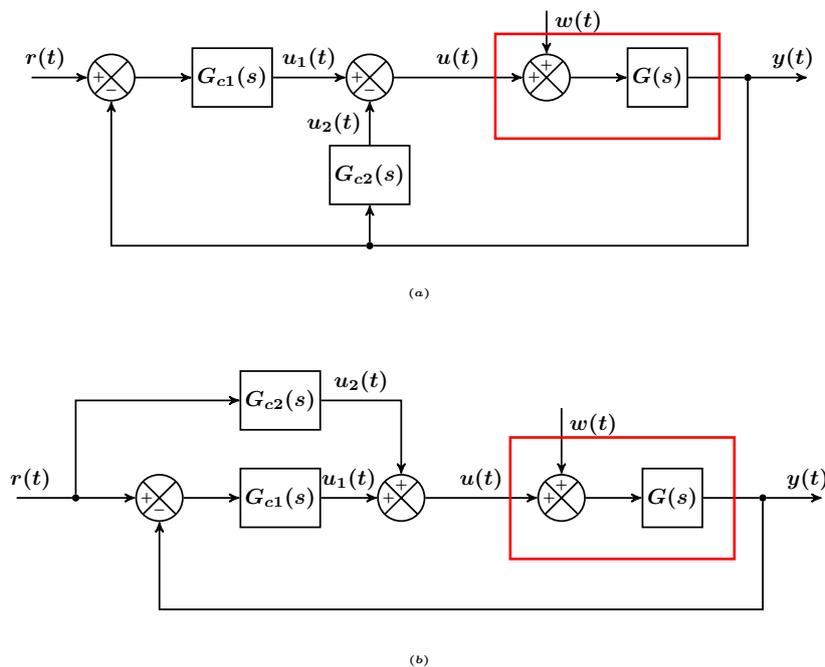


Figura 4.5: Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad: (a) Estructura Paralela (b) Estructura Prealimentada

### 4.3. Condiciones para la supresión de una señal de perturbación constante

Consideremos el sistema de dos entradas, una de control  $u(t)$  y otra de perturbación  $w(t)$  que se muestra en la Figura 4.6 donde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (4.8)$$

con  $K = K_m > 0$  y  $p > 0$ .

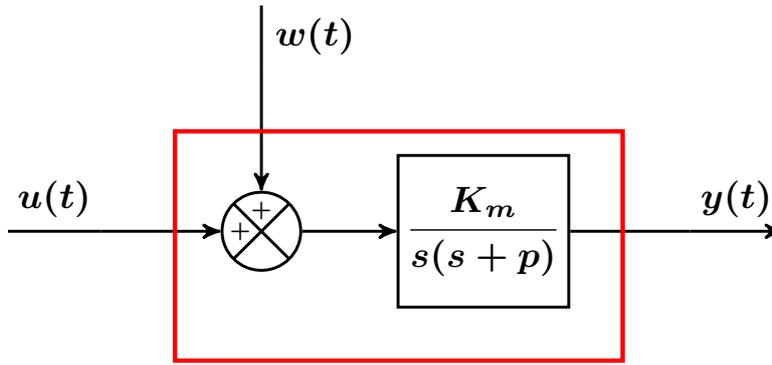


Figura 4.6: Sistema de dos entradas

En esta Sección estudiaremos las condiciones que se deben cumplir para resolver el problema de supresión de una señal de perturbación constante,  $w(t) = W$ , cuando la estructura de control es un sistema de dos grados de libertad Prealimentado o Paralelo.

Admitiendo que la salida parcial debida a la señal de perturbación,  $y_w(t)$ , es una señal estable, puede utilizarse el teorema del valor final,

$$y_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{yw}(s) W(s) \quad (4.9)$$

donde  $H_{yw}(s)$  viene dado por la expresión 4.4b.

La resolución del problema de supresión de  $w(t)$  constante ( $W(s) = W/s$ ) supone analizar las condiciones bajo las cuales se satisface la relación

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} H_{yw}(s) W = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W K D_{F_2}(s)}{s(s+p) D_{F_2}(s) + K N_{F_2}(s)} \quad (4.10)$$

donde  $N_{F_2}(s)$  y  $D_{F_2}(s)$  son los polinomios del numerador y denominador de  $F_2(s)$  dado en la Tabla 4.1 según que la estructura sea Prealimentada o Paralela.

Para la **estructura Prealimentada** la relación 4.10 puede escribirse como

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W K D_{c1}(s)}{s(s+p) D_{c1}(s) + K N_{c1}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W D_{c1}(s)}{N_{c1}(s)} \quad (4.11)$$

Como consecuencia se deberá cumplir que

$$D_{c1}(s) = s P_{c1}(s) \quad (4.12a)$$

$$N_{c1}(0) \neq 0 \neq s \quad (4.12b)$$

donde  $P_{c1}(s)$  es un polinomio cualquiera.

Eligiendo el controlador más simple se deberá cumplir que  $P_{c1}(s) = 1$ .

Para la **estructura Paralela** la relación 4.10 puede escribirse como

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W K D_{c1}(s) D_{c2}(s)}{s(s+p) D_{c1}(s) D_{c2}(s) + K (N_{c1}(s) D_{c2}(s) + N_{c2}(s) D_{c1}(s))} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W D_{c1}(s) D_{c2}(s)}{N_{c1}(s) D_{c2}(s) + N_{c2}(s) D_{c1}(s)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para esta estructura se pueden dar dos soluciones:

a)

$$D_{c1}(s) = s P_{c1}(s) \quad (4.14a)$$

$$N_{c1}(0) \neq 0 \quad (4.14b)$$

donde  $P_{c1}(s)$  es un polinomio cualquiera.

Eligiendo el controlador más simple se deberá cumplir que  $P_{c1}(s) = 1$ .

b)

$$D_{c2}(s) = sP_{c2}(s) \quad (4.15a)$$

$$N_{c2}(0) \neq 0 \quad (4.15b)$$

donde  $P_{c2}(s)$  es un polinomio cualquiera.

Eligiendo el controlador más simple se deberá cumplir que  $P_{c2}(s) = 1$ .

Debe observarse que las condiciones  $D_{c1}(s) = sP_{c1}(s)$  y  $D_{c2}(s) = sP_{c2}(s)$  no pueden darse simultáneamente, ya que esto supone que los polinomios del numerador y denominador de  $H_{yw}(s)$  no sean coprimos, en contra de lo que estamos imponiendo, sino que tendrían el factor común  $s$ .

En conclusión, uno de los controladores del sistema de dos grados de libertad debe tener un factor integral. En el caso Prealimentado debe ser necesariamente  $G_{c1}(s)$ .

Como consecuencia, el polinomio característico  $P(s)$  común de  $H_{yw}(s)$  y de  $H_{yr}(s)$  cumplirá necesariamente que

$$P(0) \neq 0 \quad (4.16)$$

Veremos en la Sección 4.4 la estructura Paralela con controlador PID-D, y se resolverá el problema de seguimiento a la señal de referencia parabólica, teniendo en cuenta las condiciones de supresión de una señal de perturbación constante deducidas en esta Sección. Se verá que la única solución posible es que sea el controlador  $G_{c1}(s)$  el que deba tener un factor integral. En la Sección 4.5 se estudia la estructura Prealimentada con controlador  $D|PID$  llegando a conclusiones idénticas.

#### 4.4. Sistema de control realimentado con PID-D

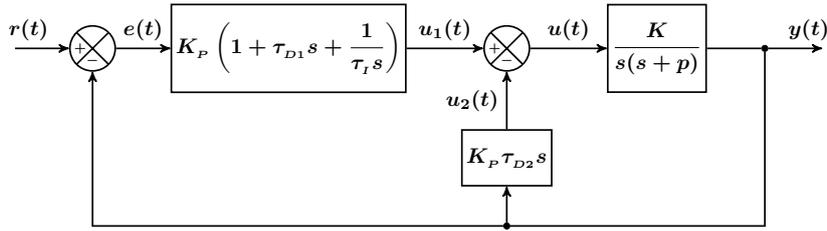


Figura 4.7: Esquema de control realimentado con PID-D

En la Figura 4.7 se muestra el esquema de control realimentado con un controlador PID-D, el cual generaliza los sistemas de tercer orden con controladores PID y PI-D estudiados en la Sección 3. Para  $\tau_{D1} = 0$  se obtiene el sistema con controlador PI-D, y para  $\tau_{D2} = 0$  se obtiene el sistema con controlador PID.

La función de transferencia de lazo cerrado, con el PID-D, tiene la forma

$$H_{PID-D}(s) = \frac{KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tilde{\tau}_D \left( s^2 + \frac{s}{\tilde{\tau}_D} + \frac{1}{\tilde{\tau}_D\tau_I} \right)} \quad (4.17)$$

donde

$$\tilde{\tau}_D = \tau_{D1} + \tau_{D2} \quad (4.18)$$

En la Sección 3.3 se demostró que el sistema de control realimentado con controladores PID y PI-D solo resuelve el problema de seguimiento para las señales de referencia escalón y rampa. Vamos a ver, a continuación, que es posible resolver el problema de seguimiento a la parábola con el controlador PID-D.

La función de transferencia del error,  $H_e(s) = 1 - H(s)$ , tiene la forma

$$H_{e,PID-D}(s) = \frac{s^2(s+p + KK_P\tau_{D2})}{s^2(s+p) + KK_P\tilde{\tau}_D \left( s^2 + \frac{s}{\tilde{\tau}_D} + \frac{1}{\tilde{\tau}_D\tau_I} \right)} \quad (4.19)$$

Podemos ver que si se cumple la condición siguiente

$$KK_P\tau_{D2} = -\frac{p}{K} \quad (4.20)$$

se resuelve el problema de seguimiento a la señal de referencia parabólica.

