

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN**



**GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS Y
SERVICIOS DE TELECOMUNICACIÓN**

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**MODELADO Y CONTROL DE UN PÉNDULO
INVERTIDO ROTACIONAL**

VICENTE BARTUAL FERRÁN

2019

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN**



**GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS Y
SERVICIOS DE TELECOMUNICACIÓN**

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**MODELADO Y CONTROL DE UN PÉNDULO
INVERTIDO ROTACIONAL**

VICENTE BARTUAL FERRÁN

Tutor:

ÁLVARO GUTIÉRREZ MARTÍN

2019

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se ha diseñado e implementado un controlador para un péndulo invertido rotacional, con la idea de que pueda ser utilizado con fines educativos. Los objetivos principales han sido levantar el péndulo hasta la posición invertida y mantenerlo en esa posición invertida.

En la primera parte del trabajo se ha modelado el sistema físico, que está compuesto por el motor y el péndulo. Para el motor se han usado técnicas experimentales, basadas en su respuesta a diferentes entradas. El modelo matemático del péndulo se ha obtenido analíticamente mediante el método de Euler-Lagrange, y posteriormente se ha linealizado en torno al punto de equilibrio.

A partir de este modelo, se han diseñado los controladores. Para mantener el péndulo en equilibrio en la posición invertida, se han desarrollado dos alternativas. La primera basada en dos controladores Proporcional-Derivativo y la segunda en la realimentación del estado mediante un regulador lineal-cuadrático. Para levantar el péndulo desde la posición de equilibrio hacia abajo hasta la posición invertida se ha utilizado un controlador no lineal basado en energía, denominado Swing-Up. Estos tres controladores han sido simulados mediante la herramienta Simulink, en la que se ha podido observar el funcionamiento y las características de cada uno.

Estos diseños se han implementado en un sistema real compuesto por un microcontrolador y una etapa de potencia controlando el péndulo. Finalmente, se han expuesto los resultados obtenidos, comparándolos con los resultados teóricos.

Palabras clave: Péndulo invertido rotacional, controlador PD, controlador LQR, controlador basado en energía, método de Euler-Lagrange.

Abstract

This Thesis designs and implements a controller for a rotational inverted pendulum, with the idea that it can be used for educational purposes. The main objectives have been to lift the pendulum up to the inverted position and to keep it in that inverted position.

In the first part of this Thesis, the physical system, which is composed of the motor and the pendulum, has been modeled. Experimental techniques have been used for the DC motor, based on its response to different input signals. The mathematical model of the pendulum has been obtained analytically using the Euler-Lagrange method, and subsequently it has been linearized around the equilibrium point.

The controllers have been designed based on this model. To keep the pendulum in balance in the inverted position, two alternatives have been developed. The first is composed of two Proportional-Derivative controllers and the second is based on a linear-quadratic regulator state-feedback controller. To lift the pendulum from the downward stable position to the inverted position, a non-linear energy-based controller has been used. These three controllers have been simulated with Simulink to test the behaviour and characteristics of each one.

These designs have been implemented in a real system composed of a microcontroller and a power stage controlling the pendulum. Finally, the obtained results have been exposed, comparing them with the theoretical results.

Keywords: rotational inverted pendulum, PD controller, LQR controller, energy-based controller, Euler-Lagrange method.

Agradecimientos

Me gustaría dedicar unas líneas para agradecer a las personas que me han ayudado a completar este Trabajo de Fin de Grado. Especialmente a mi tutor Álvaro Gutierrez por la ayuda recibida, y a todos los miembros de Robolabo.

También quería agradecerse a mi familia por su apoyo durante estos últimos meses del Grado.

Índice general

Resumen	v
Abstract	vii
Agradecimientos	ix
Índice	xi
Lista de figuras	xiii
Lista de tablas	xv
Acrónimos	xvii
1. Introducción	1
1.1. Péndulo de Furuta	1
1.2. Motivación y objetivos	2
1.3. Organización del documento	2
2. Modelado	5
2.1. Modelado del motor DC	5
2.1.1. Momento del motor	8
2.2. Modelado del péndulo	10
2.2.1. Linealización de las ecuaciones	15
2.2.2. Espacio de estados	16
3. Diseño	19
3.1. Diseño del controlador PD	20
3.1.1. Simulación del controlador PD	22

3.2. Diseño del controlador LQR	24
3.2.1. Simulación del controlador LQR	26
3.3. Diseño del Swing-Up por energía	27
3.3.1. Simulación del Swing-Up	28
4. Implementación y resultados	31
4.1. Sistema completo	31
4.1.1. Péndulo	31
4.1.2. Microcontrolador Nucleo STM32 L476RG	32
4.1.3. Etapa de potencia X-Núcleo IHM04A1	32
4.2. Implementación	33
4.2.1. Lectura del encoder y del potenciómetro	34
4.3. Resultados	36
4.3.1. Controlador PD	36
4.3.2. Controlador LQR	38
4.3.3. Controlador del Swing-Up	39
5. Conclusiones y líneas futuras	41
5.1. Conclusiones	41
5.2. Líneas futuras	41
Bibliografía	44
A. Presupuesto económico	47
B. Impacto social, económico y medioambiental	49
C. Desarrollo del modelo del péndulo en Simulink	51
D. Obtención del periodo de diferenciación ideal	55

