

SECO 2014-VI ([1, 2, 3, 4, 5])

Félix Monasterio-Huelin y Álvaro Gutiérrez

14 de mayo de 2014

Índice

Índice	132
Índice de Figuras	133
Índice de Tablas	133
29. Estructuras de control realimentado: introducción	134
30. Estructuras de control realimentado	134
31. Ejemplo de diseño de controladores de un sistema de control realimentado de dos grados de libertad	139
32. Técnica de diseño de controladores basada en el Lugar de Raíces	143
32.1. Estudio de las señales de control $u_r(t)$ y $u_w(t)$	151
32.2. Estudio con un PID ideal con ceros reales	155
32.3. Estudio con un PID ideal con ceros complejos conjugados	158
K. Lema de los polinomios coprimos o identidad de Bézout	165
L. Estructuras de un grado de libertad	166
M. Demostración de la solución dada en la Tabla 8 para el ejemplo de la Sección 31: $G(s) = \frac{K_m}{s(s+p)}$	167
N. Demostración de las condiciones de estabilidad dadas en la Tabla 10 para el ejemplo de la Sección 31: $G(s) = \frac{K_m}{s(s+p)}$	171
O. PID de dos grados de libertad	172
Bibliografía	174

Índice de Figuras

48.	Estructura general del Sistema de Control Realimentado	134
49.	Principio de superposición de la estructura de la Figura 48: (a) Con $r(t) = 0$ (b) Con $w(t) = 0$	135
50.	Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo Directo: $F_1 = F_2 = G_c(s)$ (b) Lazo Realimentado: $F_1 = 1$ y $F_2(s) = G_c(s)$	137
51.	Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad: (a) Estructura Paralela (b) Estructura Prealimentada	138
52.	Sistema de dos entradas	140
53.	Plano complejo s : condición de ángulo con el controlador PID de cero doble	146
54.	Estructura Prealimentada con un controlador $G_{c1}(s)$ de tipo PID con un cero doble en $c = -27$ para el sistema $\tilde{G}(s) = G_{c1}(s)G(s)$	147
55.	Respuesta $y_r(t)$ al escalón unidad del PID con un cero doble	148
56.	Respuesta $y_w(t)$ con una perturbación constante unidad del PID con un cero doble	149
57.	Estructura Prealimentada con un controlador $G_{c1}(s)$ de tipo PI	151
58.	Señal de control $u_r(t) - d_0\delta(t)$	153
59.	Señal de control $u_w(t)$	154
60.	Plano complejo s : condición de ángulo con el controlador PID	155
61.	Curva $r_1 - r_2$ dada por 32.42	157
62.	Plano complejo s : condición de ángulo con el controlador PID de ceros complejos conjugados	159
63.	Cónica $r_1 - r_2$ del PID	161
64.	M_p y t_s en la región estable de la respuesta al escalón $y_r(t)$	162
65.	Respuesta $y_r(t)$ a la señal de referencia escalón unidad con $r_1 = 0,11$	163
66.	Lugar de Raíces con un PID de ceros complejos	164

Índice de Tablas

7.	Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad	138
8.	Controladores más simples que satisfacen las especificaciones de régimen permanente para el sistema de la Figura 52, donde $N_{c1}(0) \neq$ 0	141
9.	Parámetros del controlador $G_{c1}(s)$ con $K_{c1} > 0$	142
10.	Condiciones de estabilidad con $K_{c1} > 0$	143
11.	Polinomios característicos	171

29. Estructuras de control realimentado: introducción

En las siguientes secciones abordamos conjuntamente los problemas de supresión de la señal de perturbación de entrada $w(t)$ y de seguimiento de un conjunto de señales de referencia $r(t)$. Para ello introducimos los Sistemas de Control Realimentado de dos grados de libertad, en el sentido que se explica en el Apéndice L.

Se verá también un ejemplo de diseño de controladores en el que se imponen restricciones de régimen permanente y de régimen transitorio cuando el sistema a controlar $G(s)$ tiene una señal de perturbación de entrada.

30. Estructuras de control realimentado

En la Figura 48 se muestra el esquema de bloques de la estructura general del Sistema de Control Realimentado que vamos a estudiar en esta Sección y las siguientes. Esta estructura satisface las relaciones siguientes:

$$U(s) = F_1(s)R(s) - F_2(s)Y(s) \quad (30.1a)$$

$$Y(s) = (U(s) + W(s))G(s) \quad (30.1b)$$

donde $F_1(s)$ y $F_2(s)$ representan los controladores.

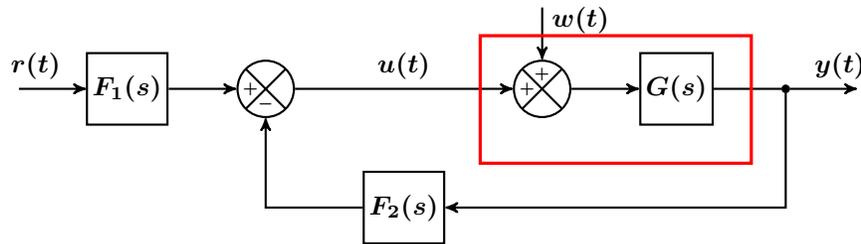


Figura 48: Estructura general del Sistema de Control Realimentado

En lo que sigue supondremos que el polinomio del numerador y el polinomio del denominador de cada una de las funciones de transferencia $G(s)$, $F_1(s)$ y $F_2(s)$ son coprimos, es decir que no tienen factores comunes.

Sustituyendo 30.1a en 30.1b, y despejando $Y(s)$ se obtiene la relación

$$Y(s) = \frac{F_1(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + F_2(s)G(s)}W(s) \quad (30.2)$$

Denominaremos funciones de transferencia de lazo cerrado a $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$

donde

$$H_{yr}(s) = \frac{F_1(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (30.3a)$$

$$H_{yw}(s) = \frac{G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (30.3b)$$

De esta manera se cumple el principio de superposición de los sistemas lineales, es decir

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_w(s) \quad (30.4)$$

donde

$$H_{yr} = \frac{Y_r(s)}{R(s)} \quad (30.5a)$$

$$H_{yw} = \frac{Y_w(s)}{W(s)} \quad (30.5b)$$

En la Figura 49 se muestran los esquemas de bloques que explican el principio de superposición. Debe prestarse atención al hecho de que $u(t) \neq \tilde{u}_w(t) + \tilde{u}_r(t)$, ya que si no fuese así $Y(s) = U(s)G(s)$, lo cual es falso debido a la relación 30.1b, $Y(s) = (U(s) + W(s))G(s)$.

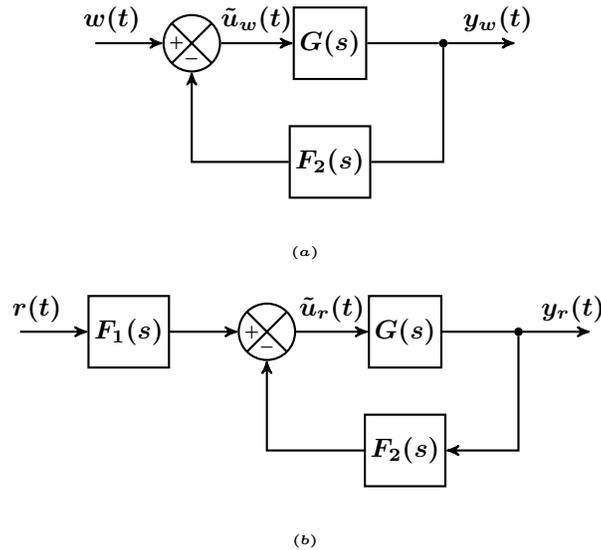


Figura 49: Principio de superposición de la estructura de la Figura 48: (a) Con $r(t) = 0$ (b) Con $w(t) = 0$

No obstante es posible aplicar el principio de superposición a la señal de control $U(s)$ de tal manera que

$$U(s) = U_r(s) + U_w(s) \quad (30.6)$$

Utilizando la relación 30.1b, $Y(s) = (U(s) + W(s))G(s)$, se cumplirá que

$$Y_r(s) = U_r(s)G(s) \quad (30.7a)$$

$$Y_w(s) = (U_w(s) + W(s))G(s) \quad (30.7b)$$

Sustituyendo las expresiones 30.3 y despejando $U_r(s)$ y $U_w(s)$ se obtienen las funciones transferencia de lazo cerrado de las señales de control

$$H_{ur}(s) = \frac{U_r(s)}{R(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (30.8a)$$

$$H_{uw}(s) = \frac{U_w(s)}{W(s)} = -\frac{F_2(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (30.8b)$$

Por otro lado podemos observar que se cumple la siguiente relación entre las funciones de transferencia de lazo cerrado,

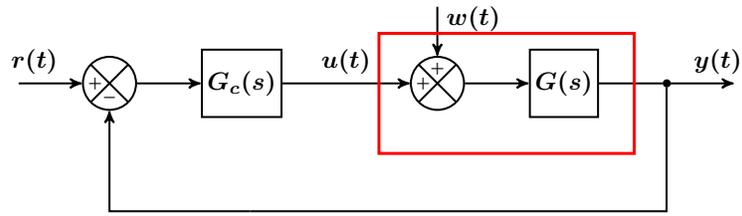
$$H_{yr}(s) = F_1(s)H_{yw}(s) \quad (30.9)$$

Diremos que el Sistema de Control Realimentado dado por las relaciones O es de dos grados de libertad si $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$ son funciones de transferencia independientes, en el sentido de que puedan ser sintonizadas de manera independiente.

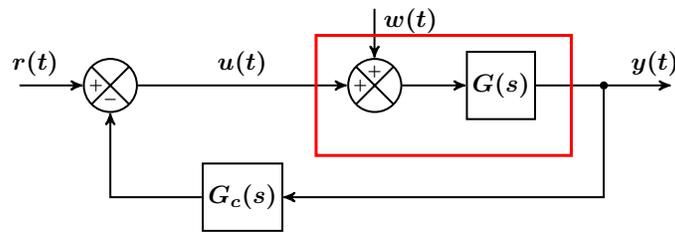
En el Apéndice L se demuestra que $F_2(s)$ es una función de transferencia de un grado de libertad, por lo que si $F_1(s)$ es también una función de transferencia de un grado de libertad pero independiente de $F_2(s)$, entonces el Sistema de Control Realimentado será de dos grados de libertad. Esto es así porque $H_{yw}(s)$ solo depende de $F_2(s)$, mientras que $H_{yr}(s)$ depende de $F_1(s)$ y de $F_2(s)$. Si $F_1(s)$ y $F_2(s)$ no son independientes tampoco lo serán $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$.

Si el Sistema de Control Realimentado es de dos grados de libertad será posible obtener funciones de transferencia de lazo cerrado $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$ que satisfagan especificaciones de diseño independientes, y en consecuencia sea posible resolver conjuntamente los problemas de régimen permanente de supresión de la señal de perturbación y de seguimiento de un conjunto de señales de referencia.

En la Figura 50 se muestran los esquemas de bloques de dos sistemas de control realimentado de un grado de libertad obtenidos a partir de la estructura general, imponiendo restricciones a $F_1(s)$ y $F_2(s)$. Se obtiene una estructura con un controlador en el lazo directo haciendo $F_1(s) = F_2(s) = G_c(s)$, y una estructura con un controlador en el lazo realimentado haciendo $F_1(s) = 1$ y $F_2(s) = G_c(s)$. Esto puede comprobarse sin más que sustituir estos valores en la ecuación 30.1a.