En este caso, las funciones de transferencia de lazo cerrado  $H_{PID-D}(s)$  y  $H_{e,PID-D}(s)$  quedarán en la forma,

$$H_{PID-D}(s) = \frac{KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)}{s^3 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.21a)$$

$$H_{e,PID-D}(s) = \frac{s^3}{s^3 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.21b)$$

Se ha supuesto que el polinomio característico cumple que  $P(0) \neq 0$ , es decir, que el controlador del lazo directo debe tener necesariamente un factor integral, ya que es una condición necesaria para resolver el problema de supresión de una señal de perturbación constante estudiada en la Sección 4.3.

Conviene observar que, la condición 4.20 resuelve el problema de satisfacción de especificaciones de diseño de régimen permanente mediante la técnica de asignación de ceros a la función de transferencia de lazo cerrado  $H_{PID-D}(s)$ . Es decir que, llamando  $P(s)$  al polinomio característico, se cumple que

$$H_{PID-D}(s) = \frac{P_1(s)}{P(s)} = \frac{P_1(s)}{s^3 + P_1(s)} \quad (4.22)$$

donde  $P_1(s) = KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)$ .

De esta manera la función de transferencia del error quedará en la forma dada por 4.21b, y como consecuencia, al aplicar el teorema del valor final con una señal de referencia parabólica, se cumple que

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{e,PID-D}(s) \frac{1}{s^3} = 0 \quad (4.23)$$

En esta situación el controlador PI-D no puede ser un caso particular del controlador PID-D, ya que el sistema de control de lazo cerrado sería inestable. La inestabilidad del PI-D con la condición 4.20 puede comprobarse construyendo la Tabla de Routh del polinomio característico que se obtiene haciendo  $\tau_{D1} = 0$ ,

$$P(s) = s^3 + KK_Ps + \frac{KK_P}{\tau_I} \quad (4.24)$$

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & KK_P \\ \epsilon & \frac{KK_P}{\tau_I} \\ KK_P \left( 1 - \frac{1}{\epsilon\tau_I} \right) & \\ \frac{KK_P}{\tau_I} & \end{array} \right. \quad (4.25)$$

donde  $\epsilon > 0$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Puesto que  $\epsilon > 0$  y  $\epsilon \rightarrow 0$  hay dos cambios de signo en la primera columna, por lo que la ecuación característica  $P(s) = 0$  tiene dos raíces en el semiplano derecho.

El sistema de control de lazo cerrado con controlador PID-D con la condición 4.20 es un sistema de tercer orden cuyo polinomio característico  $P(s)$  escribiremos en la forma

$$P(s) = s^3 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right) \quad (4.26)$$

El polinomio característico de grado tres 4.26 puede escribirse también en la forma,

$$P(s) = (s + c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (4.27)$$

donde  $c, \zeta, \omega_n \in \mathbb{R}^+$ .

Los parámetros del controlador del lazo directo  $\{K_P, \tau_{D1}, \tau_I\}$  pueden ser sustituidos por los parámetros  $\{c, \zeta, \omega_n\}$ , sin embargo nos interesará introducir los parámetros de diseño  $\beta$  y  $\beta_2$ , definidos de la siguiente forma:

$$p = \beta_2\zeta\omega_n \quad (4.28a)$$

$$c = \beta\zeta\omega_n \quad (4.28b)$$

Identificando los polinomios 4.26 y 4.27, y teniendo en cuenta las definiciones dadas por 4.28, puede comprobarse que los parámetros  $\{K_P, \tau_{D1}, \tau_I\}$  del controlador del lazo directo del PID-D, dependen de los parámetros  $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$  de la siguiente forma,

$$K_P = \frac{p^2 \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta_2^2 K} \quad (4.29a)$$

$$\tau_{D1} = \frac{\beta_2 (\beta + 2)}{p \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)} \quad (4.29b)$$

$$\tau_I = \frac{\beta_2 \zeta^2 \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta p} \quad (4.29c)$$

La función de transferencia de lazo cerrado con controlador PID-D con la condición 4.20 puede expresarse, cuando no hay polos múltiples, en la forma de descomposición en fracciones simples siguiente,

$$H_{PID-D}(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (4.30)$$

donde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ , son funciones que dependen de  $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$  con  $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$ , y vienen dadas por

$$r_1 = \frac{\zeta\omega_n \left( \beta \left( \frac{1}{\zeta^2} - 4 \right) + \frac{2}{\zeta^2} \right)}{Q(\beta)} \quad (4.31a)$$

$$r_2 = \frac{\omega_n^2 \left( \frac{1}{\zeta^2} - 2\beta \right)}{Q(\beta)} \quad (4.31b)$$

$$r_3 = \frac{\beta^3 \zeta \omega_n}{Q(\beta)} \quad (4.31c)$$

donde  $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$ .

En la Sección 3.4 se demostró que si  $\frac{r_1}{\omega_n}$ ,  $\frac{r_2}{\omega_n^2}$  y  $\frac{r_3}{\omega_n}$  son independientes de  $\beta_2$ , entonces la sobreelongación máxima  $M_p$  para una entrada escalón, también será independiente de  $\beta_2$ . Como

este es el caso del controlador PID-D con la Condición 4.20, entonces, para el diseño de este sistema de control sujeto a especificaciones de régimen transitorio, puede seguirse el mismo procedimiento que el propuesto en la Sección 3.5 para el diseño del sistema de control realimentado con controlador PI-D.

Por último, puede demostrarse que el valor inicial de la derivada con respecto al tiempo de la salida a la entrada escalón viene dada por la expresión

$$\dot{y}(0^+) = \zeta\omega_n(\beta + 2) = \frac{\beta + 2}{\beta_2} p \quad (4.32)$$

Por lo tanto,  $\dot{y}(0^+) > 0$ .

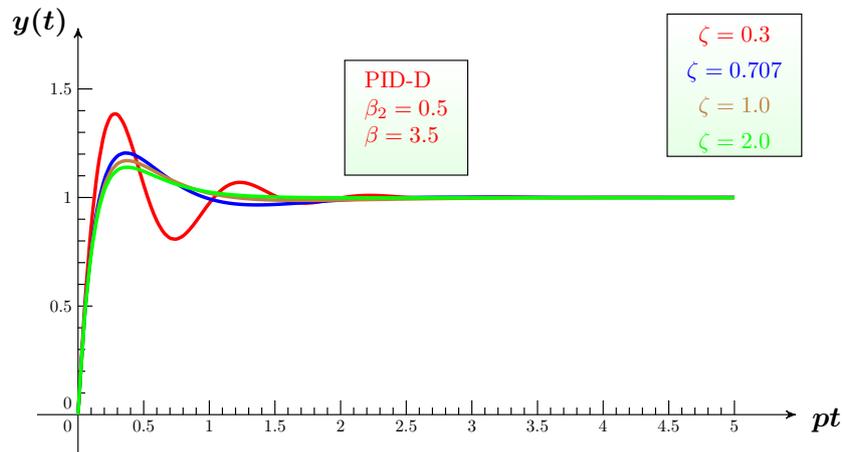


Figura 4.8: Salida PID-D con  $\beta_2=0.5$  y  $\beta=3.5$

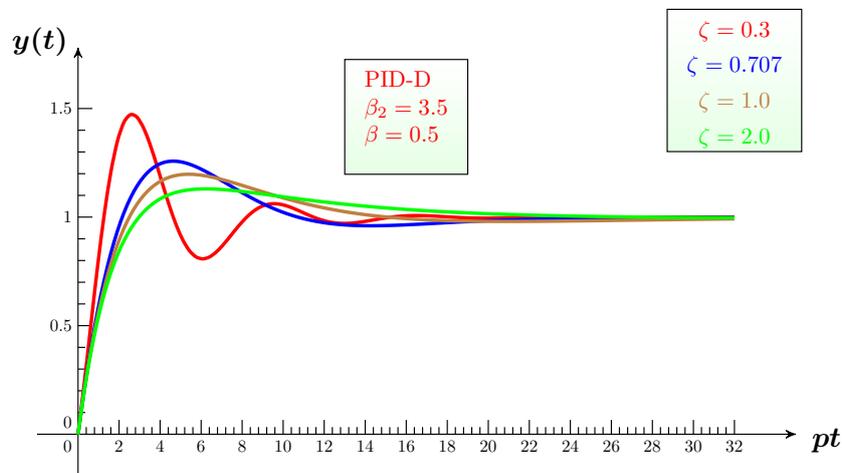


Figura 4.9: Salida PID-D con  $\beta_2=3.5$  y  $\beta=0.5$

En las Figuras 4.8 y 4.9 se muestran las curvas de  $y(t)$  a la entrada escalón unidad, en función de  $pt$  para diferentes valores de  $\zeta$ ,  $\beta$  y  $\beta_2$ .