Índice de figuras

1.1. Péndulo invertido rotacional de RoboLabo.	1
2.1. Pulsos en función del tiempo para cada voltaje.	6
2.2. Velocidad angular para cada voltaje.	7
2.3. Experimento para calcular R_m	9
2.4. Esquema del péndulo.	10
2.5. Ángulo θ_1 del péndulo.	11
2.6. Ángulo θ_2 del péndulo.	11
3.1. Zonas de trabajo del péndulo atendiendo a θ_2	19
3.2. Esquema de un controlador PD.	20
3.3. Controlador PD implementado en Simulink.	23
3.4. Salida simulada del controlador PD.	23
3.5. Señal de control u simulada del controlador PD.	24
3.6. Esquema de un controlador LQR.	24
3.7. Controlador LQR implementado en Simulink.	26
3.8. Señal de control u simulada del controlador LQR.	26
3.9. Salida simulada del controlador LQR.	27
3.10. Controlador del Swing-Up implementado en Simulink.	29
3.11. Respuesta del Swing-Up.	29
3.12. Evolución de la energía del Swing-Up.	30
4.1. Conexiones de la etapa de potencia X-Núcleo IHM04A1.	32
4.2. Conexiones del microcontrolador STM32 L476RG.	33
4.3. Valor medio de una señal PWM en función de su ciclo de trabajo.	35
4.4. θ_1 del controlador PD teórico.	37

4.5. θ_2 del controlador PD teórico.	37
4.6. θ_1 del controlador PD ajustado manualmente.	37
4.7. θ_2 del controlador PD ajustado manualmente.	37
4.8. θ_1 del controlador LQR teórico.	38
4.9. θ_2 del controlador LQR teórico.	38
4.10. θ_1 del controlador LQR ajustado manualmente.	38
4.11. θ_2 del controlador LQR ajustado manualmente.	38
4.12. θ_1 durante el Swing-Up (PD).	39
4.13. θ_2 durante el Swing-Up (PD).	39
4.14. θ_1 durante el Swing-Up (LQR).	40
4.15. θ_2 durante el Swing-Up (LQR).	40
C.1. Esquema de la implementación del péndulo en Simulink.	53
D.1. Velocidad angular para $T_d = 10 \text{ ms}$	57
D.2. Velocidad angular para $T_d = 12 \text{ ms}$	57
D.3. Velocidad angular para $T_d = 14 \text{ ms}$	57
D.4. Velocidad angular para $T_d = 16 \text{ ms}$	57
D.5. Velocidad angular para $T_d = 18 \text{ ms}$	57
D.6. Velocidad angular para $T_d = 20 \text{ ms}$	57

Lista de tablas

2.1. Velocidad angular en régimen permanente.	7
2.2. Polo calculado para cada voltaje.	8
2.3. Valores medidos.	11
4.1. Periféricos del STM32 L476RG utilizados.	32
4.2. Parámetros teóricos y ajustados del controlador PD.	37
A.1. Costes de recursos humanos.	47
A.2. Costes de equipo técnico y software del laboratorio.	47
A.3. Costes de los componentes.	48
D.1. Media y error cuadrático para los diferentes T_d	56

Acrónimos

PD: Proporcional-Derivativo

LQR: Linear-Quadratic Regulator

ADC: Analog-to-Digital Converter

PWM: Pulse-Width Modulation

Capítulo 1

Introducción

1.1. Péndulo de Furuta

El péndulo invertido rotacional o péndulo de Furuta es un sistema dinámico formado por un brazo que puede rotar en el plano horizontal, al final del cual se coloca un péndulo. Fue inventado por Katsuhisa Furuta en 1992 y se ha convertido en un ejemplo clásico sobre el que desarrollar teorías de control. A diferencia del péndulo invertido lineal, este no tiene limitaciones en cuanto a su movimiento en una misma dirección.

Es un sistema altamente no lineal. Dispone de un solo actuador, un motor que controla la rotación de la barra horizontal. Sin embargo, tiene dos grados de libertad, por lo que se trata de un sistema subactuado. Estas dos razones son las que hacen a este péndulo tan complejo e interesante desde el punto de vista del control, por lo que se ha usado enormemente tanto en la enseñanza como para probar nuevos métodos avanzados de control.