(a)



(b)

Figura 50: Estructura de Control Realimentado de un grado de libertad: (a) Lazo Directo: $F_1 = F_2 = G_c(s)$ (b) Lazo Realimentado: $F_1 = 1$ y $F_2(s) = G_c(s)$

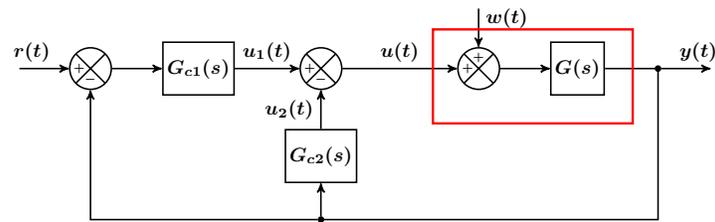
Haciendo

$$F_1(s) = F_2(s) + F_3(s) \quad (30.10)$$

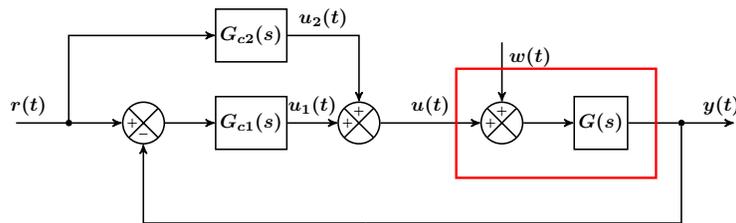
se obtienen las estructuras de Control Realimentado Prealimentada y Paralela de dos grados de libertad recogidas en la Tabla 7 y en la Figura 51.

	Prealimentada	Paralela
$U(s)$	$F_2(s)E(s) + F_3(s)R(s)$	$F_1(s)E(s) + F_3(s)Y(s)$
$U(s)$	$G_{c1}(s)E(s) + G_{c2}(s)R(s)$	$G_{c1}(s)E(s) - G_{c2}(s)Y(s)$
$F_1(s)$	$G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$	$G_{c1}(s)$
$F_2(s)$	$G_{c1}(s)$	$G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$

Tabla 7: Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad



(a)



(b)

Figura 51: Estructuras de Control Realimentado de dos grados de libertad: (a) Estructura Paralela (b) Estructura Prealimentada

En este estudio consideraremos que los polinomios de los denominadores de

$F_1(s)$ y de $F_2(s)$ no son coprimos sino que satisfacen la relación

$$D_{F_2}(s) = D_{F_1}(s)D'_{F_2}(s) \quad (30.11)$$

donde $D'_{F_2}(s)$ es un polinomio.

De esta manera logramos que los polinomios característicos de $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$ sean iguales, es decir que ambas funciones de transferencia tengan los mismos polos de lazo cerrado:

$$P(s) = D_{F_2}(s)D(s) + N_{F_2}(s)N(s) \quad (30.12)$$

Vamos a demostrar a continuación que en el caso Prealimentado esto implica que el polinomio del denominador del controlador $G_{c2}(s)$ sea la unidad, es decir que $G_{c2}(s)$ no tenga polos:

$$D_{c2}(s) = 1 \quad (30.13)$$

Puesto que en el caso Prealimentado $F_2(s) = G_{c1}(s)$ entonces $D_{F_2}(s) = D_{c1}(s)$. Y como $F_1(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s)$ entonces $D_{F_1}(s) = D_{c1}(s)D_{c2}(s)$. Teniendo en cuenta la relación 30.11, $D_{F_2}(s) = D_{F_1}(s)D'_{F_2}(s)$,

$$D_{F_2}(s) = D_{c1}(s)D_{c2}(s)D'_{F_2}(s) = D_{c1}(s) \quad (30.14)$$

De aquí que

$$D_{c2}(s)D'_{F_2}(s) = 1 \quad (30.15)$$

Esto solo puede cumplirse si

$$D_{c2}(s) = D'_{F_2}(s) = 1 \quad (30.16)$$

como queríamos demostrar.

Puede comprobarse que en el caso Paralelo la igualdad 30.11 solo conduce a que $D'_{F_2}(s) = D_{c2}(s)$, por lo que en este caso el controlador $G_{c2}(s)$ puede tener, en general, polos y ceros para que los polinomios característicos de $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$ sean iguales.

31. Ejemplo de diseño de controladores de un sistema de control realimentado de dos grados de libertad

Consideremos el sistema de dos entradas, una de control $u(t)$ y otra de perturbación $w(t)$ que se muestra en la Figura 52:

$$G(s) = \frac{K_m}{s(s+p)} \quad (31.1)$$

donde $K_m > 0$ y $p > 0$.

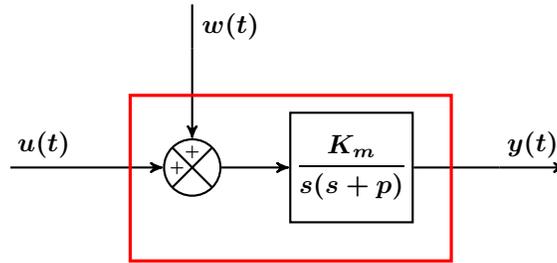


Figura 52: Sistema de dos entradas

Planteamos el problema del diseño de controladores que satisfagan las siguientes especificaciones:

1. Especificaciones de régimen permanente:
 - Supresión de una señal de perturbación constante, $w(t) = W$
 - Seguimiento de señales de referencia hasta la parábola incluida: $r(t) \in \{A_0, A_1 t, \frac{A_2}{2} t^2\}$.
2. Especificaciones de régimen transitorio. Para el caso en que $K_m = 20$ y $p = 9$, una sobreelongación máxima a la entrada escalón menor que el 25% y mayor que el 5%, y un tiempo de establecimiento inferior a $0,25s$ con una tolerancia $\nu = 0,02$

En esta Sección presentaremos las soluciones posibles que satisfacen las especificaciones de régimen permanente, así como las condiciones de estabilidad del sistema de lazo cerrado. En la siguiente Sección 32 se estudia una técnica de sintonización de los controladores basada en el Lugar de Raíces que permite imponer las especificaciones de régimen transitorio.

En el Apéndice M se demuestra que los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ más simples de las estructuras de dos grados de libertad Prealimentada y Paralela, definidas en la Sección 30, que satisfacen todas las especificaciones de régimen permanente tienen la forma recogida en la Tabla 8, donde $N_{c1}(s)$ es un polinomio cualquiera tal que $N_{c1}(0) \neq 0$. La condición de que $N_{c1}(0)$ sea distinto de cero se impone para que no se produzca una cancelación de los ceros de $G_{c1}(s)$ con el polo en el origen (polinomios del numerador y denominador coprimos).

	Prealimentada	Paralela
$G_{c2}(s)$	$\frac{p}{K_m} s$	$-\frac{p}{K_m} s$
$G_{c1}(s)$	$\frac{N_{c1}(s)}{s}$	$\frac{N_{c1}(s)}{s}$

Tabla 8: Controladores más simples que satisfacen las especificaciones de régimen permanente para el sistema de la Figura 52, donde $N_{c1}(0) \neq 0$

Entenderemos por “controladores simples” los de tipo PID ideal, es decir los que tienen algún factor Proporcional, Derivativo e Integral por lo que pueden representarse en la forma siguiente:

$$G_c(s) = \frac{K_c(b_0s^2 + b_1s + b_2)}{s} \quad (31.2)$$

donde b_0, b_1 y b_2 son parámetros del controlador que pueden ser nulos. Por ejemplo se obtiene un controlador PD haciendo $b_2 = 0, b_1, b_0 \neq 0$.

La solución de la Tabla 8 muestra que $G_{c2}(s)$ debe ser de tipo derivativo, mientras que $G_{c1}(s)$ puede ser un PID completo, y como mínimo debe tener un factor Integral.

En la solución de la Tabla 8 podía haberse escogido $N_{c1}(s) = K_{c1}$, lo que realmente sería la solución más simple que satisface las especificaciones de régimen permanente, pero preferimos dejar este grado de libertad abierto con la intención de poder satisfacer las especificaciones de régimen transitorio. No obstante será necesario comprobar que esto puede llevarse a cabo porque de no ser así deberemos cambiar la anterior solución por otra con controladores más complejos.

Supongamos el caso general para un controlador $G_{c1}(s)$ simple

$$N_{c1}(s) = K_{c1}(b_0s^2 + b_1s + b_2) \quad (31.3)$$

En la Tabla 9 se muestran los valores de los parámetros de control de $G_{c1}(s)$ con $K_{c1} > 0$ para los controladores de tipo PI, PID ideal y PID ideal con un cero doble.

	PI	PID ideal	PID ideal cero doble
K_{c1}	K_P	$K_P\tau_D$	$K_P\tau_D$
b_0	0	1	1
b_1	1	$\frac{1}{\tau_D} \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$	$\frac{1}{\tau_D} \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$
b_2	$\frac{1}{\tau_I} \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$	$\frac{1}{\tau_D\tau_I} \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$	$\frac{1}{\tau_D\tau_I} = \frac{b_1^2}{4}$ $\tau_I = 4\tau_D$

Tabla 9: Parámetros del controlador $G_{c1}(s)$ con $K_{c1} > 0$

Se debe cumplir que $b_2 \neq 0$ o en caso contrario la ecuación $N_{c1}(s) = 0$ tendría una raíz en el origen, lo que no es posible porque se supone que $N_{c1}(s)$ y $D_{c1}(s)$ son coprimos.

Los parámetros b_1 y b_2 deben ser positivos como se comprueba al estudiar las condiciones de estabilidad del sistema de lazo cerrado.

Siempre debe hacerse un estudio de las condiciones de estabilidad del sistema de lazo cerrado, ya que en caso contrario ni tan siquiera se puede aplicar el teorema del valor final.

En la Tabla 10 se recogen las condiciones de estabilidad del sistema de lazo cerrado para las estructuras Prealimentada y Paralela. La demostración de estas condiciones utilizando la Tabla de Routh se encuentra en el Apéndice N.

Prealimentado	Paralelo
$b_0 > -\frac{p}{K_m K_{c1}}$	$b_0 = 1$
$0 < b_2 < (p + K_m K_{c1} b_0) b_1$	$0 < b_2 < K_m K_{c1} b_1$

Tabla 10: Condiciones de estabilidad con $K_{c1} > 0$

Puede observarse en la Tabla 10 que la estructura Paralela no admite un controlador de tipo PI ya que $b_0 = 1$.

Por último conviene observar que las condiciones obtenidas para la satisfacción de las especificaciones de diseño de régimen permanente se corresponden con la aplicación de la técnica de asignación de ceros a la función de transferencia de lazo cerrado $H_{yr}(s)$. Es decir que llamando $P(s)$ al polinomio característico, se cumple que

$$H_{yr}(s) = \frac{P_1(s)}{P(s)} = \frac{P_1(s)}{s^3 + P_1(s)} \quad (31.4)$$

De esta manera la función de transferencia del error $H_{er}(s) = 1 - H_{yr}(s)$ quedará en la forma

$$H_{er}(s) = \frac{s^3}{P(s)} \quad (31.5)$$

Como consecuencia al aplicar el teorema del valor final con una señal de referencia parabólica se cumple que $e_r(\infty) \rightarrow 0$:

$$e_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{er}(s) \frac{1}{s^3} = 0 \quad (31.6)$$

32. Técnica de diseño de controladores basada en el Lugar de Raíces

La imposición de las especificaciones de régimen permanente como en el estudio realizado en la Sección 31, deja abiertas puertas para la imposición de las especificaciones de régimen transitorio, y por lo tanto para completar la sintonización de los controladores.

En la Sección 25 de la Parte IV [4] se vió una técnica basada en la igualdad de polinomios característicos que permitía sintonizar los controladores. En esta Sección definiremos una técnica basada en el Lugar de Raíces. Ambas son técnicas de asignación de polos de lazo cerrado, es decir técnicas que parten del

conocimiento de los polos de lazo cerrado deseados s^H . Y como vamos a ver a continuación, ambas técnicas son analíticas en el sentido de que dan lugar a un sistema de ecuaciones no lineales cuya solución es función de los parámetros de los controladores.

En la Sección 27 de la Parte V [5] vimos que el argumento de la función de transferencia de lazo abierto $\tilde{G}(s)$ debe ser un múltiplo impar de π para que un punto del plano complejo $s^H \in \mathbb{C}$ pertenezca al Lugar de Raíces.

Este hecho se definió como condición de ángulo (relación 27.6b de la Sección 27 de la Parte V [5]). Para la obtención de la ganancia K se definió la condición de módulo o magnitud (relación 27.6a de la Sección 27 de la Parte V [5]):

$$|K| = \frac{1}{|\tilde{G}(s^H)|} \quad (32.1a)$$

$$\phi_{\tilde{G}}(s^H) = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (32.1b)$$

La condición de ángulo puede expresarse en la forma de la ecuación 27.9 de la Sección 27 de la Parte V [5]:

$$\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{i=1}^n \phi_i = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (32.2)$$

donde m es el número de ceros de lazo abierto, n el número de polos de lazo abierto, ϕ_i es la fase de $s^H - p_i$, ψ_i es la fase de $s^H - c_i$, p_i i -ésimo polo de lazo abierto y c_i i -ésimo cero de lazo abierto.