#### 4.5. Sistema de control realimentado con $D|PID$

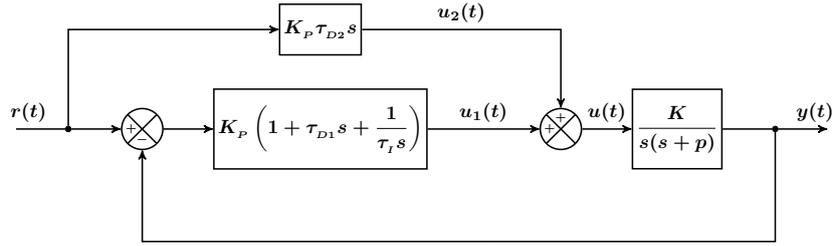


Figura 4.10: Esquema de control realimentado con  $D|PID$

Una estructura de control realimentado alternativa al PID-D es la que se muestra en la Figura 4.10, en la que hay un controlador de tipo PID en el lazo directo y un controlador de tipo D en el lazo prealimentado. Utilizaremos la notación  $D|PID$  para esta clase de estructuras.

La función de transferencia de lazo cerrado, con el  $D|PID$ , tiene la forma

$$H_{D|PID}(s) = \frac{KK_P\tilde{\tau}_D \left( s^2 + \frac{s}{\tilde{\tau}_D} + \frac{1}{\tilde{\tau}_D\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.33)$$

donde

$$\tilde{\tau}_D = \tau_{D1} + \tau_{D2} \quad (4.34)$$

Con el controlador  $D|PID$  es posible resolver el problema de seguimiento a la señal de referencia parabólica, como ocurre con el controlador PID-D.

La función de transferencia del error,  $H_e(s) = 1 - H(s)$ , tiene la forma

$$H_{e,D|PID}(s) = \frac{s^2(s+p - KK_P\tau_{D2})}{s^2(s+p) + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.35)$$

Haciendo

$$KK_P\tau_{D2} = \frac{p}{K} \quad (4.36)$$

las funciones de transferencia de lazo cerrado  $H_{D|PID}(s)$  y  $H_{e,D|PID}(s)$  quedarán en la forma,

$$H_{D|PID}(s) = \frac{ps^2 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)}{s^2(s+p) + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.37a)$$

$$H_{e,D|PID}(s) = \frac{s^3}{s^2(s+p) + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.37b)$$

Se ha supuesto que el polinomio característico cumple que  $P(0) \neq 0$ , es decir, que el controlador del lazo directo debe tener necesariamente un factor integral, ya que es una condición necesaria para resolver el problema de supresión de una señal de perturbación constante estudiada en la Sección 4.3.

El sistema de control de lazo cerrado con controlador  $D|PID$  con la condición 4.36 es un sistema de tercer orden cuyo polinomio característico  $P(s)$  escribiremos en la forma

$$P(s) = s^3 + (p + KK_P\tau_{D1})s^2 + KK_P \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right) \quad (4.38)$$

El polinomio característico de grado tres 4.38 puede escribirse también en la forma,

$$P(s) = (s + c)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (4.39)$$

donde  $c, \zeta, \omega_n \in \mathbb{R}^+$ .

Los parámetros del controlador del lazo directo  $\{K_P, \tau_{D1}, \tau_I\}$  pueden ser sustituidos por los parámetros  $\{c, \zeta, \omega_n\}$ , sin embargo nos interesará introducir los parámetros de diseño  $\beta$  y  $\beta_2$ , definidos de la siguiente forma:

$$p = \beta_2 \zeta \omega_n \quad (4.40a)$$

$$c = \beta \zeta \omega_n \quad (4.40b)$$

Identificando los polinomios 4.38 y 4.39, y teniendo en cuenta las definiciones dadas por 4.40, puede comprobarse que los parámetros  $\{K_P, \tau_{D1}, \tau_I\}$  del controlador del lazo directo del  $D|PID$ , dependen de los parámetros  $\{\zeta, \beta, \beta_2\}$  de la siguiente forma,

$$K_P = \frac{p^2 \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta_2^2 K} \quad (4.41a)$$

$$\tau_{D1} = \frac{\beta_2 (\beta - \beta_2 + 2)}{p \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)} \quad (4.41b)$$

$$\tau_I = \frac{\beta_2 \zeta^2 \left( 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\beta p} \quad (4.41c)$$

La función de transferencia de lazo cerrado con controlador  $D|PID$  con la condición 4.36 puede expresarse, cuando no hay polos múltiples, en la forma de descomposición en fracciones simples siguiente,

$$H_{D|PID}(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (4.42)$$

donde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ , son funciones que dependen de  $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$  con  $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$ , y vienen dadas por

$$r_1 = \frac{\zeta\omega_n \left( \beta \left( \frac{1}{\zeta^2} - 4 \right) + \frac{2}{\zeta^2} \right)}{Q(\beta)} \quad (4.43a)$$

$$r_2 = \frac{\omega_n^2 \left( \frac{1}{\zeta^2} - 2\beta \right)}{Q(\beta)} \quad (4.43b)$$

$$r_3 = \frac{\beta^3 \zeta \omega_n}{Q(\beta)} \quad (4.43c)$$

donde  $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$ .

Las relaciones 4.43 son exactamente las mismas que las del sistema con PID-D dadas por 4.31, por lo que la sobreelongación máxima  $M_p$  para una entrada escalón, también será independiente de  $\beta_2$ . Por lo tanto, para el diseño sujeto a especificaciones de régimen transitorio, del controlador del lazo directo del  $D|PID$  con la condición 4.36, se puede utilizar el mismo procedimiento que el propuesto en la Sección 3.5 para el diseño del sistema de control realimentado con controlador PI-D.

También se cumple que el valor inicial de la derivada con respecto al tiempo de la salida a la entrada escalón, sigue la misma expresión que con el controlador PID-D,

$$\dot{y}(0^+) = \zeta\omega_n (\beta + 2) = \frac{\beta + 2}{\beta_2} p \quad (4.44)$$

Por lo tanto,  $\dot{y}(0^+) > 0$ .

Puede comprobarse que  $p + KK_P\tau_{D1} = \dot{y}(0^+)$ .

Por último, vamos a demostrar que el controlador  $D|PI$  puede ser un caso particular del controlador  $D|PID$  si se cumple la condición de que  $p\tau_I > 1$ . Para ello se analizan las condiciones de estabilidad del  $D|PI$  con la condición 4.36 construyendo la Tabla de Routh del polinomio característico que se obtiene haciendo  $\tau_{D1} = 0$ ,

$$P(s) = s^3 + ps^2 + KK_Ps + \frac{KK_P}{\tau_I} \quad (4.45)$$

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{ll} 1 & KK_P \\ p & \frac{KK_P}{\tau_I} \\ KK_P \left(1 - \frac{1}{p\tau_I}\right) & \\ \frac{KK_P}{\tau_I} & \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Si  $p\tau_I < 1$  y  $K_P > 0$  se producen dos cambios de signo en la primera columna, por lo que la ecuación característica  $P(s) = 0$  tendrá dos raíces en el semiplano derecho.

El caso  $p\tau_I = 1$  es estable si  $K_P > 0$ , ya que en la Tabla de Routh no hay cambios de signo en la primera columna,

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{ll} 1 & KK_P \\ p & pKK_P \\ \epsilon & \\ pKK_P & \end{array} \right. \quad (4.47)$$

donde  $\epsilon > 0$ .

Sin embargo  $p\tau_I = 1$  no puede darse, ya que de acuerdo con la relación 4.41b el controlador  $D|PI$  se obtiene como un caso particular del  $D|PID$  haciendo  $\beta_2 = \beta + 2$ . Haciendo  $p\tau_I = 1$  en 4.41c se cumple la relación  $\beta^2 + 2\beta + \frac{1}{\zeta^2} = 0$ , que tiene soluciones de  $\beta < 0$ . Puede verse también,

de la relación 4.41a que  $K_P = -\frac{p^2}{K} < 0$ , por lo que el sistema con controlador  $D|PI$  y  $p\tau_I = 1$  sería inestable.

#### 4.6. Salida parcial $y_w(t)$ a la señal de entrada de perturbación constante

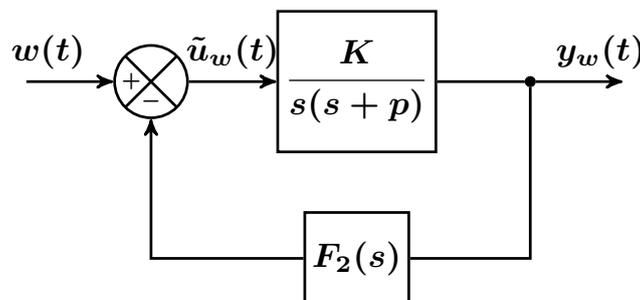


Figura 4.11: Esquema de bloques del sistema de dos grados de libertad con entrada de perturbación.

En la Figura 4.11 se muestra el esquema de bloques del sistema de dos grados de libertad con la entrada de la señal de perturbación, obtenida siguiendo el principio de superposición que se muestra en la Figura 4.3.

La función de transferencia de lazo cerrado  $H_{yw}(s)$  tiene la forma

$$H_{yw}(s) = \frac{K}{s(s+p) + F_2(s)K} \quad (4.48)$$

donde  $F_2(s) = G_{c1}(s)$  para la estructura Prealimentada y  $F_2(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$  para la estructura Paralela.