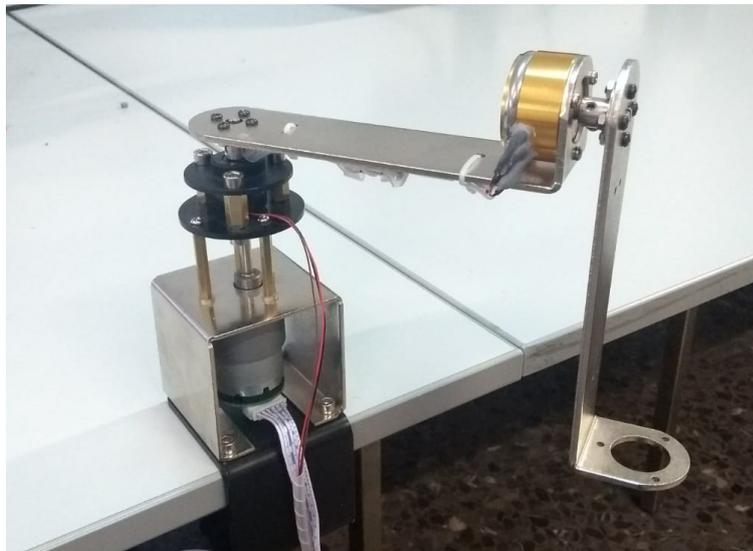


Figura 1.1: Péndulo invertido rotacional de RoboLabo.

En este Trabajo de Fin de Grado se va a usar el péndulo rotacional que se puede ver en la Figura 1.1.

1.2. Motivación y objetivos

Debido a lo completo del péndulo desde un punto de vista pedagógico, sería interesante implantar este sistema en el laboratorio de cualquier asignatura relacionada con el control. Un requisito indispensable para ello es que sea asequible, pues deberá adquirirse una cantidad notable de ellos.

El péndulo que se encuentra en el laboratorio de RoboLabo, presentado en la sección anterior, cumple con este requisito. Sin embargo, no se dispone de ningún tipo de documentación sobre sus piezas o su motor, por lo que es necesario definir su comportamiento y valorar el funcionamiento del sistema antes de poder ser utilizado como herramienta de aprendizaje.

Por tanto, los objetivos de este Trabajo de Fin de Grado son:

- Modelar dinámicamente el péndulo y el motor DC.
- Diseñar un controlador lineal que mantenga el péndulo en equilibrio en su posición invertida.
- Diseñar un controlador que levante el péndulo hasta la posición invertida.
- Implementar el controlador en un microcontrolador y valorar el comportamiento del sistema real.

1.3. Organización del documento

Este documento está dividido en cinco capítulos.

El primero de ellos, el Capítulo 1, es la introducción, en la que se especifican la motivación y los objetivos del presente Trabajo de Fin de Grado, así como la organización de este documento.

En el Capítulo 2 se obtendrá un modelo matemático del péndulo y del motor. Para el péndulo, se hará un desarrollo analítico de su comportamiento mediante el método de Euler-Lagrange, obteniendo sus ecuaciones dinámicas. El modelado del motor DC se hará experimentalmente, y permitirá obtener su función de transferencia.

En el Capítulo 3 se van a diseñar controladores que permitan mantener el péndulo en posición invertida. Se van a estudiar dos opciones de controladores lineales (PD y LQR). Posteriormente, se abordará el problema de levantar el péndulo, para lo que se usará un controlador no lineal basado en energía. Por último, se comprobará el comportamiento de los controladores mediante simulaciones en Simulink.

En el Capítulo 4 se van a implementar los controladores en el sistema real. Para ello, se va a usar un microcontrolador STM32 Nucleo-L476RG, que mediante

una etapa de potencia manejará el motor del péndulo. Se deberá configurar el microcontrolador para la tarea e implementar el software de los controladores. Este capítulo concluye con una comparación entre los resultados obtenidos en las simulaciones y en el sistema real.

Por último, en el Capítulo 5 se presentarán las conclusiones de este Trabajo de Fin de Grado, así como posibles líneas futuras de desarrollo de este proyecto.

Capítulo 2

Modelado

2.1. Modelado del motor DC

Para modelar el motor se ha usado como guía el documento [1]. A grandes rasgos, consiste en hacer una serie de experimentos, medir los resultados y a partir de ellos extraer la función de transferencia simplificada del motor, que tiene la siguiente forma

$$G_m(s) = \frac{K}{s + p} \quad (2.1)$$

Finalmente, a partir de esta expresión, se calcularán las constantes necesarias para obtener la expresión del par producido por el motor en función del voltaje de entrada.

Cada experimento ha consistido en introducir un escalón de diferente voltaje al motor durante un tiempo de 0.6 s , tras el cual se ha eliminado la entrada durante otros 0.6 s . Los valores de voltaje utilizados han sido $V_Q = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} V$. No se ha incluido el valor $1 V$ porque no producía movimiento del motor. Esto se debe a que dicho voltaje no consigue romper el par de fricción. Se ha realizado un total de $P = 10$ repeticiones por experimento, y se ha utilizado un periodo de muestreo $T_m = 1\text{ ms}$.

Para realizar estos experimentos se ha desacoplado el péndulo, quedando libre el motor. Para el control y obtención de datos del motor se ha utilizado el microcontrolador, que tras cada experimento ha enviado los datos por el puerto serie al ordenador. Estos datos han sido recibidos por un programa, encargado de realizar los diferentes cálculos necesarios para obtener la respuesta del motor. A continuación se detalla el proceso.