La técnica de asignación de polos que describimos a continuación consiste en la construcción de un sistema de ecuaciones a partir de la aplicación de la condición de ángulo del Lugar de Raíces al polinomio característico de la función de transferencia de lazo cerrado. Lo haremos a través del ejemplo de la Sección 31 para la estructura Prealimentada, que como se muestra en la Tabla 8 solo requiere sintonizar el controlador $G_{c1}(s)$ del lazo directo. Este controlador puede tener la forma de un PID

$$G_{c1}(s) = \frac{N_{c1}(s)}{s} = \frac{K_{c1}(b_0s^2 + b_1s + b_2)}{s} \quad (32.3)$$

Vimos, en el ejemplo de la Sección 31 que el polinomio característico de las funciones de transferencia de lazo cerrado $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$ son iguales, y que en el caso de la estructura Prealimentada viene dado por la relación N.1,

$$P(s) = s^3 + ps^2 + K_m K_{c1}(b_0s^2 + b_1s + b_2) \quad (32.4)$$

Para la aplicación del Lugar de Raíces conviene expresar la ecuación característica en la forma

$$1 + K\tilde{G}(s) = 0 \quad (32.5)$$

donde

$$K = K_m K_{c1} \quad (32.6a)$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{b_0s^2 + b_1s + b_2}{s^2(s + p)} \quad (32.6b)$$

En esta Sección partiremos de las especificaciones de régimen transitorio enunciadas en la Sección 31. Para ello obtendremos los polos de lazo cerrado a partir de la hipótesis de que $P(s) = 0$ tiene dos polos complejos conjugados dominantes y un polo real no dominante.

En la Sección 25 de la Parte IV [4] se vió que la sobreelongación máxima M_p y el tiempo de establecimiento t_s para una tolerancia $\nu = 0,02$ de un sistema de segundo orden con una entrada escalón unidad, puede expresarse en función de la parte real e imaginaria del polo complejo de lazo cerrado (relaciones 25.27), como

$$M_p = e^{-\frac{\sigma^H}{\omega^H \pi}} \quad (32.7a)$$

$$t_s \approx \frac{4}{\sigma^H} \quad (32.7b)$$

Estas expresiones permiten calcular con facilidad los polos complejos de lazo cerrado aproximados, a partir de los cuales puede iniciarse la resolución del problema de satisfacción de las especificaciones de diseño de régimen transitorio. Supongamos que $t_s = 0,2s$ por lo que $\sigma^H = 20$. Supongamos también que para el escalón unidad $M_p = 0,2$ por lo que $\omega^H = 39,04$.

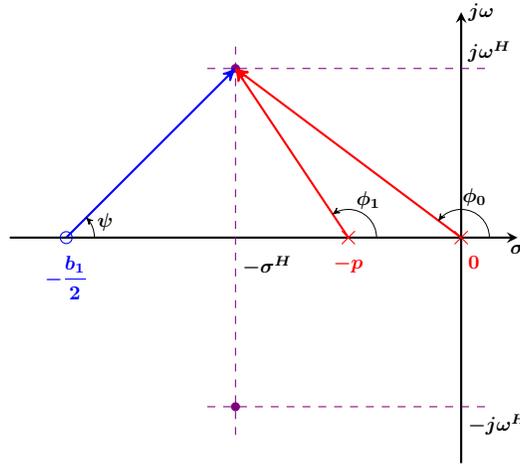
Para ilustrar la técnica del Lugar de Raíces supondremos que $G_{c1}(s)$ es un PID con un cero doble, es decir que tiene la forma

$$G_{c1}(s) = \frac{N_{c1}(s)}{s} = \frac{K_{c1} \left(s^2 + b_1 s + \frac{b_1^2}{4} \right)}{s} = \frac{\left(s + \frac{b_1}{2} \right)^2}{s} \quad (32.8)$$

De esta manera la función de transferencia de lazo abierto $\tilde{G}(s)$ tiene la forma

$$\tilde{G}(s) = \frac{s^2 + b_1 s + \frac{b_1^2}{4}}{s^2(s+p)} \quad (32.9)$$

Como vemos $\tilde{G}(s)$ depende del parámetro desconocido b_1 .



$$2\psi - \phi_1 - 2\phi_0 = (2k + 1)\pi$$

Figura 53: Plano complejo s : condición de ángulo con el controlador PID de cero doble

Utilizando la condición de ángulo del Lugar de Raíces dada por 32.2 se obtiene la ecuación (ver Figura 53) $2\psi - \phi_1 - 2\phi_0 = (2k + 1)\pi$, es decir

$$2\psi - \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^H}{\sigma^H - p} \right) \right) - 2 \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^H}{\sigma^H} \right) \right) = (2k + 1)\pi \quad (32.10)$$

donde $s^H = \sigma^H + j\omega^H$ y ψ satisface la relación

$$\tan \psi = \frac{\omega^H}{\frac{b_1}{2} - \sigma^H} \quad (32.11)$$

Se ha tenido en cuenta que hay un polo doble en el origen y un cero doble en $-\frac{b_1}{2}$.

Resolviendo la ecuación 32.10 para $p = 9$, $\sigma^H = 20$ y $\omega^H = 39,04$ se obtiene un valor aproximado de $\psi = 0,45\pi$ radianes, y de aquí un valor aproximado de $b_1 = 54$.

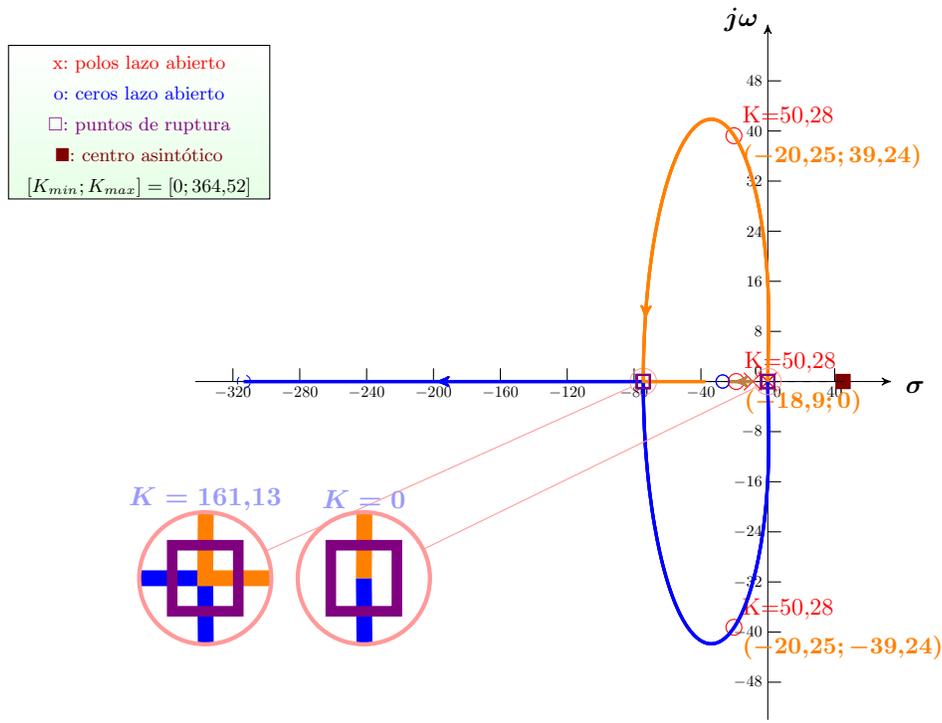


Figura 54: Estructura Prealimentada con un controlador $G_{c1}(s)$ de tipo PID con un cero doble en $c = -27$ para el sistema $\tilde{G}(s) = G_{c1}(s)G(s)$

En la Figura 54 se representa el Lugar de Raíces de la solución obtenida para el PID con un cero doble, donde puede observarse que el polo real de lazo cerrado toma el valor aproximado $p^H = -18,9$. Esto supone que la hipótesis de dominancia de s^H no es totalmente correcta, por lo que cabe esperar que la sobreelongación máxima y el tiempo de establecimiento no coincidan con los obtenidos bajo el supuesto de que el sistema de lazo cerrado se comportará, ante una entrada escalón unitario, como un sistema de segundo orden.

En la Figura 54 se muestra también el valor aproximado de la ganancia $K = 50,28$. De aquí que el polinomio característico dado por 32.4 quede en la forma

$$P(s) = s^3 + 59,28s^2 + 2715,12s + 36654,12 \quad (32.12)$$

cuyas raíces obtenidas con el programa Octave son

$$s_1^H = -20,267 + j39,3 \quad (32.13a)$$

$$s_2^H = -20,267 - j39,3 \quad (32.13b)$$

$$p_2^H = -18,746 \quad (32.13c)$$

Por lo tanto el controlador $G_{c1}(s)$ ha sido sintonizado y tiene la forma,

$$G_{c1}(s) = \frac{2,514(s + 27)^2}{s} \quad (32.14)$$

donde la ganancia $K_{c1} = \frac{K}{K_m} = \frac{50,28}{20} = 2,514$.

En el estudio de régimen permanente de la Sección 31 vimos cómo debía ser $G_{c2}(s)$ en la estructura Preamentada,

$$G_{c2}(s) = \frac{p}{K_m} s = \frac{9}{20} s = 0,45s \quad (32.15)$$

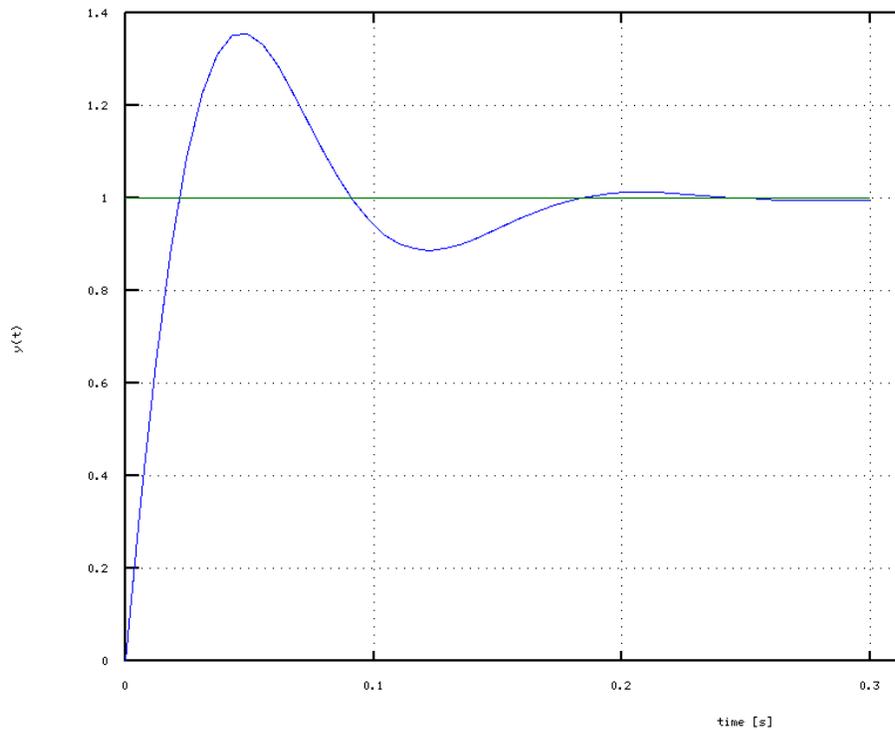


Figura 55: Respuesta $y_r(t)$ al escalón unidad del PID con un cero doble

En la Figura 55 se muestra la respuesta $y_r(t)$ para una entrada escalón unidad realizada con Octave. Puede verse que la sobreelongación es aproximadamente del 35%, mientras que el tiempo de establecimiento es aproximadamente de 0,25s. Para ello se ha tenido en cuenta que al imponer las restricciones de régimen permanente lo que se ha hecho es aplicar indirectamente una técnica

de asignación de ceros, de tal manera que

$$H_{yr}(s) = \frac{N_{yr}(s)}{P(s)} = \frac{P_1(s)}{s^3 + P_1(s)} \quad (32.16)$$

donde $P(s)$ viene dado por la relación 32.12.

