

Análisis

Sistemas Electrónicos de Control



Blanca Larraga
12 de febrero de 2025

blanca.larraga@upm.es
www.robolabo.etsit.upm.es

- ➊ Estabilidad
 - Tabla Routh
 - Ejemplos

- ➋ Análisis en el Dominio del Tiempo
 - Sistemas de primer orden
 - Sistemas de segundo orden
 - Régimen transitorio
 - Régimen permanente

- ➌ Análisis en el Dominio Complejo
 - Lugar de Raíces
 - Ejemplos
 - Parámetros característicos

- ➍ Conclusiones

-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones

¿Qué entendemos por estabilidad?

¿Qué entendemos por estabilidad?

- **Lyapunov:** Un sistema es estable en el sentido de Lyapunov si al introducir una pequeña perturbación a la entrada, se produce un pequeño movimiento a la salida.

¿Qué entendemos por estabilidad?

- ▶ **Lyapunov:** Un sistema es estable en el sentido de Lyapunov si al introducir una pequeña perturbación a la entrada, se produce un pequeño movimiento a la salida.
- ▶ **BIBO:** Un sistema es estable en el sentido BIBO si para una entrada acotada su salida está acotada.

¿Qué entendemos por estabilidad?

- ▶ **Lyapunov:** Un sistema es estable en el sentido de Lyapunov si al introducir una pequeña perturbación a la entrada, se produce un pequeño movimiento a la salida.
- ▶ **BIBO:** Un sistema es estable en el sentido BIBO si para una entrada acotada su salida está acotada.

Sea $P(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$

- ▶ **Hurwitz:** El polinomio $P(s)$ es estable en el sentido de Hurwitz si las raíces de la ecuación $P(s) = 0$ tienen parte real negativa distinta de cero.

¿Qué entendemos por estabilidad?

- ▶ **Lyapunov:** Un sistema es estable en el sentido de Lyapunov si al introducir una pequeña perturbación a la entrada, se produce un pequeño movimiento a la salida.
- ▶ **BIBO:** Un sistema es estable en el sentido BIBO si para una entrada acotada su salida está acotada.

Sea $P(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$

- ▶ **Hurwitz:** El polinomio $P(s)$ es estable en el sentido de Hurwitz si las raíces de la ecuación $P(s) = 0$ tienen parte real negativa distinta de cero.
- ▶ Si **algún polo** se encuentra en el **semiplano derecho del plano s** , el sistema es **inestable**
- ▶ Si **todos los polos** se encuentran en el **semiplano izquierdo del plano s** , el sistema es **estable**
- ▶ La **estabilidad** es una **propiedad del sistema**, no depende de la entrada

-
- 1 Estabilidad
 Tabla Routh
 Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo
 Sistemas de primer orden
 Sistemas de segundo orden
 Régimen transitorio
 Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
 Lugar de Raíces
 Ejemplos
 Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones

Criterio de estabilidad de Routh



- ▶ Sea $P(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$
- ▶ Condición necesaria de estabilidad: $a_i > 0, \forall i$
- ▶ Tabla de Routh:

$s^n :$	a_0	a_2	a_4	$\dots$	
$s^{n-1} :$	a_1	a_3	a_5	$\dots$	
$s^{n-2} :$	b_1	b_2	b_3	$\dots$	$b_i = \frac{a_1a_{2i} - a_0a_{2i+1}}{a_1}$
$s^{n-3} :$	c_1	c_2	c_3	$\dots$	$c_i = \frac{b_1a_{2i+1} - a_1b_{i+1}}{b_1}$
$s^{n-4} :$	d_1	d_2	d_3	$\dots$	$d_i = \frac{c_1b_{i+1} - b_1c_{i+1}}{c_1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\dots$
$s^2 :$					
$s^1 :$					
$s^0 :$					

- ▶ Condición necesaria y suficiente: $a_i > 0, \forall i$ y todos los términos de la primera columna del array con signo positivo ($a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$)

-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones
-

- ▶ $s^3 + 4s^2 + 8s + 12 = 0$
- ▶ $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 4 = 0$
- ▶ $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$
- ▶ $s^3 - 3s + 2 = 0$
- ▶ $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