Se estudia, en esta Sección, la salida parcial  $y_w(t)$  de las estructuras de Control Realimentado Prealimentada y Paralela de dos grados de libertad recogidas en la Tabla 4.1 cuando la señal de perturbación es constante, es decir, para  $w(t) = W$

Las funciones de transferencia de lazo cerrado con los controladores de tipo PID-D para la estructura Paralela y de tipo  $D|PID$  para la estructura Prealimentada, cuando se imponen las condiciones de supresión de la señal de perturbación constante estudiadas en la Sección 4.3, son las siguientes,

$$H_{yw,PID-D}(s) = \frac{Ks}{s^3 + KK_P\tau_{D1} \left( s^2 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.49a)$$

$$H_{yw,D|PID}(s) = \frac{Ks}{s^3 + ps^2 + KK_P\tau_{D1} \left( s^3 + \frac{s}{\tau_{D1}} + \frac{1}{\tau_{D1}\tau_I} \right)} \quad (4.49b)$$

Por lo tanto,  $Y_w(s) = H_{yw}(s)W(s)$  cuando  $w(t) = W$ , tiene la forma,

$$Y_{w,PID-D}(s) = \frac{KW}{s^3 + KK_P\tau_{D1}s^2 + KK_P \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} \quad (4.50a)$$

$$Y_{w,D|PID}(s) = \frac{KW}{s^3 + (p + KK_P\tau_{D1})s^2 + KK_P \left( s + \frac{1}{\tau_I} \right)} \quad (4.50b)$$

En el Apéndice G se demuestra que, para ambas estructuras, la salida debida a la señal de entrada de perturbación constante, satisface la relación siguiente:

$$y_w(t) = \begin{cases} \frac{KW\beta_2^2}{p^2Q(\beta)} \left( e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) + a \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \right) \right) & \zeta < 1 \quad (4.51a) \\ \frac{KW\beta_2^2}{p^2Q(\beta)} \left( e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cosh(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t) + a_1 \sinh(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t) \right) \right) & \zeta > 1 \quad (4.51b) \\ \frac{KW\beta_2^2}{p^2Q(\beta)} \left( e^{-\beta\omega_n t} - e^{-\omega_n t} (1 + (1-\beta)\omega_n t) \right) & \zeta = 1 \quad (4.51c) \end{cases}$$

donde

$$a = \frac{(1-\beta)\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.52a)$$

$$a_1 = \frac{(1-\beta)\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \quad (4.52b)$$

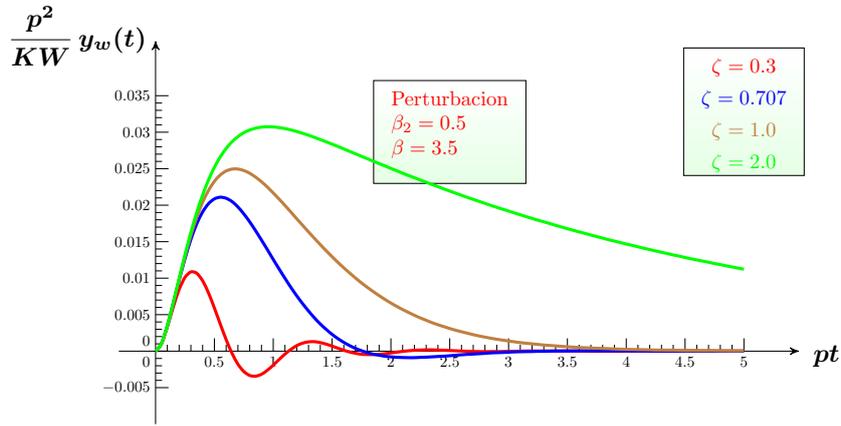


Figura 4.12: Salida Perturbación con  $\beta_2 = 0,5$  y  $\beta = 3,5$

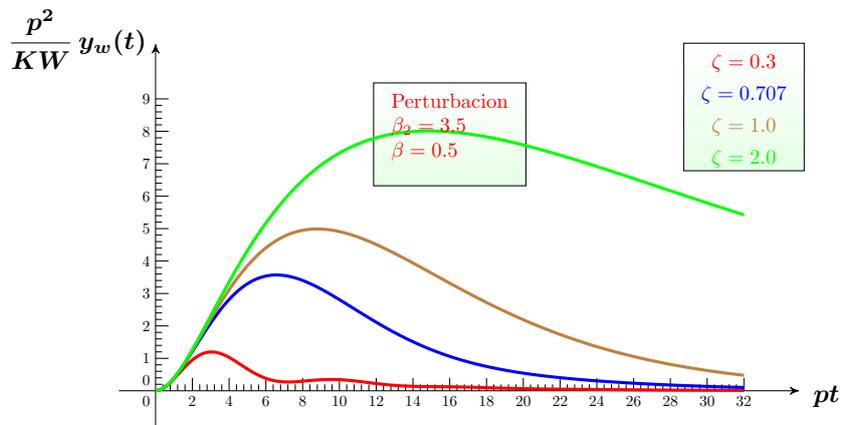


Figura 4.13: Salida Perturbación con  $\beta_2 = 3,5$  y  $\beta = 0,5$

En las Figuras 4.12 y 4.13 se muestran las curvas de  $\frac{p^2}{KW} y_w(t)$  en función de  $pt$  para diferentes valores de  $\zeta, \beta$  y  $\beta_2$ .

# Apéndices

## A. Respuesta al escalón unidad de un sistema de tercer orden

Consideremos un sistema de tercer orden y orden relativo menor o igual a 2, cuya descomposición en fracciones simples de su función de transferencia  $H(s)$  puede ser expresada en la forma

$$H(s) = \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (\text{A.1})$$

donde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ , son funciones que, en general, dependen de  $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$  con  $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$ , y en particular, alguna de ellas o varias puede ser nula. Por ejemplo, si  $r_3 = 0$ , el sistema será de segundo orden.

Supondremos también que la ganancia a bajas frecuencias  $H(0) = 1$ , por lo que se deberá cumplir la siguiente relación,

$$\frac{r_2}{\omega_n^2} + \frac{r_3}{\beta\zeta\omega_n} = 1 \quad (\text{A.2})$$

Podemos comprobar que si  $r_1 = r_3 = 0$  el sistema es de segundo orden expresado en su primera forma canónica.

La salida para una entrada escalón unidad, bajo condiciones iniciales nulas, puede ser expresada en la forma

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{r_1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{r_3}{s(s + \beta\zeta\omega_n)} \quad (\text{A.3})$$

En primer lugar se obtendrá la salida para  $\zeta < 1$ . Calculando la transformada de Laplace inversa se obtienen las contribuciones de los polos real y complejos.

Puede comprobarse que

$$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s - 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.4})$$

por lo que

$$Y(s) = \frac{r_1 - \frac{r_2\zeta}{\omega_n}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{\frac{r_2}{\omega_n^2}(s + \zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s(s + \beta\zeta\omega_n)} + \frac{r_2}{\omega_n^2 s} \quad (\text{A.5})$$

Teniendo en cuenta la relación dada por A.2, puede comprobarse que

$$\frac{r_3}{s(s + \beta\zeta\omega_n)} + \frac{r_2}{\omega_n^2 s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{r_3}{\beta\zeta\omega_n}}{s + \beta\zeta\omega_n} \quad (\text{A.6})$$

La salida del sistema de control de lazo cerrado para una entrada escalón unidad y bajo condiciones iniciales nulas, es

$$y(t) = 1 - \frac{r_3}{\beta\zeta\omega_n} e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{r_2}{\omega_n^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{r_1}{\omega_n} \right) \sin \omega_d t + \frac{r_2}{\omega_n^2} \cos \omega_d t \right) \quad (\text{A.7})$$

donde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

La salida  $y(t)$  del caso  $\zeta < 1$  conviene expresarla en alguna de las dos formas siguientes:

$$y(t) = 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} (b \sin \omega_d t + a \cos \omega_d t) \quad (\text{A.8a})$$

$$y(t) = 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (\text{A.8b})$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (\text{A.9a})$$

$$b = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{A.9b})$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{A.9c})$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{A.9d})$$

$$\sin \varphi = \frac{a}{c} \quad (\text{A.9e})$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{c} \quad (\text{A.9f})$$

El caso  $\zeta > 1$ , puede obtenerse a partir del caso  $\zeta < 1$  teniendo en cuenta las relaciones entre funciones trigonométricas e hiperbólicas. En este caso, utilizando la expresión A.8a,

$$y(t) = 1 - (1 - a)e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} (b' \sinh \omega'_d t + a \cosh \omega'_d t) \quad (\text{A.10})$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (\text{A.11a})$$

$$b' = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (\text{A.11b})$$

$$\omega'_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (\text{A.11c})$$

El caso  $\zeta = 1$ , puede obtenerse también a partir del caso  $\zeta < 1$  calculando el límite cuando  $\zeta \rightarrow 1$ . Podemos comprobar que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \omega_n t \quad (\text{A.12})$$

De aquí, la salida en el caso  $\zeta = 1$  tiene la forma,

$$y(t) = 1 - (1 - a)e^{-\beta\omega_n t} - e^{-\omega_n t} (b''\omega_n t + a) \quad (\text{A.13})$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (\text{A.14a})$$

$$b'' = a - \frac{r_1}{\omega_n} \quad (\text{A.14b})$$

## B. Cancelación cero/polo en los sistemas de tercer orden

Consideremos el sistema  $G(s)$  definido como

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (\text{B.1})$$

con  $p \in \mathbb{R}^+$ .

En este Apéndice se estudian las condiciones que se deben cumplir para que se produzca la cancelación del polo estable del sistema  $s = -p$  con controladores de tipo PID o PI-D, y sus casos particulares, PD y PI bajo condiciones iniciales nulas.

Consideremos las siguientes Proposiciones:

1. La cancelación del polo estable del sistema  $s = -p$  es equivalente a que la función de transferencia de lazo cerrado  $H(s)$  del sistema de control realimentado tenga un cero y un polo iguales  $s = -p$ .
2. Con el controlador PI-D no puede producirse la cancelación del polo estable del sistema  $s = -p$ , mientras que con los controladores PID, PD y PI sí puede lograrse si se cumple una relación concreta entre los parámetros  $\tau_D$  y  $\tau_I$ .