En primer lugar, se obtiene la posición en función del tiempo para cada voltaje. Mediante el encoder del motor se va a obtener la posición angular. Este encoder dispone de dos canales (A y B) desfasados 90 grados, cada uno de ellos con una resolución de 260 pulsos por vuelta. Para conseguir la máxima precisión, se han usado los flancos de subida y bajada de ambos canales a la vez, lo que se traduce en una resolución de $q = 1040$ pulsos por vuelta. Se han realizado los 10 experimentos para cada voltaje, tras lo cual se ha calculado la media. La Figura 2.1 representa los pulsos en función del tiempo para cada voltaje.

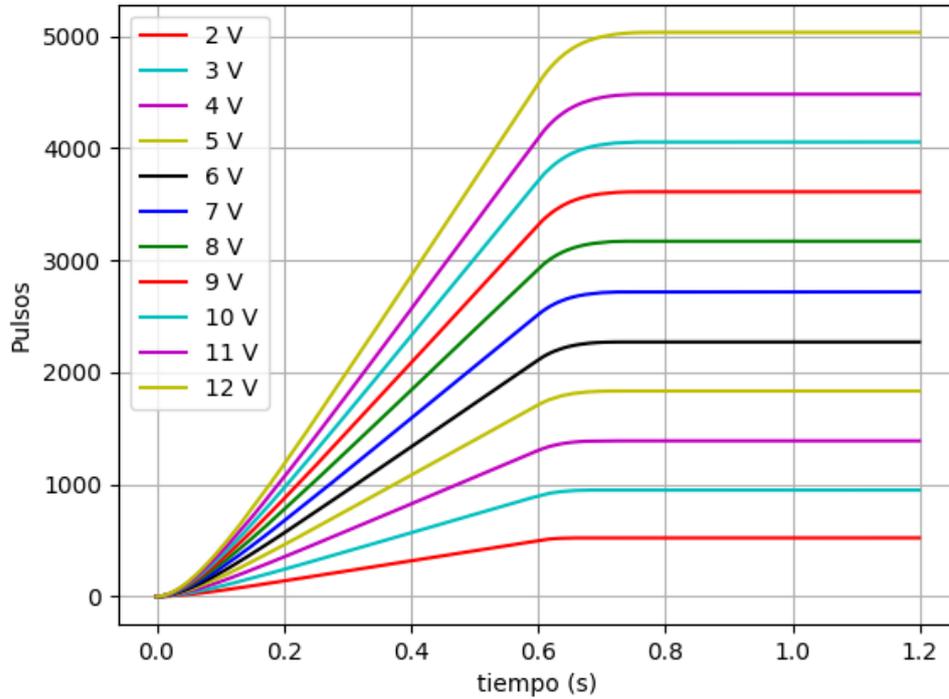


Figura 2.1: Pulsos en función del tiempo para cada voltaje.

A continuación se calcula la velocidad angular para cada voltaje (derivando la posición). En primer lugar, se cambia la unidad angular de pulsos a radianes. Para ello, se usa la relación

$$\theta_{rads}(k) = \frac{2\pi}{q}N(k) \quad (2.2)$$

donde $\theta_{rad}(k)$ y $N(k)$ representan el ángulo descrito por el motor en función del tiempo en *rad* y en *pulsos* respectivamente, para el periodo de muestreo T_m . $q = 1040$ es el número de pulsos por vuelta del encoder en cuadratura. La posición angular muestreada por el microcontrolador está en valores discretos, por lo que la derivación es en realidad una diferenciación. Para evitar errores numéricos y obtener unos resultados más suaves, la diferenciación se ha hecho de orden 5 (esto es, la diferencia con la muestra 5 posiciones anterior). Teniendo estas dos cosas en cuenta, la expresión de la velocidad en cada instante es:

$$w(k) = \frac{2\pi(N(k) - N(k - 5))}{5T_m q}, \quad (2.3)$$

El resultado se puede ver en la Figura 2.2.

La velocidad en régimen permanente se ha calculado como la media de la velocidad cuando la señal ya ha acabado el régimen transitorio, que en este caso es desde 0.4 s a 0.6 s (muestras desde la 401 a la 600). Los resultados se muestran en la Tabla 2.1.