- ▶ $s^3 + 4s^2 + 8s + 12 = 0$
- ▶ $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 4 = 0$
- ▶ $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$
- ▶ $s^3 - 3s + 2 = 0$
- ▶ $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

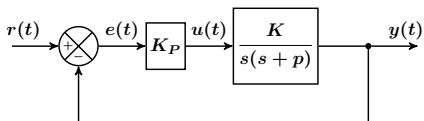
- ▶ Término de la primera columna es 0. Se aproxima por ε .
 - ▶ Sin cambio de signo: Raíces imaginarias
 - ▶ Cambio de signo: Raíces positivas

- ▶ $s^3 + 4s^2 + 8s + 12 = 0$
- ▶ $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 4 = 0$
- ▶ $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$
- ▶ $s^3 - 3s + 2 = 0$
- ▶ $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

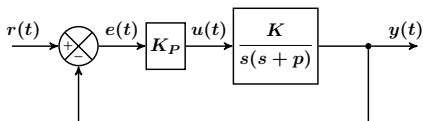
- ▶ Término de la primera columna es 0. Se aproxima por ε .
 - ▶ Sin cambio de signo: Raíces imaginarias
 - ▶ Cambio de signo: Raíces positivas

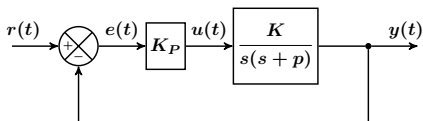
- ▶ Todos los términos de una fila son cero. Se cambia por su derivada.
 - ▶ Pares de raíces reales con signos opuestos
 - ▶ Pares de raíces complejas conjugadas en el eje imaginario

Estabilidad Routh - Ejemplos



$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p K}{s^2 + ps + KK_p}$$





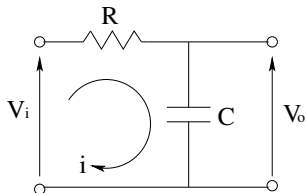
$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p K}{s^2 + ps + KK_p}$$

$$\begin{array}{l} s^2 : \\ s^1 : \\ s^0 : \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 1 & KK_p \\ p & 0 \\ KK_p & 0 \end{array} \right.$$

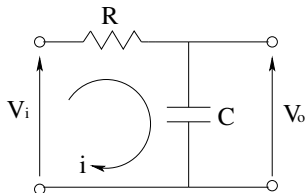
$$s = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4KK_p}}{2}$$

-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo**
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones
-

-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo**
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones
-



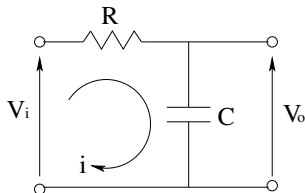
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$



$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$

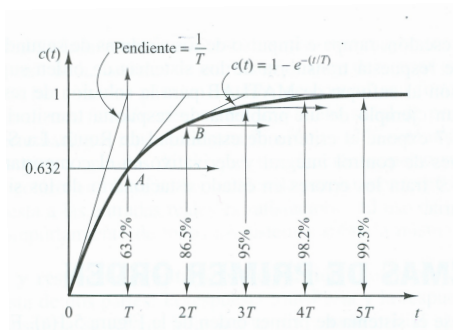
- ▶ $V_i(s) = \frac{1}{s}$
- ▶ $V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/RC)}$
- ▶ $v_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$

Respuesta al escalón

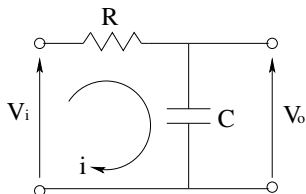


- $V_i(s) = \frac{1}{s}$
- $V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/RC)}$
- $v_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$