En lo que sigue se va a demostrar la Proposición 2, admitiendo que se cumple la Proposición 1. Para demostrar la Proposición 1 sería necesario y suficiente demostrar que la señal de control contiene un cero en  $s = -p$ . No se va a hacer en este Apéndice la demostración de la Proposición 1.

Escribiremos la función de transferencia del controlador situado en el lazo directo  $G_{c1}(s)$  y del controlador situado en el lazo paralelo  $G_{c2}(s)$  como

$$G_{c1}(s) = \frac{K_{c1}N_{c1}(s)}{D_{c1}(s)} \quad (\text{B.2a})$$

$$G_{c2}(s) = \frac{K_{c2}N_{c2}(s)}{D_{c2}(s)} \quad (\text{B.2b})$$

donde  $N_{c1}(s)$  y  $N_{c2}(s)$  son polinomios de grado  $m$ , y  $D_{c1}(s)$  y  $D_{c2}(s)$  son polinomios de grado  $n$ , con  $m < n$  y coeficiente unidad del término de mayor grado.

La función de transferencia de lazo cerrado  $H(s)$  con el controlador PID, PI-D o PI, puede escribirse en la forma

$$H(s) = \frac{KK_{c1}N_{c1}(s)}{s^2(s+p) + K(K_{c1}N_{c1}(s) + sK_{c2}N_{c2}(s))} \quad (\text{B.3})$$

Con los controladores PID o PI,  $N_{c2}(s) = 0$ , y con el controlador PI-D,  $N_{c2}(s) = s$ .

Además haremos  $K_{c1} = K_P\tau_D$  con los controladores PID y PD,  $K_{c1} = K_P$  con los controladores PI y PI-D y  $K_{c2} = K_P\tau_D$  con el controlador PI-D.

Con el controlador PD,

$$H(s) = \frac{KK_P\tau_D N_{c1}(s)}{s(s+p) + KK_P\tau_D N_{c1}(s)} \quad (\text{B.4})$$

Podemos observar que los ceros de lazo cerrado son los ceros del controlador situado en el lazo directo, es decir las raíces de  $N_{c1}(s) = 0$ .

El polinomio característico  $P(s)$  con los controladores PID, PI-D y PI tiene la forma,

$$P(s) = s^2(s+p) + KK_P(N_{c1}(s) + \tau_D s N_{c2}(s)) \quad (\text{B.5})$$

y con el controlador PD,

$$P(s) = s(s+p) + KK_P N_{c1}(s) \quad (\text{B.6})$$

Solo es posible que haya un polo de lazo cerrado en  $s = -p$  si además es raíz de la ecuación  $N_{c1}(s) + \tau_D s N_{c2}(s) = 0$ . Entonces el polinomio característico con los controladores PID, PI-D y

PI podrá ser escrito en la forma  $P(s) = (s + p) \left( s^2 + KK_P \tilde{N}(s) \right)$ , y con el controlador PD como  $P(s) = (s + p) \left( s + KK_P \tilde{N}(s) \right)$ , donde  $N_{c1}(s) + \tau_D s N_{c2}(s) = (s + p) \tilde{N}(s)$ .

Con los controladores PID, PI y PD, si existe el polinomio  $\tilde{N}(s)$ , entonces siempre se producirá una cancelación cero/polo en  $H(s)$ , ya que  $N_{c2}(s) = 0$ . Con el controlador PI-D, sin embargo se deberá cumplir simultáneamente que exista  $\tilde{N}(s)$  y que  $N_{c1}(s) = s + p$ .

Haciendo, con el controlador PI,  $N_{c1}(s) = s + \frac{1}{\tau_I}$ , es inmediato comprobar que la condición de cancelación es que  $\tau_I = \frac{1}{p}$ , y haciendo, con el controlador PD  $N_{c1}(s) = s + \frac{1}{\tau_D}$ , la condición de cancelación es que  $\tau_D = \frac{1}{p}$ .

Con el controlador PID escribiremos  $N_{c1}(s)$  en la forma,

$$N_{c1}(s) = s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{1}{\tau_D \tau_I} \quad (\text{B.7})$$

Con el controlador PI-D

$$N_{c1}(s) = s + \frac{1}{\tau_I} \quad (\text{B.8})$$

por lo que

$$N_{c1}(s) + \tau_D s N_{c2}(s) = \tau_D \left( s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{1}{\tau_D \tau_I} \right) \quad (\text{B.9})$$

De acuerdo con la relación B.8 una condición de cancelación necesaria con el controlador PI-D, es que  $\tau_I = \frac{1}{p}$ .

Y por último, la condición de cancelación de los controladores PID y PI-D es que la ecuación  $s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{1}{\tau_D \tau_I} = 0$  tenga una raíz  $s = -p$ .

Como se ha dicho, con el controlador PI-D, la condición de cancelación es que la ecuación  $s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{p}{\tau_D} = 0$  tenga una raíz  $s = -p$ . Sustituyendo  $s = -p$  en  $s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{p}{\tau_D}$  vemos que no es posible que se produzca una cancelación.

Sin embargo con el controlador PID sí puede encontrarse una condición de cancelación, ya que sustituyendo  $s = -p$  en  $s^2 + \frac{1}{\tau_D} s + \frac{1}{\tau_D \tau_I}$  se deberá cumplir que

$$p^2 - \frac{p}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D \tau_I} = 0 \quad (\text{B.10})$$

La condición de cancelación con un PID puede ser escrita como una dependencia entre  $\tau_D$  y  $\tau_I$ ,

$$\tau_D = \frac{p - \frac{1}{\tau_I}}{p^2} \quad (\text{B.11a})$$

$$\tau_I = \frac{1}{p(1 - p\tau_D)} \quad (\text{B.11b})$$

Podemos observar que estas relaciones también son válidas para los controladores PI y PD.

En general, los ceros del PID son los siguientes

$$c = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\gamma}}{2\tau_D} \quad (\text{B.12})$$

donde

$$\gamma = \frac{\tau_D}{\tau_I} \quad (\text{B.13})$$

Para que uno de los ceros sea  $c = -p$ , es condición necesaria que los dos ceros sean reales, es decir, que  $4\gamma < 1$ , lo que implica que  $\sqrt{1-4\gamma} < 1$  si  $\gamma > 0$ , y  $\sqrt{1-4\gamma} > 1$  si  $\gamma < 0$ . Por lo tanto, si  $\gamma > 0$  los ceros serán negativos, y si  $\gamma < 0$  habrá uno negativo ( $c = -p$ ) y otro positivo.

Sustituyendo la relación de  $\tau_D$  dada por B.11a en  $1-4\gamma$ , se obtiene la relación  $\frac{\left(\tau_I - \frac{2}{p}\right)^2}{\tau_I^2}$  que, por un lado, siempre es positiva, y por otro,

$$c = \frac{p^2 \left( -1 \pm \frac{\tau_I - \frac{2}{p}}{\tau_I} \right)}{2 \left( p - \frac{1}{\tau_I} \right)} = \frac{p^2 \left( \tau_I(-1 \pm 1) \pm \left( -\frac{2}{p} \right) \right)}{2(p\tau_I - 1)} \quad (\text{B.14})$$

Por lo tanto, los ceros son

$$c_1 = \frac{p}{1 - p\tau_I} = \frac{-1}{p\tau_D\tau_I} = \frac{p\tau_D - 1}{\tau_D} \quad (\text{B.15a})$$

$$c_2 = -p \quad (\text{B.15b})$$

Si  $\gamma > 0$ , los ceros deben ser negativos, por lo que necesariamente  $p\tau_I > 1$  y  $p\tau_D < 1$ , si  $\tau_D > 0$ . Si  $\tau_D < 0$  o  $\tau_I < 0$ , no puede haber cancelación cuando  $\gamma > 0$ . Y si  $\gamma < 0$ , uno de los ceros debe ser positivo y el otro negativo, por lo que  $p\tau_I < 1$  y  $p\tau_D > 1$ , si  $\tau_D > 0$ , pero con  $\tau_I < 0$ . Si  $\tau_D < 0$  puede haber cancelación cuando  $\gamma < 0$ , pero con  $\tau_I > 0$ .

En la Figura B.1 se muestran los esquemas de bloques equivalentes con cancelación cero/polo.