Por lo tanto

$$H_{yr}(s) = \frac{59,28s^2 + 2715,12s + 36654,12}{s^3 + 59,28s^2 + 2715,12s + 36654,12} \quad (32.17)$$

Por otro lado la función de transferencia de lazo cerrado $H_{yw}(s)$ tiene la forma

$$H_{yw}(s) = \frac{G(s)}{1 + G_{c1}(s)G(s)} = \frac{K_m s}{P(s)} \quad (32.18)$$

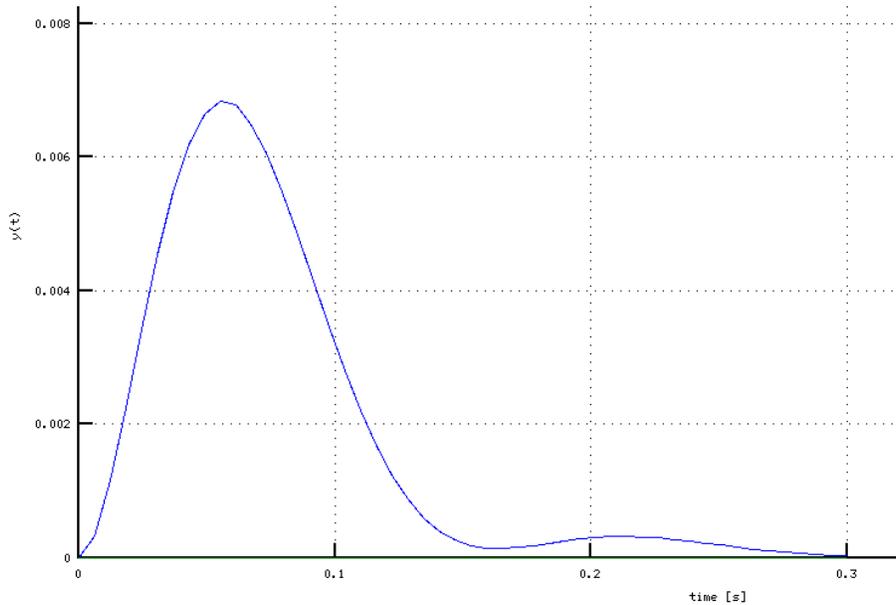


Figura 56: Respuesta $y_w(t)$ con una perturbación constante unidad del PID con un cero doble

En la Figura 56 se muestra la respuesta $y_w(t)$ a una perturbación constante unidad realizada con Octave.

La respuesta del sistema de control Prealimentado a una entrada de referencia escalón $r(t) = A_0 r_0(t)$ y una perturbación $w(t) = W r_0(t)$ será $y(t) = A_0 y_r(t) + W y_w(t)$. Podemos observar que el efecto debido a la perturbación es prácticamente despreciable frente a $y_r(t)$, aunque obviamente depende de W .

El método de estudio para el caso en que se hubiese escogido un controlador $G_{c1}(s)$ de tipo PI es idéntico al anterior. Ahora

$$G_{c1}(s) = \frac{K_{c1}(s + b_2)}{s} \quad (32.19)$$

y la ecuación del Lugar de Raíces es

$$\psi - \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^H}{\sigma^H - p} \right) \right) - 2 \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^H}{\sigma^H} \right) \right) = (2k + 1)\pi \quad (32.20)$$

donde $s^H = \sigma^H + j\omega^H$ y ψ satisface la relación

$$\tan \psi = \frac{\omega^H}{b_2 - \sigma^H} \quad (32.21)$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene un valor de $\psi \approx 0,89\pi$ radianes, y de aquí que $b_2 = -88,3$, por lo que el cero del controlador es inestable en el sentido de Hurwitz. En la Figura 57 se muestra el Lugar de Raíces para este controlador. Puede observarse que el sistema de lazo cerrado será inestable ya que tiene polos reales de lazo cerrado positivos. Como consecuencia, con la elección del controlador PI no es posible resolver el problema de diseño para este ejemplo. Esto no significa que no pueda encontrarse un controlador de tipo PI para otras funciones de transferencia y otras especificaciones de diseño.

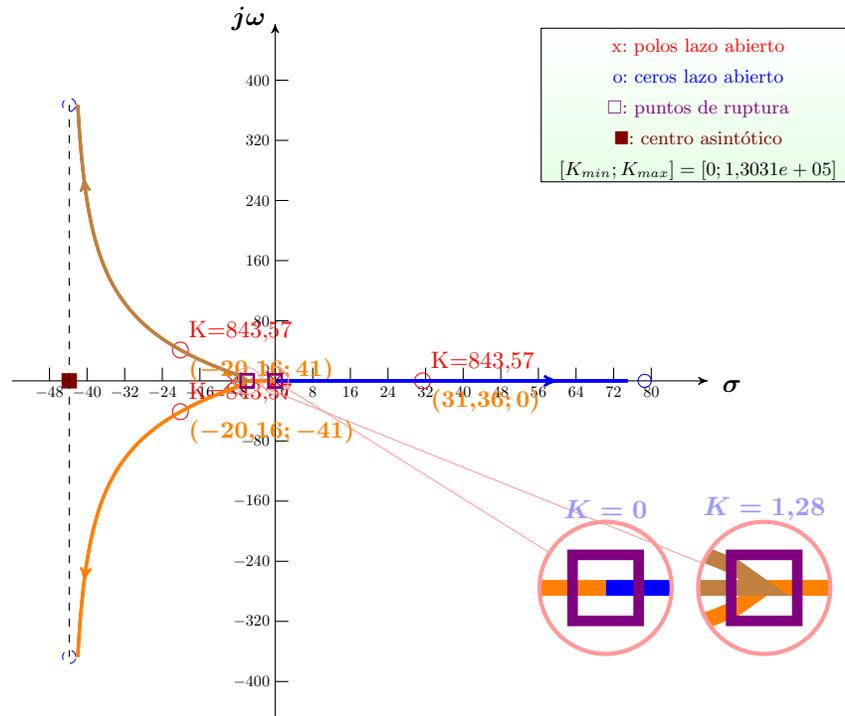


Figura 57: Estructura Prealimentada con un controlador $G_{c1}(s)$ de tipo PI

32.1. Estudio de las señales de control $u_r(t)$ y $u_w(t)$

En la Sección 30 vimos que las funciones de transferencia de la señal de control $u(t)$ del Sistema de Control Realimentado de dos grados de libertad sigue las relaciones

$$H_{ur}(s) = \frac{U_r(s)}{R(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (32.22a)$$

$$H_{uw}(s) = \frac{U_w(s)}{W(s)} = -\frac{F_2(s)G(s)}{1 + F_2(s)G(s)} \quad (32.22b)$$

Se cumple que

$$U(s) = U_r(s) + U_w(s) \quad (32.23)$$

Como consecuencia la entrada al sistema $G(s)$ será $U(s) + W(s)$.

Siguiendo con la estructura Prealimentada y el controlador PID con un

cero doble del ejemplo, podemos ver que

$$H_{ur}(s) = \frac{H_{yr}(s)}{G(s)} = \frac{sP_1(s)(s+p)}{K_m P(s)} \quad (32.24a)$$

$$H_{uw}(s) = \frac{s^2(s+p)}{P(s)} - 1 = \frac{s^2p - P_1(s)}{P(s)} \quad (32.24b)$$

donde $P(s) = s^3 + P_1(s)$,

$$P_1(s) = 59,28s^2 + 2715,12s + 36654,12 \quad (32.25a)$$

$$P(s) = s^3 + 59,28s^2 + 2715,12s + 36654,12 \quad (32.25b)$$

Por comodidad escribiremos $P_1(s)$ en la forma

$$P_1(s) = as^2 + bs + c \quad (32.26)$$

Podemos observar que debido a que los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ no son causales, tampoco lo es H_{ur} . Sin embargo puede estudiarse la respuesta al escalón unidad de la siguiente manera:

$$U_r(s) = \frac{H_{ur}(s)}{s} = \frac{P_1(s)(s+p)}{K_m P(s)} \quad (32.27)$$

La señal $U_r(s)$ tiene el mismo número de ceros que de polos por lo que presenta una respuesta impulsiva, es decir una delta de Dirac, que podemos extraer,

$$U_r(s) = d_0 + \frac{d_1s^2 + d_2s + d_3}{P(s)} \quad (32.28)$$

donde

$$d_0 = \frac{a}{K_m} = 2,964 \quad (32.29a)$$

$$d_1 = \frac{b + a(p - a)}{K_m} = -13,274 \quad (32.29b)$$

$$d_2 = \frac{c + b(p - a)}{K_m} = -4993,1 \quad (32.29c)$$

$$d_3 = \frac{c(p - a)}{K_m} = -92148 \quad (32.29d)$$

Por lo tanto

$$u_r(t) = d_0\delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d_1s^2 + d_2s + d_3}{P(s)} \right\} \quad (32.30)$$

En las Figuras 58 y 59 se muestran las respuestas a la entrada escalón de $u_r(t) - d_0\delta(t)$ y de $u_w(t)$ respectivamente.