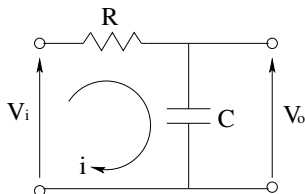


Respuesta a la rampa



$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$

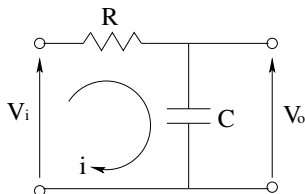
Respuesta a la rampa



$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$

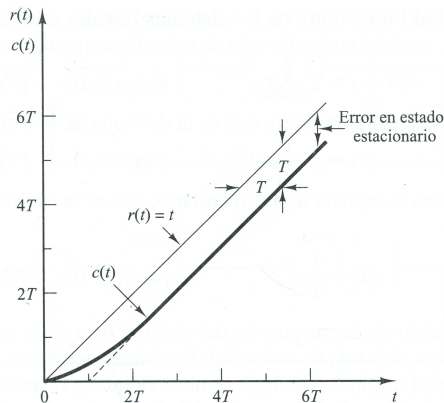
- ▶ $V_i(s) = \frac{1}{s^2}$
- ▶ $V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{RC}{s} + \frac{RC}{s + (1/RC)}$
- ▶ $v_o(t) = t - RC + RCe^{-\frac{t}{RC}}$

Respuesta a la rampa

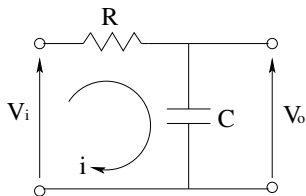


- $V_i(s) = \frac{1}{s^2}$
- $V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{RC}{s} + \frac{RC}{s + (1/RC)}$
- $v_o(t) = t - RC + RCe^{-\frac{t}{RC}}$

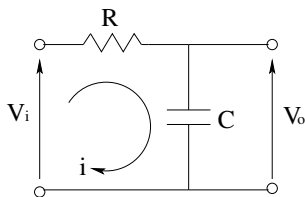
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$



Respuesta al impulso



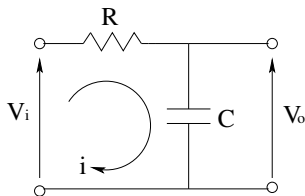
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$



$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$

- ▶ $V_i(s) = 1$
- ▶ $V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$
- ▶ $v_o(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

Respuesta al impulso

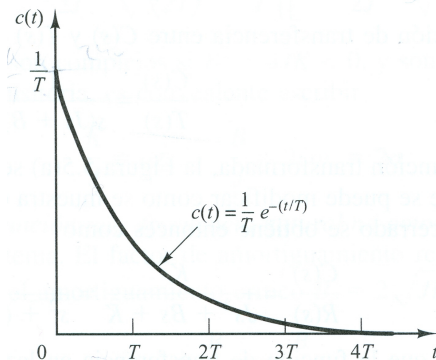


► $V_i(s) = 1$

► $V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$

► $v_o(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + Ts}$$

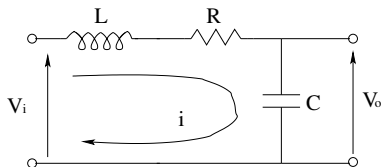


- La respuesta a la derivada de una señal de entrada es la derivada de la señal de la salida

Señal	entrada	salida
Rampa	$r(t) = t$	$y(t) = t - RC + RCe^{-\frac{t}{RC}}$
Escalon	$r(t) = 1$	$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$
Impulso	$r(t_0) = \infty, r(t \neq t_0) = 0$	$y(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

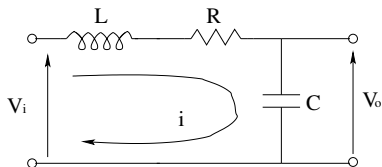
-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo**
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones
-

Ecuación generalizada



$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

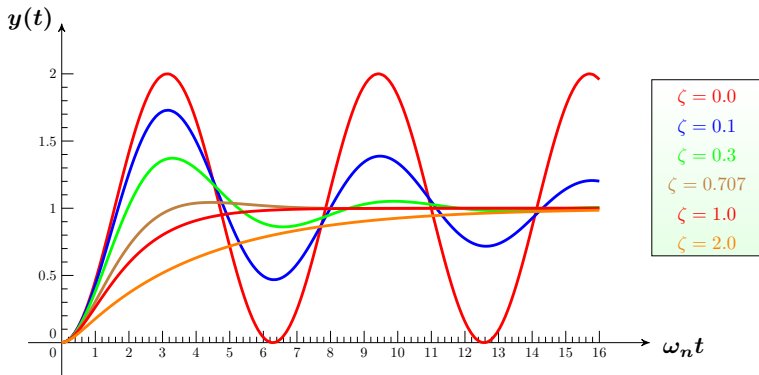
Ecuación generalizada



$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- ▶ $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- ▶ ζ coeficiente de amortiguamiento
- ▶ ω_n frecuencia natural no amortiguada
- ▶ En nuestro ejemplo:
 - ▶ $\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$
 - ▶ $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