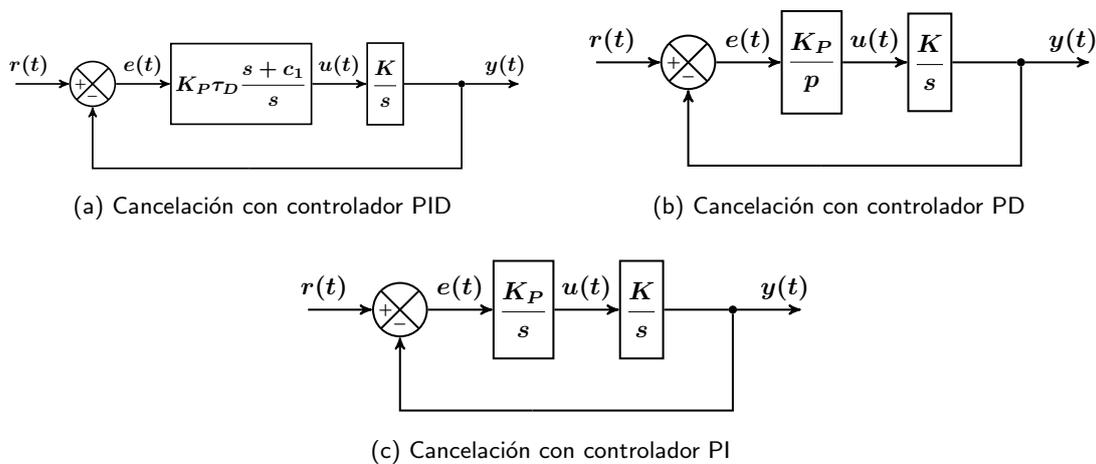


Figura B.1: Esquemas de control realimentado con cancelación cero/polo con PID, PD y PI

### C. Obtención del tiempo de pico $t_p$ y de la sobreelongación máxima $M_p$ con controladores PID y PI-D, para $\zeta < 1$

La salida  $y(t)$  para una entrada escalón unidad con los controladores PID y PI-D puede expresarse de la siguiente forma:

$$y(x) = 1 - (1 - a)e^{-\beta x} - e^{-x} \left( b \sin \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x + a \cos \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x \right) \quad (\text{C.1})$$

donde

$$a = \frac{r_2}{\omega_n^2} \quad (\text{C.2a})$$

$$b = \frac{a\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{C.2b})$$

$$x = \frac{pt}{\beta_2} \quad (\text{C.2c})$$

y  $r_1, r_2$  son funciones de los parámetros de diseño ( $\zeta, \beta, \beta_2$ ) recogidas en la Tabla 3.2.

Derivando con respecto a  $x$ ,

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} = \beta(1 - a)e^{-\beta x} + e^{-x} \left( b_1 \sin \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x + a_1 \cos \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x \right) \quad (\text{C.3})$$

donde

$$a_1 = a - \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} b = \frac{r_1}{\zeta \omega_n} \quad (\text{C.4a})$$

$$b_1 = b + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} a = \frac{a}{\zeta} - \frac{r_1}{\omega_n} \quad (\text{C.4b})$$

Puesto que

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial y(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (\text{C.5})$$

entonces

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} = \frac{\beta_2}{p} \dot{y}(t) \quad (\text{C.6})$$

El valor de  $t_p$  se produce cuando  $\dot{y}(t) = 0$ , y puesto que  $\beta_2, p \neq 0$ , también se deberá cumplir en  $t = t_p$  que  $\frac{\partial y(x)}{\partial x} = 0$ .

El tiempo de pico será una solución de la ecuación trascendente siguiente,

$$\beta(1 - a)e^{-\beta x_p} = -e^{-x_p} \left( b_1 \sin \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x_p + a_1 \cos \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} x_p \right) \quad (\text{C.7})$$

donde

$$x_p = \frac{pt_p}{\beta_2} \quad (\text{C.8})$$

Con los controladores PI-D y PI,

$$a_1 = \frac{2\beta^2}{Q(\beta)} = \beta(a - 1) \quad (\text{C.9a})$$

$$b_1 = \frac{\beta^2 + \frac{1}{\zeta^2} - 2\zeta^2\beta^2}{\zeta Q(\beta)\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{a_1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \left( 1 + \frac{1}{\beta^2\zeta^2} - 2\zeta^2 \right) \quad (\text{C.9b})$$

por lo tanto, para  $a \neq 1$ ,

$$e^{-(\beta-1)x_p} = b'_1 \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p + \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \quad (\text{C.10})$$

donde

$$b'_1 = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \left( 1 + \frac{1}{\beta^2\zeta^2} - 2\zeta^2 \right) \quad (\text{C.11})$$

La sobreelongación máxima  $M_p = y(t_p) - 1$ , por lo que, sustituyendo la expresión de  $(1-a)e^{-\beta x_p}$  de la relación C.7 en  $M_p$ , y agrupando términos, se obtiene que

$$M_p = e^{-x_p} \left( b_2 \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p + a_2 \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \right) \quad (\text{C.12})$$

donde, para  $\beta \neq 0$ ,

$$a_2 = \frac{a_1}{\beta} - a = \frac{r_1}{\beta\zeta\omega_n} - a \quad (\text{C.13a})$$

$$b_2 = \frac{b_1}{\beta} - b = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left( a \left( \frac{1}{\beta\zeta^2} - 1 \right) + \frac{r_1}{\zeta\omega_n} \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right) \right) \quad (\text{C.13b})$$

Con los controladores PI-D y PI,

$$a_{2,PI-D} = -1 \quad (\text{C.14a})$$

$$b_{2,PI-D} = \frac{\zeta}{Q(\beta)\sqrt{1-\zeta^2}} \left( Q(\beta) + \left( \beta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \left( \frac{1}{\beta\zeta^2} - 2 \right) + 2\beta^2 \right) \quad (\text{C.14b})$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\frac{r_1}{\beta\zeta\omega_n} = a - 1 = \frac{2\beta}{Q(\beta)}$ .

La expresión de  $b_{2,PI-D}$  puede simplificarse, ya que

$$\left( \beta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \left( \frac{1}{\beta\zeta^2} - 2 \right) + 2\beta^2 = \frac{1}{\zeta^2} \left( \beta - 2 + \frac{1}{\beta\zeta^2} \right) = \frac{Q(\beta)}{\beta\zeta^2} \quad (\text{C.15})$$

por lo que

$$b_{2,PI-D} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left( 1 + \frac{1}{\beta\zeta^2} \right) \quad (\text{C.16})$$

Con los controladores PI-D y PI la sobreelongación  $M_p$ , es independiente de  $\beta_2$ , y el tiempo de pico  $t_p$  es proporcional a  $\beta_2$ , a diferencia del caso con controlador PID. Con los controladores PI-D y PI cualquier solución  $x_p$  de la ecuación trascendente C.10 solo dependerá de  $(\zeta, \beta)$ , ya que  $b'_1$  solo depende de  $(\zeta, \beta)$ , y como  $x_p = \frac{pt_p}{\beta_2}$ , se deduce que  $t_p$  debe ser proporcional a  $\beta_2$ .

Con el controlador PI-D es interesante analizar el caso límite, cuando  $\beta \rightarrow \infty$ ,

$$\tilde{M}_{p,PI-D} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} = e^{-x_p} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p - \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \right) \quad (\text{C.17})$$

Por otro lado, puede comprobarse que,

$$\tilde{y}_{PI-D}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} y_{PI-D}(x) = 1 - e^{-x} \left( \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x + \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x \right) \quad (\text{C.18})$$

En este caso, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control límite, tendría la forma,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} H_{PI-D}(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{C.19})$$

Como vemos, es una combinación lineal de un sistema de segundo orden en su primera y segunda forma canónica, algo parecido al caso en que hubiese un controlador PD, de hecho un controlador PD-D.

La sobreelongación máxima en este caso límite es,  $M_{p,PI-D} = \tilde{y}_{PI-D}(x_p) - 1$ , que como puede verse, coincide con la expresión C.17.

Derivando  $\tilde{y}_{PI-D}(x)$  con respecto a  $x$  e igualando a cero, se obtendría el valor del tiempo de pico de este caso límite.

Puesto que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_{PI-D} = 1 \quad (\text{C.20a})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_{PI-D} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{C.20b})$$

entonces

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_{1,PI-D} = 2 \quad (\text{C.21a})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_{1,PI-D} = \frac{1-2\zeta^2}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{C.21b})$$

De aquí, que el tiempo de pico sea una solución de la ecuación,

$$0 = \frac{1-2\zeta^2}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p + 2 \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \quad (\text{C.22})$$

Esta ecuación puede expresarse en la forma

$$\sin \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_{p,PI-D} + \tilde{\varphi}_{p,PI-D} \right) = 0 \quad (\text{C.23})$$

donde

$$\sin \tilde{\varphi}_{p,PI-D} = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \quad (\text{C.24a})$$

$$\cos \tilde{\varphi}_{p,PI-D} = 1-2\zeta^2 \quad (\text{C.24b})$$

Por lo tanto, el tiempo de pico  $\tilde{t}_{p,PI-D}$  en la situación límite, será una solución de la ecuación

$$\omega_d \tilde{t}_{p,PI-D} = -\tilde{\varphi}_{p,PI-D} + n\pi \quad (\text{C.25})$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$  y  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ .

Para el cálculo de  $\tilde{\varphi}_{p,PI-D}$  conviene utilizar la función *atan2* que da valores del arcotangente en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces,  $\tilde{\varphi}_{p,PI-D} \in (0, \pi)$ , por lo que  $n = 1$ . Por lo tanto,

$$\omega_d \tilde{t}_{p,PI-D} = \pi - \tilde{\varphi}_{p,PI-D} \quad (\text{C.26})$$

Sustituyendo en C.17

$$\tilde{M}_{p,PI-D} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} = e^{-x_p} \quad (\text{C.27})$$

Por otro lado, cuando  $\beta = 0$  el controlador PI-D se transforma en el controlador P-D, el cual puede representarse como un sistema de segundo orden expresado en su primera forma canónica. De aquí que,

$$M_{p,PI-D}^0 = \lim_{\beta \rightarrow 0} M_{p,PI-D} = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (\text{C.28})$$

Como consecuencia,

$$\widetilde{M}_{p,PI-D} = M_{p,PI-D}^0 e^{\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \widetilde{\varphi}_{p,PI-D}} \quad (\text{C.29})$$

En conclusión. Como  $\widetilde{\varphi}_{p,PI-D} \in (0, \pi)$ ,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_{p,PI-D} > \lim_{\beta \rightarrow 0} M_{p,PI-D} \quad (\text{C.30})$$

## D. Obtención del tiempo de pico $t_p$ y de la sobreelongación máxima $M_p$ con controladores P, PD y P-D

Para la obtención del tiempo de pico,  $t_p$ , con controladores P, PD y P-D, se utilizarán los resultados del Apéndice C, ya que estos controladores se obtienen haciendo  $\beta = 0$  según se desprende de la Tabla 3.1.