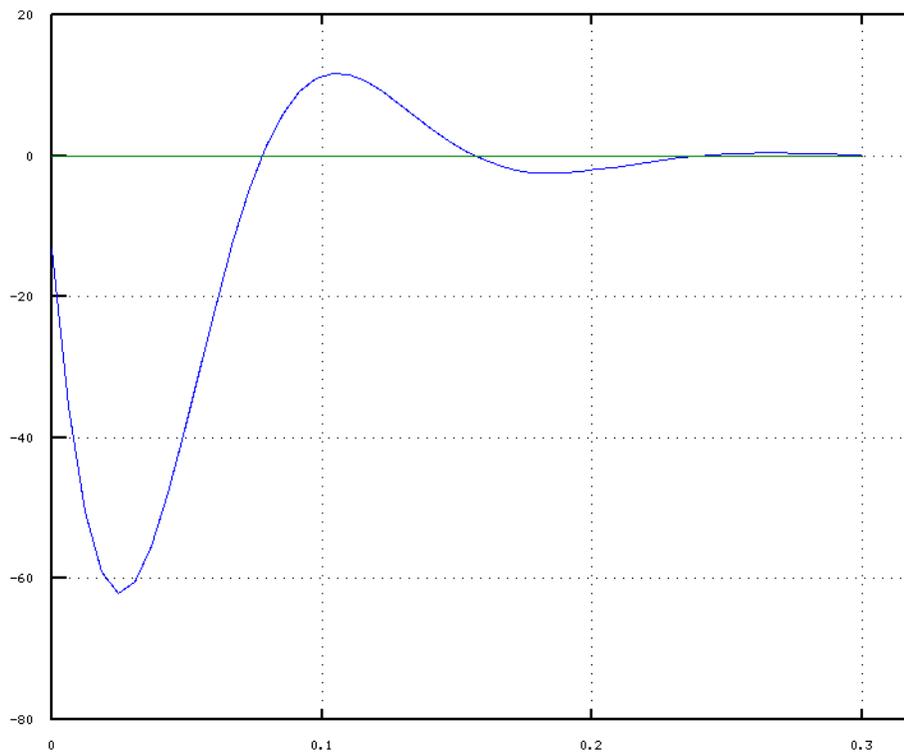


Figura 58: Señal de control $u_r(t) - d_0\delta(t)$

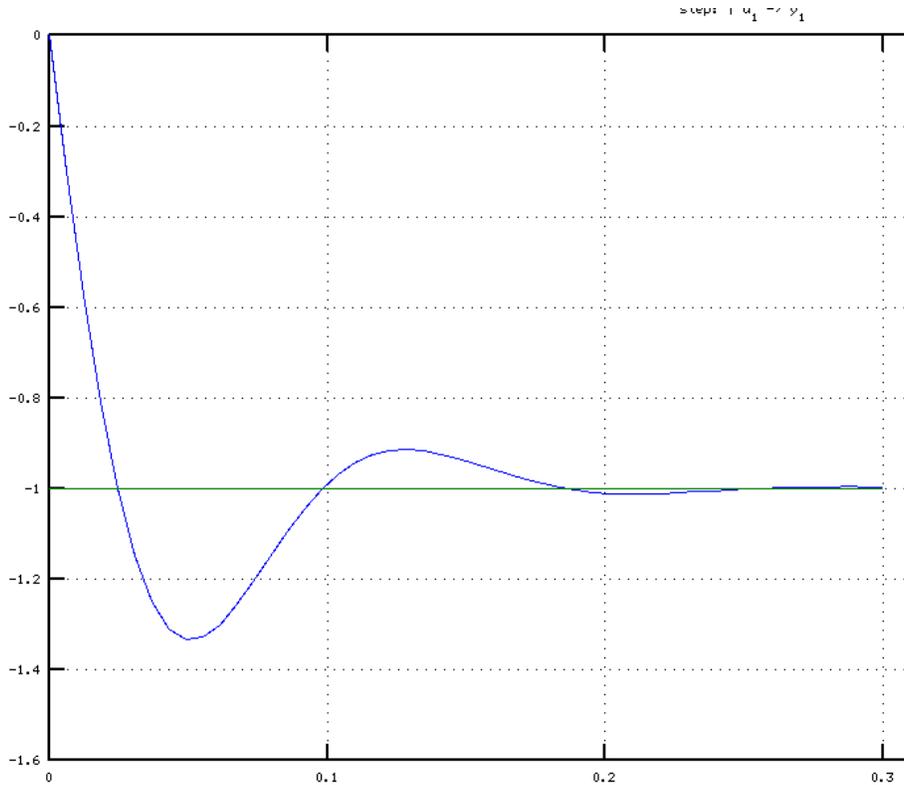


Figura 59: Señal de control $u_w(t)$

La componente impulsiva se debe a que aparecen factores derivativos, es decir en s , en los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$. La derivada de un escalón es una delta de Dirac. Por lo tanto debe cumplirse que

$$d_0 = K_{c1} + K_{c2} = \frac{K + p}{K_m} \quad (32.31)$$

La componente impulsiva puede hacerse desaparecer si se diseñan controladores causales. Para ello sería suficiente con añadir un polo muy elevado a los factores derivativos de $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$. Por ejemplo, las relaciones 32.14 y 32.15 pueden ser sustituidas por las siguientes:

$$G_{c1}(s) = \frac{K_{c1}(s + b_1)^2}{s(\epsilon_1 s + 1)} = \frac{2,514(s + 27)^2}{s(\epsilon_1 s + 1)} \quad (32.32a)$$

$$G_{c2}(s) = \frac{\frac{p}{K_m} s}{\epsilon_2 s + 1} = \frac{0,45s}{\epsilon_2 s + 1} \quad (32.32b)$$

donde ϵ_1, ϵ_2 son suficientemente bajos.

32.2. Estudio con un PID ideal con ceros reales

Supongamos que $G_{c1}(s)$ es un PID con ceros distintos y reales,

$$G_{c1}(s) = \frac{N_{c1}(s)}{s} = \frac{K_{c1}(s^2 + b_1s + b_2)}{s} = \frac{(s + c_1)(s + c_2)}{s} \quad (32.33)$$

De esta manera la función de transferencia de lazo abierto $\tilde{G}(s)$ tiene la forma

$$\tilde{G}(s) = \frac{s^2 + b_1s + b_2}{s^2(s + p)} \quad (32.34)$$

Como vemos $\tilde{G}(s)$ depende de los parámetros desconocidos b_1 y b_2 .

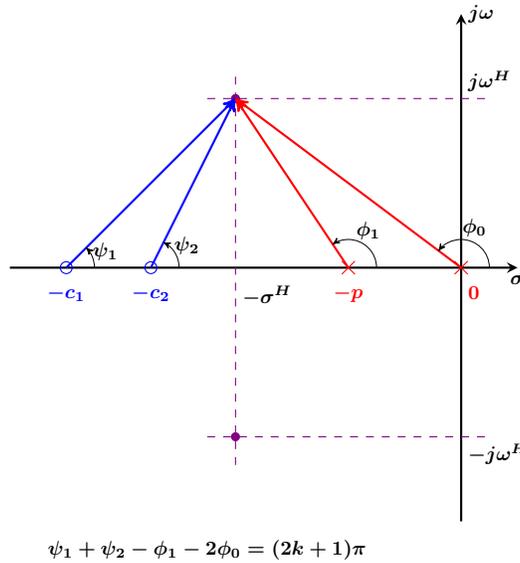


Figura 60: Plano complejo s : condición de ángulo con el controlador PID

Utilizando la condición de ángulo del Lugar de Raíces dada por 32.2 se obtiene la ecuación (ver Figura 60) $\psi_1 + \psi_2 - \phi_1 - 2\phi_0 = (2k + 1)\pi$, es decir

$$\psi_1 + \psi_2 - \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^H}{\sigma^H - p} \right) \right) - 2 \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^H}{\sigma^H} \right) \right) = (2k + 1)\pi \quad (32.35)$$

donde $s^H = \sigma^H + j\omega^H$ y ψ_1, ψ_2 satisfacen las relaciones

$$\tan \psi_1 = \frac{\omega^H}{c_1 - \sigma^H} \quad (32.36a)$$

$$\tan \psi_2 = \frac{\omega^H}{c_2 - \sigma^H} \quad (32.36b)$$

Teniendo en cuenta la fórmula de la tangente de la suma se obtiene una ecuación cuadrática entre c_1 y c_2 que representa una cónica,

$$\tan(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\tan \psi_1 + \tan \psi_2}{1 - \tan \psi_1 \tan \psi_2} = \frac{\omega^H(c_1 + c_2 - 2\sigma^H)}{(c_1 - \sigma^H)(c_2 - \sigma^H) - (\omega^H)^2} \quad (32.37)$$

Haciendo la transformación siguiente se facilitan los cálculos,

$$c_1 = (r_1 + 1)\sigma^H \quad (32.38a)$$

$$c_2 = (r_2 + 1)\sigma^H \quad (32.38b)$$

$$f^H = \frac{\sigma^H}{\omega^H} \quad (32.38c)$$

Entonces

$$\tan(\psi_1 + \psi_2) = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 f^H - \frac{1}{f^H}} \quad (32.39)$$

que podemos escribir en la forma

$$r_1 + r_2 - r_1 r_2 f^H \tan(\psi_1 + \psi_2) + \frac{\tan(\psi_1 + \psi_2)}{f^H} = 0 \quad (32.40)$$

Resolviendo la ecuación 32.37 para $p = 9$, $\sigma^H = 20$ y $\omega^H = 39,04$ se obtiene un valor aproximado para la suma de ψ_1 y ψ_2 ,

$$\psi_1 + \psi_2 \approx 0,89\pi \quad (32.41)$$

Por lo tanto la ecuación 32.40 queda en la forma,

$$r_1 + r_2 + 0,185r_1 r_2 - 0,702 = 0 \quad (32.42)$$

Podemos comprobar que cuando $r_1 = r_2 = r$ se obtiene la solución del PID con un cero doble: $r = 0,34$ por lo que $c_1 = c_2 = 1,34\sigma^H = 26,8$.

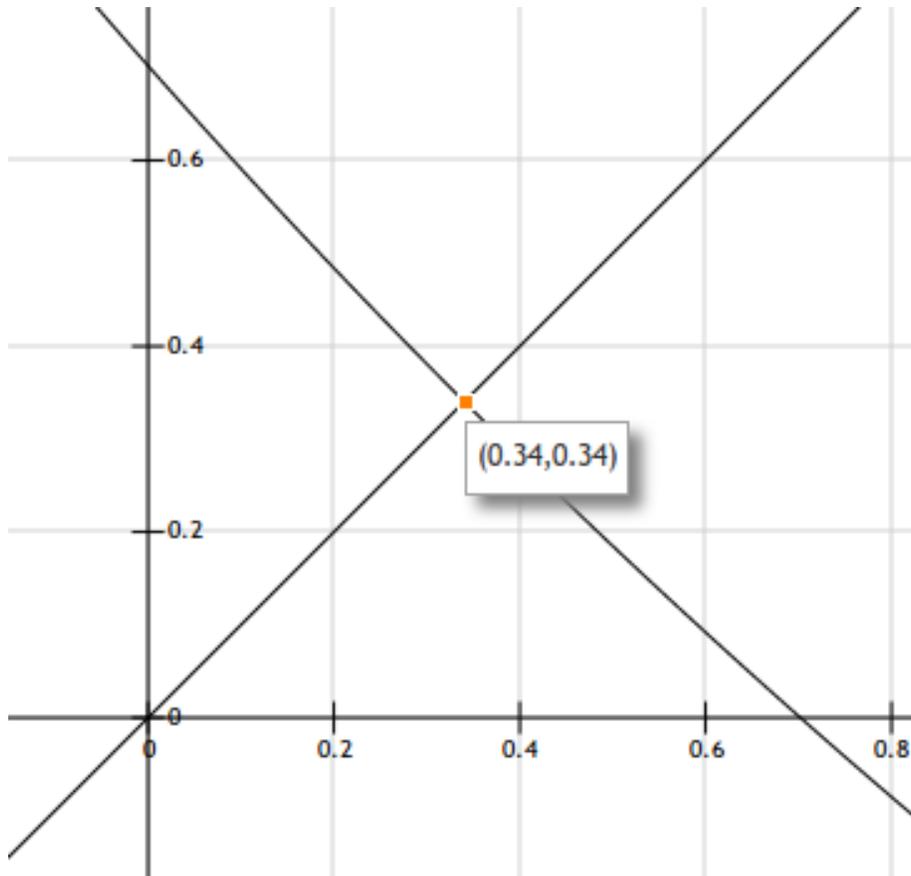


Figura 61: Curva $r_1 - r_2$ dada por 32.42

En la Figura 61 se muestra la curva hiperbólica $r_1 - r_2$, lo que significa que al aumentar r_1 disminuye r_2 y viceversa. Además es aproximadamente la recta $r_1 + r_2 = 0,702$.

Esto significa que probablemente la mejor solución al problema de diseño sea la del PID con un cero doble, al menos si se mira desde el punto de vista del polo real de lazo cerrado p^H . Cuanto más se acerque un cero del controlador a σ^H menos validez tendrá la hipótesis de dominancia de s^H frente a p^H . Esto es así porque, debido a que $\sigma^H > p$ entonces los ceros de lazo abierto deberán caer a la izquierda del polo $-p$ en el plano complejo s , por lo que siempre existirá una rama del Lugar de Raíces que sea real y vaya del polo de lazo abierto $-p$ al cero más cercano de lazo abierto $-c_1$ o $-c_2$.

Una conclusión que debe sacarse es que la hipótesis de dominancia de s^H frente a p^H es deficiente cuando $\sigma^H > p$ y los ceros del controlador son reales.

Por último debe tenerse en cuenta que los ceros del controlador PID no

tienen por qué ser reales, sino que pueden ser complejos conjugados. Si se traza el Lugar de Raíces puede observarse que las posibilidades de resolver el problema de diseño aumentan considerablemente, ya que la rama real del Lugar de Raíces se extiende desde el polo de lazo abierto $-p$ hasta el cero de lazo abierto en $-\infty$. Y en consecuencia será más sencillo que sea válida la hipótesis de dominancia del s^H frente a p^H . Esta posibilidad no existe ni con el PID con un cero doble, ni con un PID de ceros distintos pero reales.

32.3. Estudio con un PID ideal con ceros complejos conjugados

Dedicaremos esta Subsección a estudiar el caso en que el controlador $G_{c1}(s)$ es un PID con ceros complejos conjugados. Se obtendrá la repuesta al escalón de $y_r(t)$. Dejamos como ejercicio obtener las respuestas $y_w(t)$ para una señal de perturbación constante, así como las de las señales de control $u_r(t)$ y $u_w(t)$.

La idea en esta Subsección es plantear una metodología de diseño basada en la técnica del Lugar de Raíces explicada en la Sección 32.