Ecuación generalizada

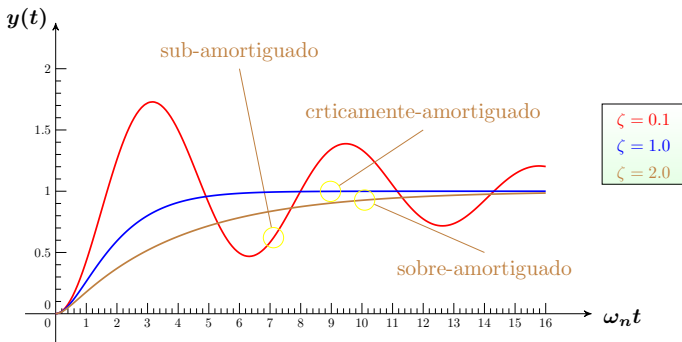


► $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$: frecuencia natural amortiguada

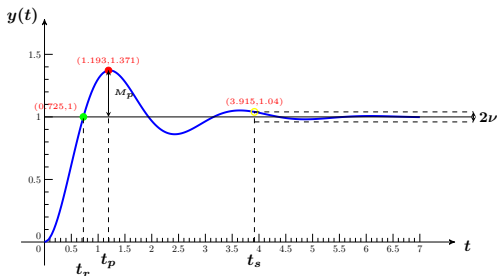
Ecuación generalizada



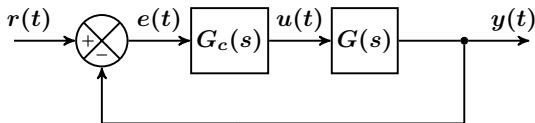
- ▶ Respuesta al escalón:
- ▶ Subamortiguado: $0 < \zeta < 1$
 - ▶ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$: frecuencia natural amortiguada
- ▶ Amortiguamiento crítico: $\zeta = 1$
- ▶ Sobre-amortiguado: $\zeta > 1$



-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo**
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones
-



- ▶ Tiempo de subida: $t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1}\left(-\frac{\omega_d}{\sigma}\right) = \frac{\pi - \varphi_0}{\omega_d}$
- ▶ Sobreelongación máxima: $M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$
- ▶ Tiempo de pico: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$
- ▶ Tiempo de establecimiento: $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ (2 %) o $\frac{3}{\zeta\omega_n}$ (5 %)



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

- ▶ Si $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ y $G_c(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$
- ▶ entonces $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)n(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)}$
- ▶ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$
- ▶ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$

- ▶ Para $R(s) = \frac{1}{s}$
- ▶ Si los polos en lazo cerrado son reales y distintos

$$Y(s) = \frac{a}{s} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}$$

- ▶ Para $R(s) = \frac{1}{s}$
- ▶ Si los polos en lazo cerrado son reales y distintos

$$Y(s) = \frac{a}{s} - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}$$

- ▶ Si los polos en lazo cerrado son reales y/o pares complejos conjugados

$$Y(s) = \frac{a}{s} - \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} - \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2}$$

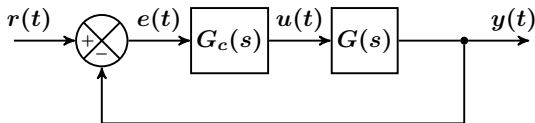
- ▶ donde $(q + 2r = n)$

► Entonces

$$y(t) = a - \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} - \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta^2} t - \\ - \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta^2} t, \text{ para } t \geq 0$$

-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo**
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones
-