Para obtener  $M_p$  debe recurrirse a la ecuación de  $t_p$  dada por C.7, con  $a = 1$ , según se desprende de la Tabla 3.2,

$$0 = b_1 \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p + a_1 \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p \quad (\text{D.1})$$

donde

$$a_1 = \frac{r_1}{\zeta \omega_n} \quad (\text{D.2a})$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{\zeta} - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{D.2b})$$

La ecuación D.1 puede escribirse en la forma siguiente,

$$\sin \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} x_p - \varphi_p \right) = 0 \quad (\text{D.3})$$

donde

$$\sin \varphi_p = \frac{a_1}{c_1} \quad (\text{D.4a})$$

$$\cos \varphi_p = \frac{-b_1}{c_1} \quad (\text{D.4b})$$

$$c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (\text{D.4c})$$

En consecuencia, el tiempo de pico  $t_p$  será una de las soluciones positivas de la siguiente ecuación,

$$\omega_d t_p = \varphi_p + n\pi \quad (\text{D.5})$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$  y  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  es la frecuencia natural amortiguada.

Con los controladores P y P-D,  $a_1 = 0$  y  $b_1 = \frac{1}{\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$ , por lo que  $\varphi_p = \pi$ . Para  $n = 0$ ,  $\omega_d t_p = \pi$ , es la solución conocida de  $t_p$  de los sistemas de segundo orden expresados en su primera forma canónica,

$$t_{p,P} = t_{p,P-D} = \frac{\pi}{\omega_d} = \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \frac{\pi}{p} \beta_2 \quad (\text{D.6})$$

Con el controlador PD,

$$a_{1,PD} = 2 - \beta_2 \quad (\text{D.7a})$$

$$b_{1,PD} = \frac{1 - \zeta^2(2 - \beta_2)}{\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left( \beta_2 - 2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \quad (\text{D.7b})$$

$$c_{1,PD}^2 = (2 - \beta_2)^2 + \frac{\zeta^2}{1 - \zeta^2} \left( \beta_2 - 2 + \frac{1}{\zeta^2} \right)^2 = \frac{1}{1 - \zeta^2} \left( (\beta_2 - 2)^2 + 2(\beta_2 - 2) + \frac{1}{\zeta^2} \right) \quad (\text{D.7c})$$

Simplificando la expresión de  $c_{1,PD}$ ,

$$c_{1,PD}^2 = \frac{Q(\beta_2)}{1 - \zeta^2} \quad (\text{D.8})$$

donde  $Q(\beta_2) = \beta_2^2 - 2\beta_2 + \frac{1}{\zeta^2}$ .

Por lo tanto,

$$\sin \varphi_{p,PD} = \frac{(2 - \beta_2)\sqrt{1 - \zeta^2}}{\sqrt{Q(\beta_2)}} \quad (D.9a)$$

$$\cos \varphi_{p,PD} = -\frac{\zeta \left( \beta_2 - 2 + \frac{1}{\zeta^2} \right)}{\sqrt{Q(\beta_2)}} \quad (D.9b)$$

donde  $Q(\beta_2) = \beta_2^2 - 2\beta_2 + \frac{1}{\zeta^2}$ .

Cuando  $\beta_2 > 2$ , la pendiente en el origen de tiempos con el controlador PD,  $\dot{y}(0^+) < 0$ , lo que significa que se producirá un mínimo en  $t = t_m$ , donde  $t_m$  también satisface la ecuación D.5, pero no es el tiempo de pico  $t_p$ . El valor de  $t_p$  será el segundo valor positivo que satisface esta ecuación. Si  $\beta_2 < 2$ , entonces  $t_p$  será el primer valor positivo. Teniendo en cuenta este hecho, el valor de  $n$  de la ecuación D.5 será distinto según sea el signo de  $\beta_2 - 2$ .

Para el cálculo de  $\varphi_{p,PD}$  conviene utilizar la función  $\text{atan2}$  que da valores del arcotangente en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces, para  $\beta_2 > 2$ ,  $\varphi_{p,PD} \in (-\pi, -\pi/2)$  por lo que  $n = 2$ , mientras que para  $\beta_2 < 2$ ,  $\varphi_{p,PD} \in (0, \pi)$  por lo que  $n = 0$ . Por lo tanto,

$$t_{p,PD} = \begin{cases} \frac{\varphi_{p,PD}}{\omega_d} & = \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \frac{\varphi_{p,PD}}{p} \beta_2 & \beta_2 < 2 & (D.10a) \\ \frac{2\pi + \varphi_{p,PD}}{\omega_d} & = \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \frac{2\pi + \varphi_{p,PD}}{p} \beta_2 & \beta_2 > 2 & (D.10b) \end{cases}$$

Cuando  $\beta_2 > 2$ , el mínimo de  $y(t)$  se produce en  $t_m$  para  $n = 1$ .

El caso particular  $\beta_2 = 2$  da lugar al controlador P. Según D.9,  $\sin \varphi_{p,P} = 0$  y  $\cos \varphi_{p,P} = -1$ . Si se utilizase  $\text{atan2}(0, -1)$  daría un valor de  $\varphi_{p,P} = \pi$ . Sin embargo, debe entenderse que cuando  $\beta_2 < 2$  en D.10a lo que se debe calcular es el límite cuando  $\beta_2 \rightarrow 2^-$ , por lo que  $\varphi_{p,P} = \pi$ , mientras que en el caso  $\beta_2 > 2$  en D.10b lo que se debe calcular es el límite cuando  $\beta_2 \rightarrow 2^+$ , por lo que  $\varphi_{p,P} = -\pi$ . De esta manera la solución de  $t_{p,PD}$  dada por D.10, es completamente coherente, resultando la relación de  $t_{p,P}$  conocida, dada por D.6.

La ecuación de  $M_p$  con estos controladores tiene la forma

$$M_p = -e^{-\zeta\omega_n t_p} (b \sin \omega_d t_p + \cos \omega_d t_p) \quad (D.11)$$

donde

$$b = \frac{\zeta - \frac{r_1}{\omega_n}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (D.12)$$

Puede observarse que, con el controlador PD,  $\varphi_p$  y por lo tanto  $M_p$ , dependen de  $\beta_2$  a diferencia de los casos con controladores P o P-D. Este resultado es el esperado, ya que con el controlador PD el sistema de lazo cerrado de segundo orden resultante es una combinación lineal en  $\beta_2$  de sistemas de segundo orden expresados en su primera y segunda forma canónica.

Con los controladores P y P-D,

$$M_{p,P} = M_{p,P-D} = e^{-\left( \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \pi} \quad (D.13)$$

Con el controlador PD,  $b_{PD} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}(\beta_2 - 1)$ , por lo que teniendo en cuenta la ecuación D.5,

$$b_{PD} \sin \omega_d t_{p,PD} + \cos \omega_d t_{p,PD} = \cos n\pi \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}(\beta_2 - 1) \sin \varphi_{p,PD} + \cos \varphi_{p,PD} \right) \quad (D.14)$$

Sustituyendo las relaciones D.9,

$$b_{PD} \sin \omega_d t_{p,PD} + \cos \omega_d t_{p,PD} = \frac{\zeta \cos n\pi}{\sqrt{Q(\beta_2)}} \left( (\beta_2 - 1)(2 - \beta_2) - \left( \frac{1}{\zeta^2} + \beta_2 - 2 \right) \right) \quad (D.15)$$

Ahora, simplificando esta expresión

$$b_{PD} \sin \omega_d t_{p,PD} + \cos \omega_d t_{p,PD} = -\frac{\zeta \cos n\pi}{\sqrt{Q(\beta_2)}} Q(\beta_2) \quad (D.16)$$

donde  $Q(\beta_2) = \beta_2^2 - 2\beta_2 + \frac{1}{\zeta^2}$ .

Por último, se obtiene  $M_p$  de la relación D.11 y D.16

$$M_{p,PD} = \zeta \sqrt{Q(\beta_2)} e^{-\frac{pt_{p,PD}}{\beta_2}} \quad (D.17)$$

donde  $Q(\beta_2) = \beta_2^2 - 2\beta_2 + \frac{1}{\zeta^2}$  y  $t_{p,PD}$  es el tiempo de pico dado por las expresiones D.10.

Puede comprobarse que para  $\beta_2 = 2$  se obtiene la expresión de  $M_p$  del sistema de control realimentado con controlador P.

## E. Lema de los polinomios coprimos o identidad de Bézout

La identidad de Bézout se refiere a números enteros, y dice que dados dos números enteros cualesquiera  $a$  y  $b$  cuyo máximo común divisor es  $d$ , entonces existen dos números enteros  $x$  e  $y$  coprimos (no tienen factores comunes), tales que  $ax + by = d$ . Si  $a$  y  $b$  son números primos entonces  $d = 1$ .

El siguiente Lema es una generalización de esta identidad para polinomios.

**Lema de los polinomios coprimos:** Se cumple que los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  de grados  $m$  y  $n \geq m$  respectivamente son coprimos si y solo si existen los polinomios coprimos  $A(s)$  y  $B(s)$  de grados  $n_A < n$  y  $m_B < m$  respectivamente tales que

$$A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1 \quad (\text{E.1})$$

También se cumple que si  $N(s)$  y  $D(s)$  son polinomios coprimos, entonces los polinomios  $A(s)$  y  $B(s)$  son únicos.