Utilizando la condición de ángulo del Lugar de Raíces dada por 32.2 se obtiene la ecuación (ver Figura 62) $\psi_1 + \psi_2 - \phi_1 - 2\phi_0 = (2k + 1)\pi$, es decir

$$2\pi - \psi'_1 + \psi_2 - \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^H}{\sigma^H - p} \right) \right) - 2 \left(\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^H}{\sigma^H} \right) \right) = (2k + 1)\pi \quad (32.43)$$

donde $s^H = \sigma^H + j\omega^H$, $c_1 = -\sigma_c + j\omega_c$, $c_2 = -\sigma_c - j\omega_c$, $\psi_1 = 2\pi - \psi'_1$ y ψ_2 satisfacen las relaciones

$$\tan \psi'_1 = \frac{\omega_c - \omega^H}{\sigma_c - \sigma^H} \quad (32.44a)$$

$$\tan \psi_2 = \frac{\omega_c + \omega^H}{\sigma_c - \sigma^H} \quad (32.44b)$$

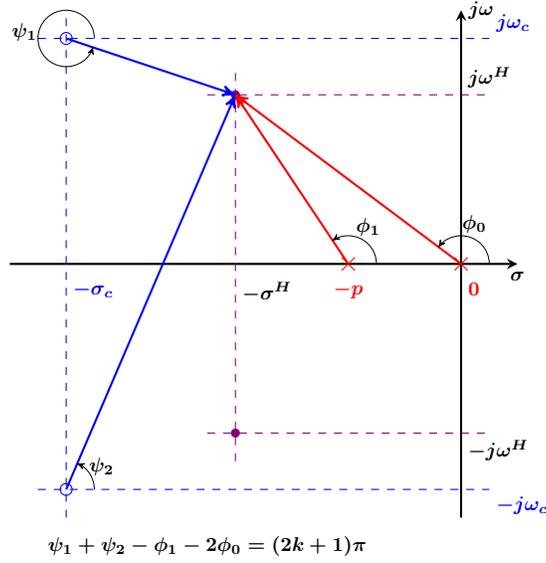


Figura 62: Plano complejo s : condición de ángulo con el controlador PID de ceros complejos conjugados

Teniendo en cuenta la fórmula de la tangente de la diferencia se obtiene una ecuación cuadrática entre σ_c y ω_c que representa una cónica,

$$\tan(\psi_2 - \psi'_1) = \frac{\tan \psi_2 - \tan \psi'_1}{1 + \tan \psi'_1 \tan \psi_2} = \frac{2\omega^H(\sigma_c - \sigma^H)}{(\sigma_c - \sigma^H)^2 + (\omega_c^2 - (\omega^H)^2)} \quad (32.45)$$

Haciendo la transformación siguiente se facilitan los cálculos,

$$\sigma_c = (r_1 + 1)\sigma^H \quad (32.46a)$$

$$\omega_c^2 = (r_2 + 1)(\omega^H)^2 \quad (32.46b)$$

$$f^H = \frac{\sigma^H}{\omega^H} \quad (32.46c)$$

Entonces

$$\tan(\psi_2 - \psi'_1) = \frac{2r_1}{r_1^2 f^H + \frac{r_2}{f^H}} \quad (32.47)$$

que podemos escribir en la forma

$$2r_1 - r_1^2 f^H \tan(\psi_2 - \psi'_1) - r_2 \frac{\tan(\psi_2 - \psi'_1)}{f^H} = 0 \quad (32.48)$$

En los Apéndices **H** y **I** de la Parte IV [4] se demuestran las siguientes fórmulas para la sobreelongación máxima M_p (H.7) y el tiempo de establecimiento

t_s (I.3) de los sistemas de segundo orden que responden a la primera forma canónica,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad (32.49a)$$

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{\zeta}{\nu\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\zeta\omega_n} \quad (32.49b)$$

Resolveremos el ejemplo aplicando la hipótesis de que el sistema de lazo cerrado tiene dos polos dominantes complejos conjugados, $s^H = -\sigma^H + j\omega^H$ y su conjugado. Supondremos también que estos polos responden a la primera canónica de un sistema de segundo orden, por lo que iniciaremos el diseño del sistema de control realimentado con la estructura Prealimentada con valores de s^H obtenidos con las expresiones 32.49a y 32.49b, para una tolerancia ν del 2%, $M_p = 0,2$ y $t_s = 0,2s$.

La fórmulas 32.49 pueden escribirse en la forma

$$M_p = e^{-\left(\frac{\sigma^H}{\omega^H}\right)\pi} \quad (32.50a)$$

$$t_s \approx \frac{\ln\left(\frac{\sigma^H}{\nu\omega^H}\right)}{\sigma^H} \quad (32.50b)$$

Por lo tanto

$$\frac{\sigma^H}{\omega^H} = -\frac{\ln M_p}{\pi} \quad (32.51a)$$

$$\omega^H = \frac{\ln\left(\frac{\sigma^H}{\nu\omega^H}\right)}{t_s} \quad (32.51b)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene el polo complejo de lazo cerrado $s^H = -16,216 + j31,653$.

Resolviendo ahora la ecuación 32.45 de la condición de ángulo del Lugar de Raíces para $p = 9$, $\sigma^H = 16,216$ y $\omega^H = 31,653$ se obtiene un valor aproximado para la diferencia de ψ_2 y ψ'_1 ,

$$\psi_2 - \psi'_1 \approx 0,87275\pi \quad (32.52)$$

Por lo tanto la ecuación 32.48 queda en la forma,

$$2r_1 + 0,21646r_1^2 + 0,82478r_2 = 0 \quad (32.53)$$

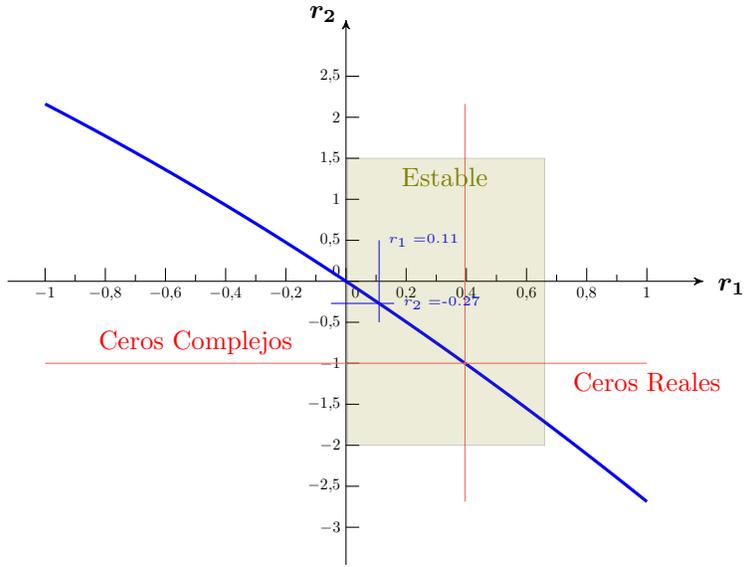


Figura 63: Cónica $r_1 - r_2$ del PID

En la Figura 63 se muestra la curva cónica dada por 32.53, en la que se ha representado la región de estabilidad del sistema de lazo cerrado así como las regiones en que los ceros del PID son reales o complejos conjugados. Para ello se ha tenido en cuenta la Tabla 10 de las condiciones de estabilidad y el hecho de que cuando $r_2 + 1 < 0$ se obtiene un valor negativo de ω_c^2 dado por 32.46c, lo que indica que los ceros del PID serán reales con la forma $c_1 = -\sigma_c - \sqrt{-(r_2 + 1)}\omega^H$ y $c_2 = -\sigma_c + \sqrt{-(r_2 + 1)}\omega^H$.

La Figura 63 solo muestra valores de $r_1 \in [-1, 1]$ de tal manera que $\sigma_c > 0$ garantizando que los ceros del PID complejos conjugados sean estables en el sentido de Hurwitz.

Para el cálculo de la región de estabilidad del sistema de lazo cerrado se ha tenido en cuenta, como se ha dicho, la Tabla 10, con $b_0 = 1$. Para ello se ha calculado el valor de la ganancia $K = K_m K_{c1}$ utilizando la condición de magnitud del Lugar de Raíces, $1 + K\tilde{G}(s^H) = 0$.

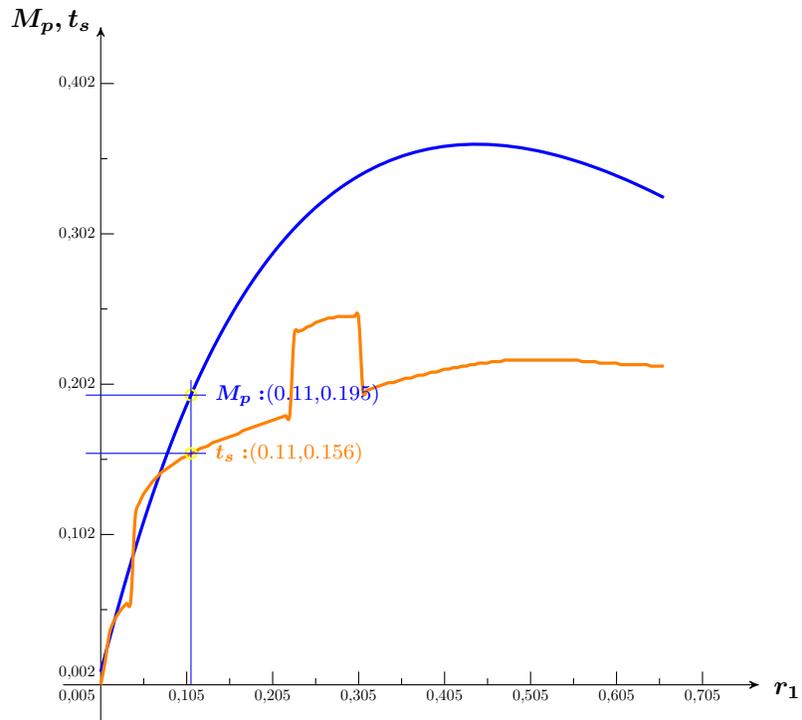


Figura 64: M_p y t_s en la región estable de la respuesta al escalón $y_r(t)$

Para la elección del valor de r_1 y por lo tanto de r_2 se ha simulado la respuesta al escalón del sistema de control realimentado de dos grados de libertad con la estructura Prealimentada para valores de r_1 en la región de estabilidad. En la Figura 64 se muestran las curvas de la sobreelongación máxima M_p y del tiempo de establecimiento t_s para esta situación.

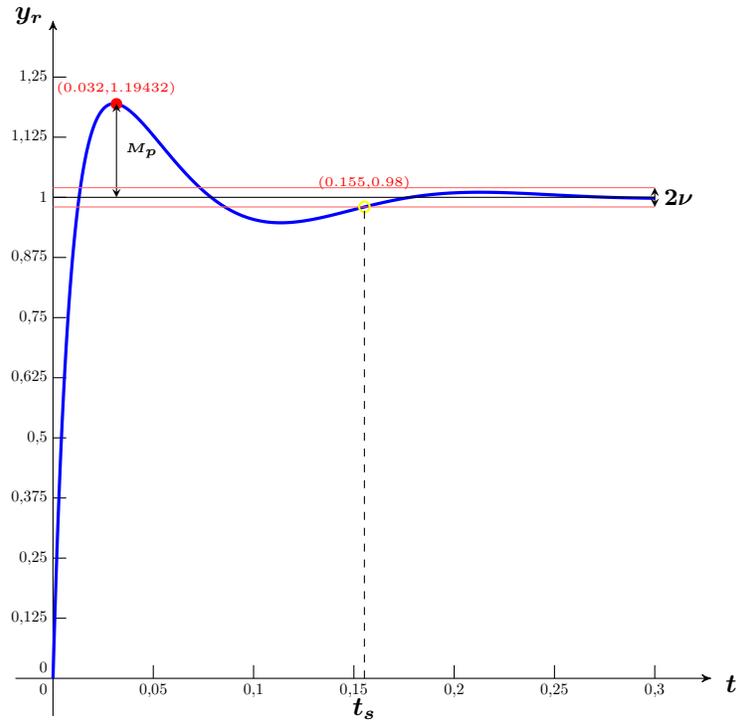


Figura 65: Respuesta $y_r(t)$ a la señal de referencia escalón unidad con $r_1 = 0,11$

Finalmente se ha elegido $r_1 = 0,11$ obteniendo valores $M_p = 0,1948$ y $t_s = 0,156$. En la Figura 65 se muestra la respuesta al escalón de la salida $y_r(t)$, y en la Figura 66 el Lugar de Raíces en el que se aprecia que el polo real de lazo cerrado p^H no es dominante, por lo que la hipótesis de dominancia de los polos de lazo cerrado complejos conjugados es suficientemente acertada. Hay que tener en cuenta, no obstante, que las expresiones de M_p y t_s que iniciaron el diseño se corresponden con un sistema de segundo orden expresado en la primera forma canónica, por lo que tampoco se tuvo en cuenta que los polos de lazo cerrado dominantes también responden a la segunda forma canónica, como se explica en la Sección 22 de la Parte IV [4]. Esto es así porque $H_{y_r}(s)$ tiene una componente derivativa.