Error en régimen permanente



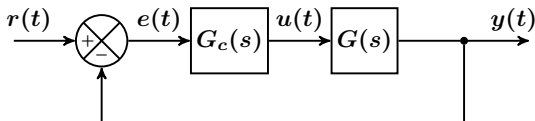
- Definimos el tipo del sistema en lazo abierto ($G_c(s)G(s)$) como el número de polos en el origen
- Error en régimen permanente e_{ss}
 - $$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

	e_{ss} $r(t) = 1$	e_{ss} $r(t) = t$	e_{ss} $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Tipo 0	cte	∞	∞
Tipo 1	0	cte	∞
Tipo 2	0	0	cte

-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo**
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones

-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo**
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones
-

- ▶ Las características de la **respuesta transitoria** dependen de la **localización** de los **polos en lazo cerrado**
- ▶ La **localización** de los **polos en lazo cerrado** depende de la **ganancia de lazo**
- ▶ Los **polos en lazo cerrado** son las **raíces de la ecuación característica**. Esto puede ser muy **laborioso**
- ▶ El **lugar de raíces** es un método **sencillo** para encontrar las raíces de la ecuación característica.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

► Ecuación característica

► $1 + G_c(s)G(s) = 0$

► $G_c(s)G(s) = -1$

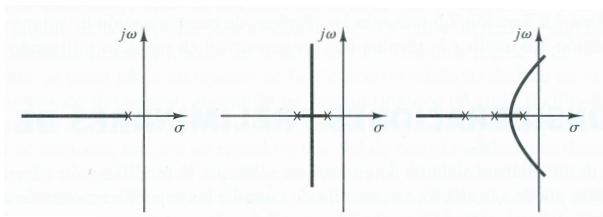
► Condición de magnitud

► $|G_c(s)G(s)| = 1$

► Condición de ángulo

► $\angle G_c(s)G(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) ; (k = 0, 1, 2, \dots)$

- Lugar de raíces de **un vistazo**:
 - Los valores de s que hacen que la función de transferencia sea igual a -1 satisfacen la ecuación característica del sistema
 - Se representan los valores en el **plano complejo s**
 - Se representan los **polos en lazo cerrado** cuando la **ganancia** varía de 0 a ∞
 - Se muestra como cada **polo y/o cero en lazo abierto contribuye** las posiciones de los **polos en lazo cerrado**



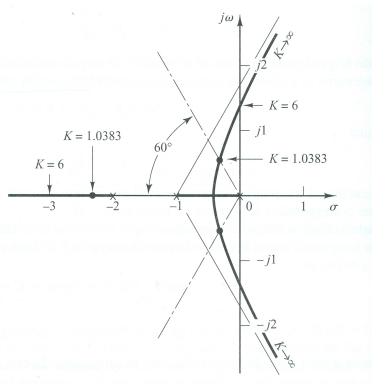
-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo**
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones
-

►
$$G(s)G_c(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Ejemplos

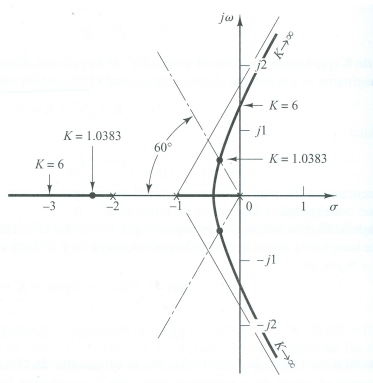


► $G(s)G_c(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$



► $G(s)G_c(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

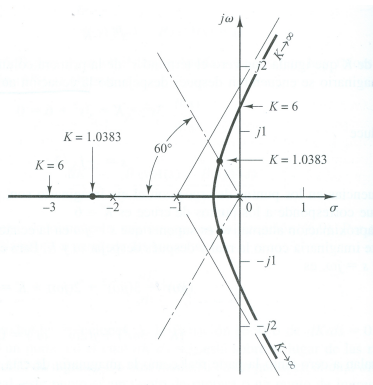
► $G(s)G_c(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3}$