Por ejemplo, como  $D(s) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$  y  $N(s) = s + 1$  no son coprimos, no se puede encontrar ningún polinomio  $A(s)$  y  $B(s)$  que cumpla la identidad de Bézout, ya que siempre se cumple que  $(s + 1)(A(s) + (s + 2)B(s)) \neq 1$ .

Pero si  $D(s) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$  y  $N(s) = s + 4$ , escogiendo los polinomios genéricos  $A(s)$  y  $B(s)$  de grados  $n_A < n$  y  $n_B < m$  entonces

$$B(s) = c \quad (\text{E.2a})$$

$$A(s) = as + b \quad (\text{E.2b})$$

$$1 = A(s)(s + 4) + B(s)(s^2 + 3s + 2) = (a + c)s^2 + (4a + b + 3c)s + (4b + 2c) \quad (\text{E.2c})$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$a + c = 0 \quad (\text{E.3a})$$

$$4a + b + 3c = 0 \quad (\text{E.3b})$$

$$4b + 2c = 1 \quad (\text{E.3c})$$

cuya solución es única y dada por

$$c = b = -a = \frac{1}{6} \quad (\text{E.4})$$

El Lema nos asegura que los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  son coprimos, ya que  $A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1$ , para los polinomios

$$A(s) = -\frac{1}{6}s + \frac{1}{6} \quad (\text{E.5a})$$

$$B(s) = \frac{1}{6} \quad (\text{E.5b})$$

También ha quedado demostrado en este ejemplo que  $A(s)$  y  $B(s)$  son únicos.

## F. Estructuras de un grado de libertad

Consideremos un sistema realimentado de un único controlador de función de transferencia  $G_c(s)$ ,

$$G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (\text{F.1})$$

donde los polinomios  $N_c(s)$  y  $D_c(s)$  son coprimos y de grados  $m_c$  y  $n_c$  respectivamente.

Consideremos el sistema a controlar de función de transferencia  $G(s)$ ,

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{F.2})$$

donde los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  son coprimos y de grados  $m$  y  $n \geq m$  respectivamente.

Sean  $A(s)$  y  $B(s)$  los polinomios de Bézout de  $N(s)$  y  $D(s)$  del Lema de polinomios coprimos enunciado en el Apéndice E, es decir

$$A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1 \quad (\text{F.3})$$

Independientemente de qué estructura de control se tenga (el controlador en el lazo directo o en el lazo realimentado), el polinomio característico  $P(s)$  tiene la forma

$$P(s) = D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s) \quad (\text{F.4})$$

Multipliquemos la identidad de Bézout por  $P(s)$ ,

$$P(s) = P(s)A(s)N(s) + P(s)B(s)D(s) \quad (\text{F.5})$$

Restando ambas expresiones,

$$0 = (P(s)A(s) - N_c(s))N(s) + (P(s)B(s) - D_c(s))D(s) \quad (\text{F.6})$$

Como consecuencia se cumplirá que para cualquier polinomio  $Q(s)$ ,

$$P(s)A(s) - N_c(s) = Q(s)D(s) \quad (\text{F.7a})$$

$$P(s)B(s) - D_c(s) = -Q(s)N(s) \quad (\text{F.7b})$$

De aquí se deduce que

$$N_c(s) = P(s)A(s) - Q(s)D(s) \quad (\text{F.8a})$$

$$D_c(s) = P(s)B(s) + Q(s)N(s) \quad (\text{F.8b})$$

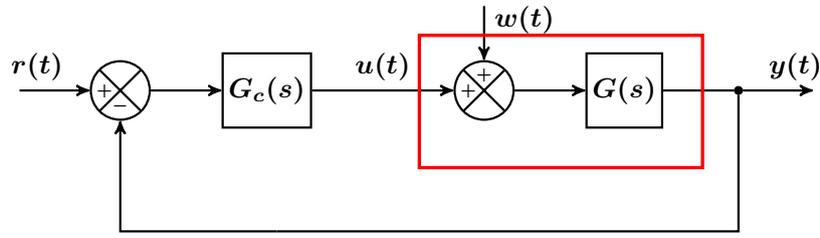
La función de transferencia del controlador podrá expresarse en función de  $P(s)$  y de  $Q(s)$  como

$$G_c(s) = \frac{A(s) - M(s)D(s)}{B(s) + M(s)N(s)} \quad (\text{F.9})$$

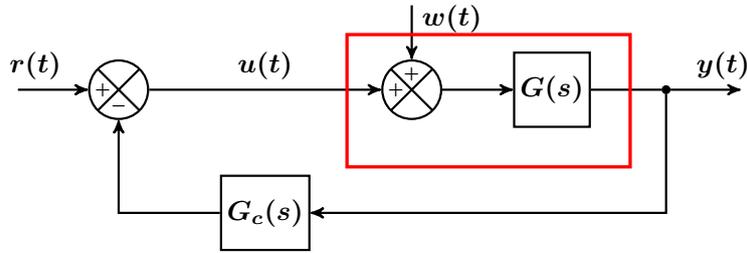
donde

$$M(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (\text{F.10})$$

Si consideramos que el polinomio característico  $P(s)$  es conocido (y estable en el sentido de Hurwitz), y puesto que también son conocidos los polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$ , y  $A(s)$  y  $B(s)$  son polinomios únicos que se pueden obtener resolviendo la identidad de Bézout, la función de transferencia del controlador dependerá exclusivamente del polinomio  $Q(s)$ . El polinomio  $Q(s)$  puede ser cualquiera. Este es el sentido que daremos al concepto de grado de libertad de una función de transferencia.



(a)



(b)

Figura F.1: Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo directo, (b) Lazo realimentado

Podemos ver que las funciones de transferencia de lazo cerrado  $H_{yr}(s)$  y  $H_{yw}(s)$  de la Figura F.1 son de un grado de libertad dependientes del mismo polinomio  $Q(s)$ . En este sentido diremos que la estructura del sistema de control realimentado es de un grado de libertad.

Si el controlador está situado en el lazo directo,

$$H_{yr}(s) = \frac{N_c(s)N(s)}{P(s)} = (A(s) - M(s)D(s))N(s) \quad (\text{F.11a})$$

$$H_{yw}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{F.11b})$$

y si el controlador está situado en el lazo realimentado

$$H_{yr}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{F.12a})$$

$$H_{yw}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{F.12b})$$

Puesto que  $H_{er} = 1 - H_{yr}$ , entonces la función de transferencia del error también será de un grado de libertad.

Además, por la elección que se ha hecho de  $P(s)$  todas las funciones de transferencia de lazo cerrado serán estables y en consecuencia el sistema realimentado será estable para cualquier polinomio  $Q(s)$  que se escoja.

## G. Respuesta a la señal de entrada de perturbación constante

Consideremos que la salida  $Y_w(s)$  a la señal de perturbación constante  $w(t) = W$  tiene la forma siguiente

$$Y_w(s) = \frac{KW}{(s + \beta\zeta\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (\text{G.1})$$

La relación G.1 puede escribirse en la forma de descomposición en fracciones simples siguiente,

$$Y_w(s) = KW \left( \frac{r_1 s + r_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{r_3}{s + \beta\zeta\omega_n} \right) \quad (\text{G.2})$$

donde  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ , son funciones que dependen de  $\{\beta, \zeta, \omega_n\}$  con  $\beta, \zeta, \omega_n \neq 0$ , y vienen dadas por

$$r_1 = -\frac{1}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \quad (\text{G.3a})$$

$$r_2 = \frac{\beta - 2}{\zeta \omega_n Q(\beta)} \quad (\text{G.3b})$$

$$r_3 = \frac{1}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \quad (\text{G.3c})$$

donde  $Q(\beta) = \beta^2 - 2\beta + \frac{1}{\zeta^2}$ .

Puede comprobarse que se cumplen las siguientes relaciones

$$r_1 + r_3 = 0 \quad (\text{G.4a})$$

$$r_2 + r_3(2 - \beta)\zeta\omega_n = 0 \quad (\text{G.4b})$$

Por lo tanto la salida  $Y_w(s)$  dada por G.2 puede escribirse como

$$Y_w(s) = -\frac{KW}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \left( \frac{s + (2 - \beta)\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{1}{s + \beta\zeta\omega_n} \right) \quad (\text{G.5})$$

La relación G.5 puede escribirse en la forma,

$$Y_w(s) = -\frac{KW}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \left( \frac{s + \zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{(1 - \beta)\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{1}{s + \beta\zeta\omega_n} \right) \quad (\text{G.6})$$

Aplicando la Transformada de Laplace Inversa en el caso  $\zeta < 1$ ,

$$y_w(t) = \frac{KW}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \left( e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{(1 - \beta)\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right) \quad (\text{G.7})$$

donde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

Para  $\zeta > 1$ ,

$$y_w(t) = \frac{KW}{\zeta^2 \omega_n^2 Q(\beta)} \left( e^{-\beta\zeta\omega_n t} - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cosh \tilde{\omega}_d t + \frac{(1 - \beta)\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \tilde{\omega}_d t \right) \right) \quad (\text{G.8})$$

donde  $\tilde{\omega}_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ .

Para  $\zeta = 1$ ,

$$y_w(t) = \frac{KW}{\omega_n^2 Q(\beta)} \left( e^{-\beta\omega_n t} - e^{-\omega_n t} (1 + (1 - \beta)\omega_n t) \right) \quad (\text{G.9})$$