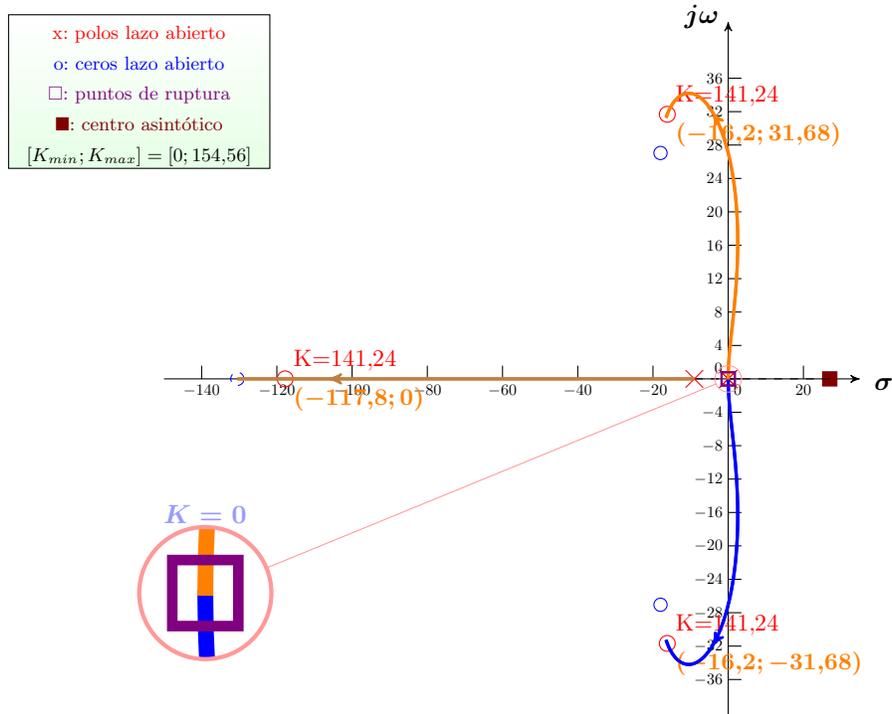


Figura 66: Lugar de Raíces con un PID de ceros complejos

K. Lema de los polinomios coprimos o identidad de Bézout

La identidad de Bézout se refiere a números enteros, y dice que dados dos números enteros cualesquiera a y b cuyo máximo común divisor es d , entonces existen dos números enteros x e y coprimos (no tienen factores comunes), tales que $ax + by = d$. Si a y b son números primos entonces $d = 1$.

El siguiente Lema es una generalización de esta identidad para polinomios.

Lema de los polinomios coprimos: Se cumple que los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ de grados m y $n \geq m$ respectivamente son coprimos sii existen los polinomios coprimos $A(s)$ y $B(s)$ de grados $n_A < n$ y $m_B < m$ respectivamente tales que

$$A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1 \quad (\text{K.1})$$

También se cumple que si $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios coprimos, entonces los polinomios $A(s)$ y $B(s)$ son únicos.

Por ejemplo, como $D(s) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ y $N(s) = s+1$ no son coprimos, no se puede encontrar ningún polinomio $A(s)$ y $B(s)$ que cumpla la identidad de Bézout, ya que siempre se cumple que $(s+1)(A(s) + (s+2)B(s)) \neq 1$.

Pero si $D(s) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ y $N(s) = s+4$, escogiendo los polinomios genéricos $A(s)$ y $B(s)$ de grados $n_A < n$ y $n_B < m$ entonces

$$B(s) = c \quad (\text{K.2a})$$

$$A(s) = as + b \quad (\text{K.2b})$$

$$1 = A(s)(s+4) + B(s)(s^2 + 3s + 2) = (a+c)s^2 + (4a+b+3c)s + (4b+2c) \quad (\text{K.2c})$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$a + c = 0 \quad (\text{K.3a})$$

$$4a + b + 3c = 0 \quad (\text{K.3b})$$

$$4b + 2c = 1 \quad (\text{K.3c})$$

cuya solución es única y dada por

$$c = b = -a = \frac{1}{6} \quad (\text{K.4})$$

El Lema nos asegura que los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ son coprimos, ya que $A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1$, para los polinomios

$$A(s) = -\frac{1}{6}s + \frac{1}{6} \quad (\text{K.5a})$$

$$B(s) = \frac{1}{6} \quad (\text{K.5b})$$

También ha quedado demostrado en este ejemplo que $A(s)$ y $B(s)$ son únicos.

L. Estructuras de un grado de libertad

Consideremos un sistema realimentado de un único controlador de función de transferencia $G_c(s)$,

$$G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (\text{L.1})$$

donde los polinomios $N_c(s)$ y $D_c(s)$ son coprimos y de grados m_c y n_c respectivamente.

Consideremos el sistema a controlar de función de transferencia $G(s)$,

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{L.2})$$

donde los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ son coprimos y de grados m y $n \geq m$ respectivamente.

Sean $A(s)$ y $B(s)$ los polinomios de Bézout de $N(s)$ y $D(s)$ del Lema de polinomios coprimos enunciado en el Apéndice K, es decir

$$A(s)N(s) + B(s)D(s) = 1 \quad (\text{L.3})$$

Independientemente de qué estructura de control se tenga (el controlador en el lazo directo o en el lazo realimentado), el polinomio característico $P(s)$ tiene la forma

$$P(s) = D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s) \quad (\text{L.4})$$

Multipliquemos la identidad de Bézout por $P(s)$,

$$P(s) = P(s)A(s)N(s) + P(s)B(s)D(s) \quad (\text{L.5})$$

Restando ambas expresiones,

$$0 = (P(s)A(s) - N_c(s))N(s) + (P(s)B(s) - D_c(s))D(s) \quad (\text{L.6})$$

Como consecuencia se cumplirá que para cualquier polinomio $Q(s)$,

$$P(s)A(s) - N_c(s) = Q(s)D(s) \quad (\text{L.7a})$$

$$P(s)B(s) - D_c(s) = -Q(s)N(s) \quad (\text{L.7b})$$

De aquí se deduce que

$$N_c(s) = P(s)A(s) - Q(s)D(s) \quad (\text{L.8a})$$

$$D_c(s) = P(s)B(s) + Q(s)N(s) \quad (\text{L.8b})$$

La función de transferencia del controlador podrá expresarse en función de $P(s)$ y de $Q(s)$ como

$$G_c(s) = \frac{A(s) - M(s)D(s)}{B(s) + M(s)N(s)} \quad (\text{L.9})$$

donde

$$M(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (\text{L.10})$$

Si consideramos que el polinomio característico $P(s)$ es conocido (y estable en el sentido de Hurwitz), y puesto que también son conocidos los polinomios $N(s)$ y $D(s)$, y $A(s)$ y $B(s)$ son polinomios únicos que se pueden obtener resolviendo la identidad de Bézout, la función de transferencia del controlador dependerá exclusivamente del polinomio $Q(s)$. El polinomio $Q(s)$ puede ser cualquiera. Este es el sentido que daremos al concepto de grado de libertad de una función de transferencia.

Podemos ver que las funciones de transferencia de lazo cerrado $H_{yr}(s)$ y $H_{yw}(s)$ son de un grado de libertad dependientes del mismo polinomio $Q(s)$. En este sentido diremos que la estructura del sistema de control realimentado es de un grado de libertad.

Si el controlador está situado en el lazo directo,

$$H_{yr}(s) = \frac{N_c(s)N(s)}{P(s)} = (A(s) - M(s)D(s))N(s) \quad (\text{L.11a})$$

$$H_{yw}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{L.11b})$$

y si el controlador está situado en el lazo realimentado

$$H_{yr}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{L.12a})$$

$$H_{yw}(s) = \frac{D_c(s)N(s)}{P(s)} = (B(s) + M(s)N(s))N(s) \quad (\text{L.12b})$$

Puesto que $H_{er} = 1 - H_{yr}$, entonces la función de transferencia del error también será de un grado de libertad.

Además, por la elección que se ha hecho de $P(s)$ todas las funciones de transferencia de lazo cerrado serán estables y en consecuencia el sistema realimentado será estable para cualquier polinomio $Q(s)$ que se escoja.

M. Demostración de la solución dada en la Tabla 8 para el ejemplo de la Sección 31: $G(s) = \frac{K_m}{s(s+p)}$

Para demostrar la solución de la Tabla 8 es suficiente con utilizar el teorema del valor final imponiendo las especificaciones de diseño de régimen permanente, además del criterio de que los controladores sean simples en el sentido enunciado en la Sección 31.

- Supresión de la señal de perturbación constante, $w(t) = W$.

Admitiendo que $y_w(t)$ es una señal estable, puede utilizarse el teorema del valor final,

$$y_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{yw}(s) W(s) \quad (\text{M.1})$$

donde $H_{yw}(s)$ viene dado por la expresión 30.3b.

La resolución del problema de supresión de $w(t)$ constante supone analizar las condiciones bajo las cuales se satisface la relación

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} H_{yw}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_m D_{F_2}(s)}{s(s+p)D_{F_2}(s) + K_m N_{F_2}(s)} \quad (\text{M.2})$$

donde $N_{F_2}(s)$ y $D_{F_2}(s)$ son los polinomios del numerador y denominador de $F_2(s)$ dado en la Tabla 7 según que la estructura sea Prealimentada o Paralela.

Para la estructura Prealimentada la relación M.2 puede escribirse como

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_m D_{c1}(s)}{s(s+p)D_{c1}(s) + K_m N_{c1}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_{c1}(s)}{N_{c1}(s)} \quad (\text{M.3})$$

Como consecuencia se deberá cumplir que

$$D_{c1}(s) = s D'_{c1}(s) \quad (\text{M.4a})$$

$$N_{c1}(0) \neq 0 \quad (\text{M.4b})$$

donde $D'_{c1}(s)$ es un polinomio cualquiera.

Elijiendo el controlador más simple se deberá cumplir que $D'_{c1}(s) = 1$.

Para la estructura Paralela la relación M.2 puede escribirse como

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_m D_{c1}(s) D_{c2}(s)}{s(s+p)D_{c1}(s)D_{c2}(s) + K_m(N_{c1}(s)D_{c2}(s) + N_{c2}(s)D_{c1}(s))} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_{c1}(s)D_{c2}(s)}{N_{c1}(s)D_{c2}(s) + N_{c2}(s)D_{c1}(s)} \end{aligned} \quad (\text{M.5})$$

Para esta estructura se pueden dar dos soluciones:

a)

$$D_{c1}(s) = s D'_{c1}(s) \quad (\text{M.6a})$$

$$N_{c1}(0) \neq 0 \quad (\text{M.6b})$$

donde $D'_{c1}(s)$ es un polinomio cualquiera.

Elijiendo el controlador más simple se deberá cumplir que $D'_{c1}(s) = 1$.

b)

$$D_{c2}(s) = sD'_{c2}(s) \quad (\text{M.7a})$$

$$N_{c2}(0) \neq 0 \quad (\text{M.7b})$$

donde $D'_{c2}(s)$ es un polinomio cualquiera.

Eligiendo el controlador más simple se deberá cumplir que $D'_{c2}(s) = 1$.