El siguiente paso es calcular el polo de varianza mínima para cada experimento. Para ello se calculará el polo de subida y el polo de bajada, y se hará la media entre

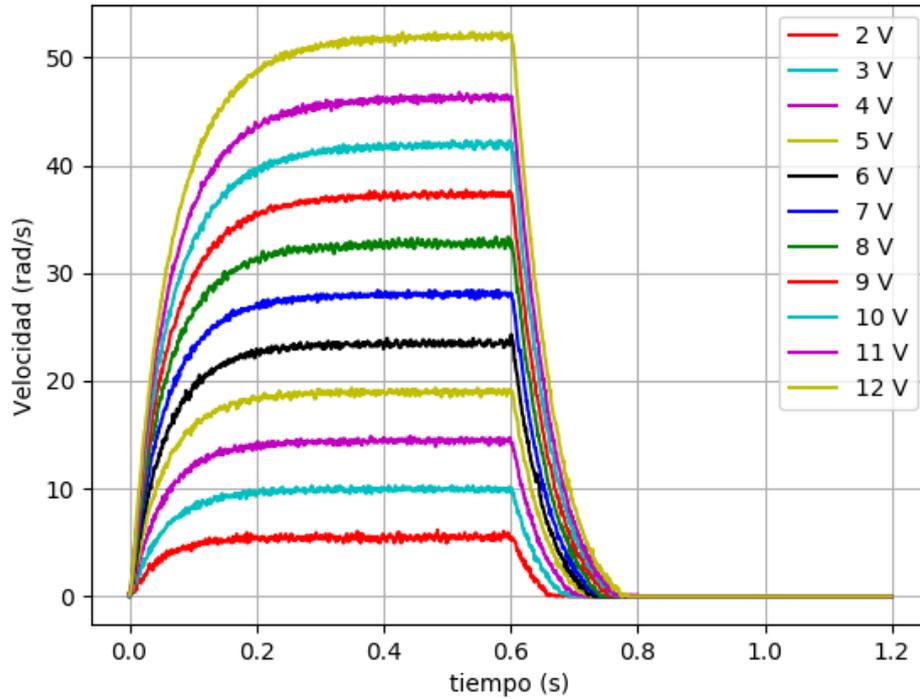


Figura 2.2: Velocidad angular para cada voltaje.

Voltaje (V)	Velocidad (rad/s)
2	5.485
3	9.945
4	14.452
5	18.970
6	23.458
7	28.016
8	32.732
9	37.255
10	41.848
11	46.217
12	51.901

Tabla 2.1: Velocidad angular en régimen permanente.

ellos. Para el polo de subida se ha utilizado nuevamente el método expuesto en el documento [1], utilizando intervalos de anchura variable entre 60 y 120 muestras, desde la muestra inicial hasta el final del régimen transitorio (muestra número 400). En cada intervalo, se halla el polo mediante la Ecuación 2.4,

$$p_{subida} = \frac{N(k) - N(k-1)}{T_m \left(\frac{qwT_m}{2\pi} k - N(k) \right)} \quad (2.4)$$

en la que $N(k)$ son los pulsos en función del tiempo, T_m es el periodo de muestreo, q es

el número de pulsos por vuelta del encoder y w es la velocidad en régimen permanente. Se hace la media de todos ellos, y se elegirá aquel que tenga la menor varianza.

Para el cálculo del polo de bajada, se ha utilizado la expresión:

$$p_{bajada} = \frac{qw}{2\pi(N(k_f) - N(k_0))} \quad (2.5)$$

donde k_f corresponde a cualquier índice en el cual el motor ya no se mueve y k_0 es el índice de la muestra en la que comienza la bajada (muestra 601). Los resultados están en la la Tabla 2.2.

Voltaje (V)	Polo de subida	Polo de bajada	Polo medio
2	20.739973	40.710278	30.725125
3	18.190017	32.856899	25.523458
4	18.494342	28.959568	23.726955
5	18.057267	26.122292	22.089779
6	17.734714	24.857965	21.296339
7	17.427896	23.491317	20.459606
8	16.705245	22.378310	19.541777
9	16.106391	21.285926	18.696158
10	15.511466	20.426817	17.969141
11	15.490595	20.025783	17.758189
12	14.983542	19.162957	17.073250

Tabla 2.2: Polo calculado para cada voltaje.

A continuación, se calcula el polo p y la constante K , mediante las expresiones

$$p = \frac{\sum w_j V_j}{\sum \frac{w_j V_j}{p_j}} = 18,5681 \quad (2.6)$$

$$K = \frac{\sum w_j^2}{\sum w_j V_j} = 76,8009 \quad (2.7)$$

siendo w_j la velocidad en régimen permanente para cada voltaje, p_j el polo para cada voltaje y V_j dicho voltaje.

Por tanto, la función de transferencia del motor queda

$$G_m(s) = \frac{76.8009}{s + 18.5681} \quad (2.8)$$

2.1.1. Momento del motor

En las ecuaciones de movimiento del péndulo aparece la acción del motor como el momento que ejerce sobre el brazo horizontal. Por lo tanto, conviene conocer cómo es la expresión del par o momento del motor. El momento de un motor DC general [2] viene definido como

$$\tau_m = k_m \frac{V - k_m \dot{\theta}}{R_m} \quad (2.9)$$

donde k_m es la constante de par, V es el voltaje aplicado al motor, $\dot{\theta}$ es la velocidad angular del motor y R_m es la resistencia interna del motor. El problema se reduce a calcular k_m y R_m .