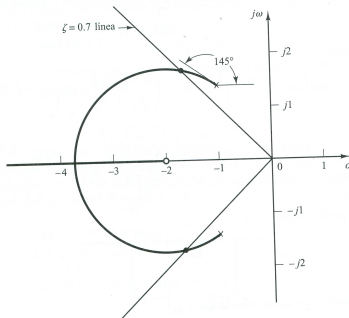
Ejemplos



► $G(s)G_c(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$



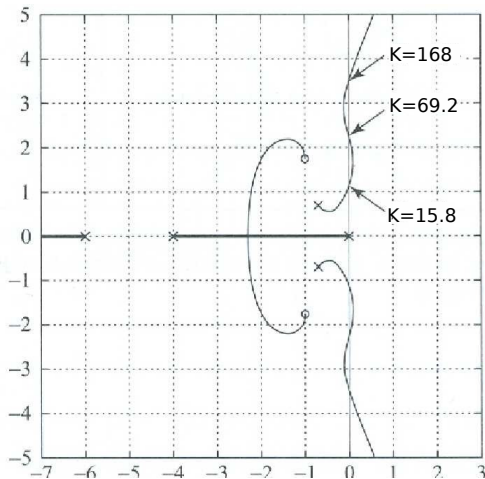
► $G(s)G_c(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3}$



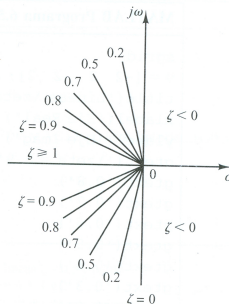
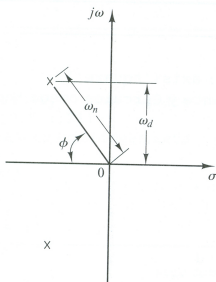
Ejemplos



►
$$G(s)G_c(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 4)}{s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)}$$



-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo**
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones

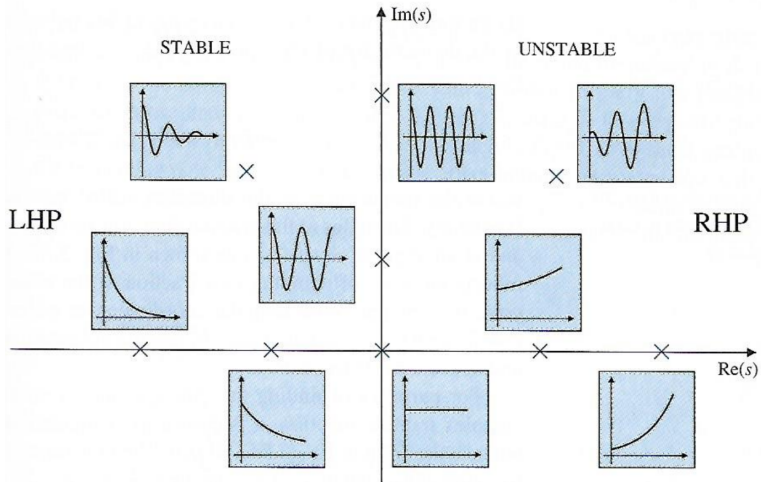


- ▶ Las líneas con ζ constante son radiales pasando por el origen.
- ▶ ζ determina la localización angular de los polos en lazo cerrado
- ▶ ω_n determina la distancia del polo al origen

-
- 1 Estabilidad
Tabla Routh
Ejemplos
 - 2 Análisis en el Dominio del Tiempo
Sistemas de primer orden
Sistemas de segundo orden
Régimen transitorio
Régimen permanente
 - 3 Análisis en el Dominio Complejo
Lugar de Raíces
Ejemplos
Parámetros característicos
 - 4 Conclusiones**
-

- ▶ Los polos en lazo cerrado con efectos dominantes se llaman **polos dominantes en lazo cerrado**
- ▶ Si **algún polo** se encuentra en el **semiplano derecho del plano s** , el sistema es **inestable**
- ▶ Si **todos los polos** se encuentran en el **semiplano izquierdo del plano s** , el sistema es **estable**
- ▶ La **estabilidad** es una **propiedad del sistema**, no depende de la entrada
- ▶ Si los **polos dominantes** complejos conjugados se encuentran **cerca del eje $j\omega$** , tendremos **oscilaciones** abundantes y una **respuesta lenta**

Conclusiones



GRACIAS!!