Debe observarse que el caso $D_{c1}(s) = sD'_{c1}(s)$ y $D_{c2}(s) = sD'_{c2}(s)$ no puede darse ya que esto supone que los polinomios del numerador y denominador de $H_{yw}(s)$ no sean coprimos como estamos imponiendo, sino que tendrían el factor común s .

Veremos a continuación que al resolver el problema de seguimiento, las dos soluciones posibles anteriores se reducen a una, la **a)** con las condiciones **M.6**.

- Seguimiento de señales de referencia hasta la parábola incluida: $r(t) \in \{A_0, A_1t, \frac{A_2}{2}t^2\}$.

Admitiendo que $e_r(t) = r(t) - y_r(t)$ es una señal estable, puede utilizarse el teorema del valor final,

$$e_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - H_{yr}(s))R(s) \quad (\text{M.8})$$

donde $H_{yr}(s)$ viene dado por la expresión **30.3a**.

Debe observarse que lo que debe imponerse es que $e(\infty) \rightarrow 0$, pero como $e(t) = r(t) - y(t) = r(t) - (y_r(t) + y_w(t)) = e_r(t) - y_w(t)$, y ya se han impuesto las condiciones para que $y_w(\infty) \rightarrow 0$, entonces es suficiente con estudiar $e_r(t)$.

La resolución del problema de seguimiento de $r(t)$ supone analizar las condiciones bajo las cuales se satisface la relación

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} (1 - H_{yr}(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{s(s+p) + (F_2(s) - F_1(s))K_m}{s(s+p) + K_m F_2(s)} \quad (\text{M.9})$$

donde $F_1(s)$ y $F_2(s)$ vienen dados en la Tabla **7** según que la estructura sea Prealimentada o Paralela.

Para la estructura Prealimentada la relación **M.9** puede escribirse como

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{D_{c1}(s)(s(s+p) - N_{c2}(s)K_m)}{s(s+p)D_{c1}(s) + K_m N_{c1}(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{D_{c1}(s)(s^2 + s(p - N'_{c2}(s)K_m))}{K_m N_{c1}(s)} \end{aligned} \quad (\text{M.10})$$

donde se ha tenido en cuenta que $D_{c2} = 1$.

Teniendo en cuenta la condición obtenida al resolver el problema de supresión de la perturbación **M.4a** $D_{c1}(s) = sD'_{c1}(s) = 1$, concluimos que las condiciones para que se satisfaga la igualdad **M.10** son

$$p - N'_{c2}(s)K_m = 0 \quad (\text{M.11a})$$

$$N_{c1}(0) \neq 0 \quad (\text{M.11b})$$

Eligiendo el controlador G_{c2} más simple se obtiene la solución $N'_{c2}(s) = K_{c2}b_0$, por lo que $K_{c2}b_0 = \frac{p}{K_m}$.

Para la estructura Paralela la relación **M.9** puede escribirse como

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{D_{c1}(s)(s(s+p)D_{c2}(s) + N_{c2}(s)K_m)}{s(s+p)D_{c1}(s)D_{c2}(s) + K_m(N_{c1}(s)D_{c2}(s) + N_{c2}(s)D_{c1}(s))} \quad (\text{M.12})$$

Teniendo en cuenta las condiciones obtenidas al resolver el problema de supresión de la perturbación **a)** y **b)**, deberá cumplirse que $D_{c1}(0)D_{c2}(0) = 0$, por lo que la igualdad **M.12** queda en la forma

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{D_{c1}(s)(s(s+p)D_{c2}(s) + N_{c2}(s)K_m)}{K_m(N_{c1}(s)D_{c2}(s) + N_{c2}(s)D_{c1}(s))} \quad (\text{M.13})$$

La condición **b)** supone que $D_{c2}(s) = sD'_{c2}(s)$, por lo que **M.13** queda en la forma

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{D_{c1}(s)N_{c2}(s)K_m}{K_m N_{c2}(s)D_{c1}(s)} = \infty \quad (\text{M.14})$$

Como consecuencia esta solución no puede darse, como ya se anticipó anteriormente.

La condición **a)** supone que $D_{c1}(s) = sD'_{c1}(s)$ y $D_{c2}(0) \neq 0$, por lo que **M.13** queda en la forma

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{D'_{c1}(s)(s(s+p)D_{c2}(s) + N_{c2}(s)K_m)}{K_m N_{c1}(s)D_{c2}(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{D'_{c1}(s)(s^2 + s(p + N'_{c2}(s)K_m))}{K_m N_{c1}(s)} \end{aligned} \quad (\text{M.15})$$

donde se ha impuesto que $D_{c2}(s) = 1$ aplicando el criterio de que $G_{c2}(s)$ sea un controlador simple.

Como consecuencia se deberá cumplir que

$$D_{c1}(s) = sD'_{c1}(s) \quad (\text{M.16a})$$

$$p + N'_{c2}(s)K_m = 0 \quad (\text{M.16b})$$

$$N_{c1}(0) \neq 0 \quad (\text{M.16c})$$

donde $D'_{c1}(s)$ es un polinomio cualquiera.

Eligiendo el controlador G_{c2} más simple se obtiene la solución $N'_{c2}(s) = K_{c2}b_0$, por lo que $K_{c2}b_0 = -\frac{p}{K_m}$, y eligiendo el controlador G_{c1} más simple se obtiene $D'_{c1}(s) = 1$.

Resumiendo todo este análisis ha quedado demostrada la solución dada en la Tabla 8.

N. Demostración de las condiciones de estabilidad dadas en la Tabla 10 para el ejemplo de la Sección 31: $G(s) = \frac{K_m}{s(s+p)}$

Los polinomios característicos de las estructuras Prealimentada y Paralela del ejemplo de la Sección 31 tienen la forma recogida en la Tabla 11.

Prealimentado	Paralelo
$P(s) = s^3 + ps^2 + K_m N_{c1}(s)$	$P(s) = s^3 + K_m N_{c1}(s)$

Tabla 11: Polinomios característicos

Para hacer simultáneamente el estudio para las estructuras Prealimentada y Paralela introduciremos un parámetro $\alpha \in \{0, 1\}$ de tal manera que el polinomio característico tenga la forma:

$$P(s) = s^3 + \alpha ps^2 + K_m K_{c1}(b_0 s^2 + b_1 s + b_2) \quad (\text{N.1})$$

donde $\alpha = 1$ es el caso Prealimentado y $\alpha = 0$ el caso Paralelo.

La Tabla de Routh para ambos casos será:

$$\begin{array}{l} s^3 : \\ s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & K_m K_{c1} b_1 \\ \alpha p + K_m K_{c1} b_0 & K_m K_{c1} b_2 \\ x & \\ K_m K_{c1} b_2 & \end{array} \right. \quad (\text{N.2})$$

donde

$$x = K_m K_{c1} \frac{(\alpha p + K_m K_{c1} b_0) b_1 - b_2}{\alpha p + K_m K_{c1} b_0} = K_m K_{c1} \left(b_1 - \frac{b_2}{\alpha p + K_m K_{c1} b_0} \right) \quad (\text{N.3})$$

Las condiciones de estabilidad se deducen imponiendo que no haya cambios de signo en la primera columna de la Tabla de Routh. Estudiaremos solamente el

caso en que $K_{c1} > 0$, por lo que las condiciones de estabilidad son las siguientes:

$$0 < b_2 < (\alpha p + K_m K_{c1} b_0) b_1 \quad (\text{N.4a})$$

$$0 < \alpha p + K_m K_{c1} b_0 \quad (\text{N.4b})$$

Por lo tanto deberá cumplirse que $b_1 > 0$.

Puede observarse que en el caso Paralelo, es decir para $\alpha = 0$, deberá ser $b_0 \neq 0$, ya que $b_2 \neq 0$, por lo tanto en este caso $b_0 = 1$ necesariamente. El controlador $G_{c1}(s)$ deberá ser de tipo *PID*, y en este caso las condiciones de estabilidad son

$$0 < b_2 < K_m K_{c1} b_1 \quad (\text{N.5})$$

Para un *PID* con un cero doble,

$$0 < b_1 < 4K_m K_{c1} \quad (\text{N.6})$$

O. PID de dos grados de libertad

Se han propuesto muchas clases de controladores PID algunos de los cuales están comercializados (puede consultarse [6] y [7]). Un ejemplo de controlador de dos grados de libertad es un PID como el que enunciamos a continuación:

$$U(s) = K_p \left((1 - \alpha) + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{(1 - \beta)\tau_D s}{\epsilon s + 1} \right) R(s) - K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{\tau_D s}{\epsilon s + 1} \right) Y(s) \quad (\text{O.1})$$

con $\epsilon \approx 0$.

Es un controlador cuyos parámetros son los de un controlador PID realizable (K_p, τ_I, τ_D) (el parámetro ϵ no suele considerarse un parámetro del controlador ya que su función es hacer realizable el factor derivativo sin que modifique sustancialmente el comportamiento del PID ideal) junto con otros dos parámetros (α, β) que, como vamos a ver, son los que hacen que este PID defina una estructura de dos grados de libertad.

Si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ definiría una estructura de un grado de libertad con un PID realizable en el lazo directo:

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{\tau_D s}{\epsilon s + 1} \right) E(s) \quad (\text{O.2})$$

donde $E(s) = R(s) - Y(s)$.

Incluso el caso $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ se considera que es un controlador de dos grados de libertad si bien lo que nos interesa es saber si define o no una estructura de dos grados de libertad en el sentido que hemos definido en la Sección 30. Puede verse que se trata de un **controlador PI+D** en el que el PI se sitúa en el lazo directo y el D en el lazo paralelo (también puede verse como un PD-PID, donde el PD es un controlador prealimentado y el PID se sitúa en el lazo

paralelo, pero es más complejo, además de que los factores PD son idénticos por lo que presentaría un problema de implementación, ya que no es posible fabricar componentes idénticos).

Será un controlador de tipo I+PD cuando $(\alpha, \beta) = (1, 1)$.

A continuación vamos a analizar las condiciones para las cuales se trata de un controlador que define una estructura de dos grados de libertad.

De acuerdo con la definición de controlador general dado por vemos que

$$F_1(s) = K_p \left((1 - \alpha) + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{(1 - \beta)\tau_D s}{\epsilon s + 1} \right) \quad (\text{O.3a})$$

$$F_2(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{\tau_D s}{\epsilon s + 1} \right) \quad (\text{O.3b})$$

por lo que

$$F_1(s) = F_2(s) - K_p \left(\alpha + \frac{\beta\tau_D s}{\epsilon s + 1} \right) \quad (\text{O.4})$$

El término de la derecha puede ser escrito en la forma de un controlador PD (para $\alpha \neq 0$)

$$F_3(s) = -K'_c \left(1 + \frac{\tau'_D s}{\epsilon s + 1} \right) \quad (\text{O.5})$$

donde

$$K'_c = K_p \alpha \quad (\text{O.6a})$$

$$\tau'_D = \frac{\beta\tau_D}{\alpha} \quad (\text{O.6b})$$

Cuando $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, el término $F_3(s)$ dispone de un único parámetro β que hace que $F_1(s)$ y $F_2(s)$ sean independientes. Pero en general vemos que $F_1(s)$ y $F_2(s)$ pueden ser sintonizados independientemente en función de los parámetros (α, β) .

Bibliografía

- [1] F. Monasterio-Huelin and A. Gutiérrez, *Apuntes de Teoría. Primera Parte*. SECO2014-I, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [2] —, *Apuntes de Teoría. Segunda Parte*. SECO2014-II, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [3] —, *Apuntes de Teoría. Tercera Parte*. SECO2014-III, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [4] —, *Apuntes de Teoría. Cuarta Parte*. SECO2014-IV, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [5] —, *Apuntes de Teoría. Quinta Parte*. SECO2014-V, 2014. [Online]. Available: <http://robolabo.etsit.upm.es>
- [6] A. O'Dwyer, *Handbook of PI and PID controller tuning rules*. World Scientific, 2003. [Online]. Available: <http://books.google.es/books?id=xkwOhZjk0IC>
- [7] K. Åström and T. Hägglund, *PID controllers: Theory, Design, and Tuning*, ser. Instrument Society of America. International Society for Measurement and Control, 1995. [Online]. Available: <http://books.google.es/books?id=nF1oQgAACAAJ>