En el documento [1] se llega a la siguiente ecuación:

$$G_m(0) = \frac{k_m}{B_m R_m + k_b k_m} \quad (2.10)$$

En ella, B_m es la fricción del motor, que suele ser muy baja, y se puede considerar despreciable. k_b es la constante eléctrica, y su valor es prácticamente igual al de k_m . Por lo tanto, queda la igualdad

$$G_m(0) = \frac{1}{k_m} = \frac{K}{p} \quad (2.11)$$

Despejando k_m , se obtiene:

$$k_m = \frac{p}{K} = 0.24177 \text{ Nm/A} \quad (2.12)$$

Para calcular el valor R_m se ha realizado el siguiente experimento. Con el motor en posición horizontal, se ha colocado una barra de masa $m = 152 \text{ g}$ y distancia a su centro $l = 6.75 \text{ cm}$ y se ha ido subiendo el voltaje hasta que el motor era capaz de mantener la barra horizontalmente sin producir movimiento ($\dot{\theta}_1 = 0$), como se puede ver en la Figura 2.3. Esto se consigue para un voltaje $V_{in} = 2.1 \text{ V}$, con el que el par motor es

$$\tau_m = gml = 0.10062 \text{ Nm}, \quad (2.13)$$

siendo g la aceleración de la gravedad. En consecuencia, valor de la resistencia queda

$$R_m = \frac{k_m V_{in}}{\tau_m} = 5.046 \Omega$$

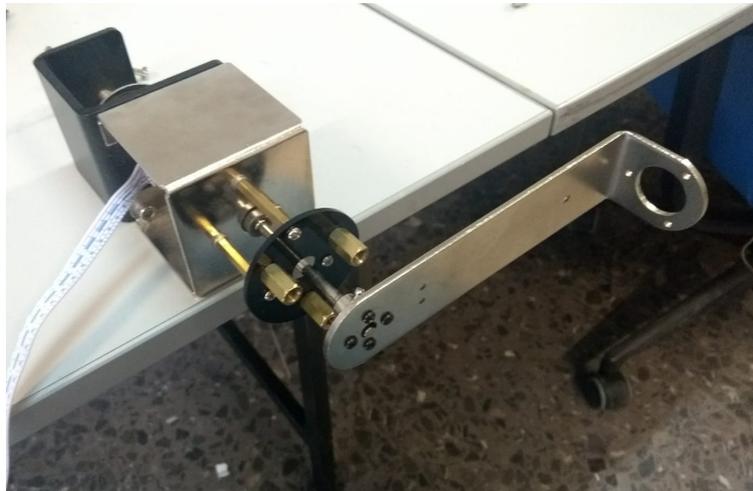


Figura 2.3: Experimento para calcular R_m .

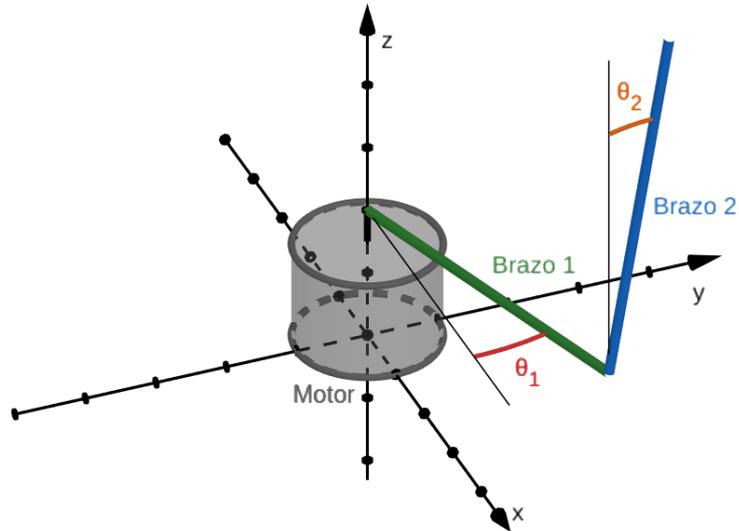


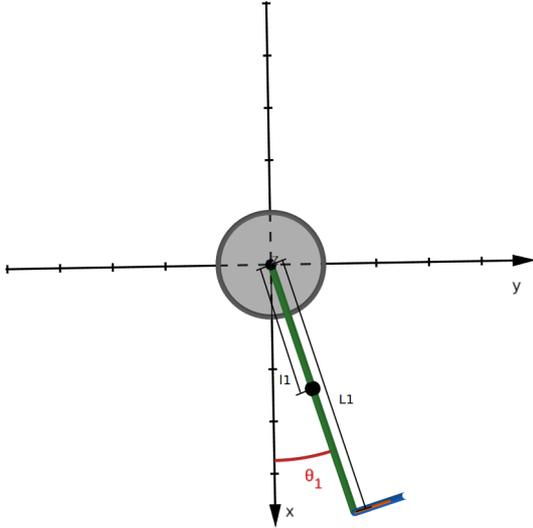
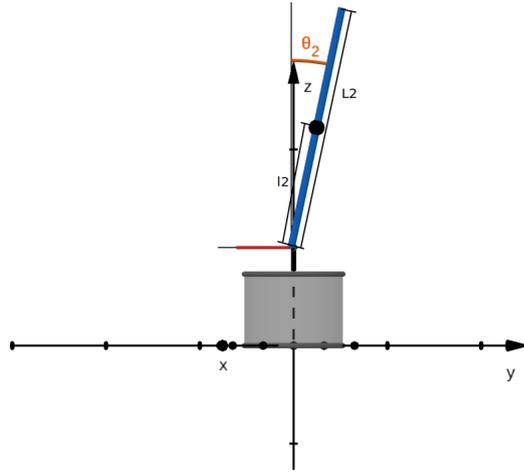
Figura 2.4: Esquema del péndulo.

2.2. Modelado del péndulo

En esta sección se van a obtener de las ecuaciones de movimiento del péndulo. Como se puede ver en la Figura 2.4, el péndulo tiene dos brazos. Se va a llamar brazo 1 al brazo horizontal, que está conectado al motor, y brazo 2 al péndulo propiamente dicho, que puede girar libremente al final del brazo 1. Los parámetros utilizados para el desarrollo de estas ecuaciones son:

- m_1 : Masa del brazo 1.
- m_2 : Masa del brazo 2.
- L_1 : Longitud del brazo 1.
- l_1 : Distancia del eje de giro al centro de masas del brazo 1.
- L_2 : Longitud del brazo 2.
- l_2 : Distancia del eje de giro al centro de masas del brazo 2.

Sus valores medidos están recogidos en la Tabla 2.3. Para ambos brazos se ha considerado que el centro de masas se encontrará en la mitad de la barra, por lo que $L_i = 2l_i$.

Figura 2.5: Ángulo θ_1 del péndulo.Figura 2.6: Ángulo θ_2 del péndulo.

Parámetro	Valor
m_1	0.215 Kg
m_2	0.152 Kg
L_1	0.148 m
l_1	0.074 m
L_2	0.135 m
l_2	0.0675 m

Tabla 2.3: Valores medidos.

Además, se usarán también sus momentos de inercia, que se pueden calcular a partir de estos valores. Los brazos son placas rectangulares, pero se pueden aproximar a varillas cilíndricas sin que esto suponga una gran discrepancia, lo que va a simplificar en gran medida el desarrollo. Por lo tanto su momento de inercia cuando giran alrededor de su centro de masas es

$$I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2 \quad (2.14)$$

Ambos brazos giran alrededor de sus extremos, por lo que según el Teorema de Steiner [3],

$$I = I_{cm} + m d_{eje}^2 \quad (2.15)$$

donde d_{eje} es la distancia del eje de giro al centro de masas. Para ambas barras, $d_{eje} = l_i = 0.5L_i$, por lo que queda:

$$I_1 = \frac{1}{12}m_1L_1^2 + \left(\frac{1}{2}L_1\right)^2 = \frac{1}{3}m_1L_1^2 = 1.5698 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2 \quad (2.16)$$

$$I_2 = \frac{1}{12}m_2L_2^2 + \left(\frac{1}{2}L_2\right)^2 = \frac{1}{3}m_2L_2^2 = 9.2340 \cdot 10^{-4} \text{ Kg m}^2 \quad (2.17)$$

La posición de cada uno de los brazos, y por tanto de todo el sistema, queda determinada por sus ángulos θ_1 y θ_2 , por lo que finalmente se obtendrán dos ecuaciones. Se va a utilizar el método de Euler-Lagrange [4], con el que se pueden obtener estas ecuaciones a partir de la energía cinética y potencial del sistema. En primer lugar, se calcula la energía cinética de cada brazo, en función de θ_1 y θ_2 , como se explica a continuación.

La velocidad lineal y velocidad angular del centro de masas del brazo 1 son

$$v_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \quad (2.18)$$

$$w_1 = \dot{\theta}_1 \quad (2.19)$$

A partir de las Figuras 2.5 y 2.6, se observa que las coordenadas del centro de masas del brazo 2 son

$$x_2 = L_1 \cos(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad (2.20)$$

$$y_2 = L_1 \sin(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad (2.21)$$

$$z_2 = l_2 \cos(\theta_2) \quad (2.22)$$

La velocidad se puede obtener derivando.

$$\dot{x}_2 = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \quad (2.23)$$

$$\dot{y}_2 = L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) - l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \quad (2.24)$$

$$\dot{z}_2 = -l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \quad (2.25)$$

por lo que la velocidad lineal del centro de masas del brazo 2 es:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = (L_1^2 + l_2^2 \sin^2(\theta_2)) \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \quad (2.26)$$

La velocidad angular del brazo 2 depende tanto de $\dot{\theta}_1$ como de $\dot{\theta}_2$. El eje de θ_1 produce una velocidad angular del centro de masas del brazo 2:

$$w_{2,1} = \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \quad (2.27)$$

El eje de θ_2 aporta la componente angular:

$$w_{2,2} = \dot{\theta}_2 \quad (2.28)$$

Por lo tanto, la velocidad angular del centro de masas del brazo 2 es:

$$w_2^2 = w_{2,1}^2 + w_{2,2}^2 = \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \quad (2.29)$$

La energía cinética para cada barra se calcula como la suma de la energía cinética de traslación más la energía cinética de rotación, según la Ecuación 2.30:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad (2.30)$$

donde m es la masa de la barra y v_{cm} , w_{cm} y I_{cm} son la velocidad lineal, velocidad angular y momento de inercia, respectivamente, del centro de masas de la barra.

Por tanto, la energía cinética del centro de masas del brazo 1 es:

$$E_{c1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}I_{cm1}\omega_1^2 = \frac{1}{2}(I_{cm1} + m_1l_1^2) \quad (2.31)$$

y la del centro de masas del brazo 2:

$$E_{c2} = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm2}\omega_2^2 = \frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(I_{cm2} + m_2l_2^2)\text{sen}^2(\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + m_2L_1l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}(I_{cm2} + m_2l_2^2)\dot{\theta}_2^2 \quad (2.32)$$

Haciendo la simplificación

$$I_{cm} + ml^2 = I \quad (2.33)$$

en las Ecuaciones 2.31 y 2.32, la energía cinética de cada uno de los brazos queda:

$$E_{c1} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 \quad (2.34)$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2}(m_2L_1^2 + I_2\text{sen}^2(\theta_2))\dot{\theta}_1^2 + m_2L_1l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 \quad (2.35)$$

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} \quad (2.36)$$

En este sistema, la energía potencial solo puede deberse a la gravedad. Para el brazo 1, que siempre está a la misma altura, es constante. Para el brazo 2, depende de la altura de su centro de masas, siendo esta energía máxima cuando se encuentra en su punto más alto y nula cuando está en el punto más bajo. Las expresiones de ambas son las siguientes:

$$E_{p1} = gm_2l_2 = 0.1006 J \quad (2.37)$$

$$E_{p2} = gm_2l_2(\cos(\theta_2) + 1) \quad (2.38)$$

Las ecuaciones del movimiento, siguiendo el método de Euler-Lagrange, se calculan mediante la Ecuación 2.39:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad (2.39)$$

Para el caso del péndulo rotacional, $x_i = \{\theta_1, \theta_2\}$. Por lo tanto, Q_1 es el par producido en el eje de θ_1 , que es igual al par producido por el motor (τ_m), y Q_2 es el par producido en el eje de θ_2 , que es nulo. L , llamado langrangiano, se calcula como

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}(I_1 + m_2L_1^2 + I_2\text{sen}^2(\theta_2))\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + m_2L_1l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - gm_2l_2(\cos(\theta_2) + 2) \quad (2.40)$$

A partir de la Ecuación 2.39, operando cuando $x_i = \theta_1$, se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = (I_1 + m_2L_1^2 + I_2\text{sen}^2(\theta_2))\dot{\theta}_1 + m_2L_1l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2 \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (I_1 + m_2 L_1^2 + I_2 \text{sen}^2(\theta_2)) \ddot{\theta}_1 + I_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ &\quad + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 l_2 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.43)$$

Por lo tanto, la primera ecuación queda

$$\begin{aligned} (I_1 + m_2 L_1^2 + I_2 \text{sen}^2(\theta_2)) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 l_2 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ + I_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = Q_1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

De manera análoga, cuando $x_i = \theta_2$, se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2 \dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \quad (2.45)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = I_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 L_1 l_2 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} I_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 L_1 l_2 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \text{sen}(\theta_2) \quad (2.47)$$

Por lo tanto, la segunda ecuación queda

$$m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} I_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1^2 - g m_2 l_2 \text{sen}(\theta_2) = Q_2 \quad (2.48)$$

Sustituyendo Q_1 y Q_2 , se obtienen finalmente las ecuaciones dinámicas del péndulo:

$$\begin{aligned} (I_1 + m_2 L_1^2 + I_2 \text{sen}^2(\theta_2)) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 l_2 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ + I_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \tau_m \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} I_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1^2 - g m_2 l_2 \text{sen}(\theta_2) = 0 \quad (2.50)$$

Hasta ahora no se ha tenido en cuenta la fricción viscosa, que representa la fricción que se produce entre piezas en sistemas mecánicos con movimiento, haciendo que se disipe energía en forma de calor. Esta fricción es proporcional a la velocidad, y para incluirla habría que añadir los términos $b_1 \dot{\theta}_1$ a la Ecuación 2.49 y $b_2 \dot{\theta}_2$ a la Ecuación 2.50. Sin embargo, debido a su escaso efecto y a la dificultad de obtención de los parámetros b_1 y b_2 , la fricción viscosa se va a considerar nula.

Para simplificar la representación de las ecuaciones, se agrupan términos de la siguiente manera:

$$\alpha_1 = I_1 + m_2 L_1^2 = 4.8992 \cdot 10^{-3} \quad (2.51)$$

$$\alpha_2 = I_2 = 9,2340 \cdot 10^{-4} \quad (2.52)$$

$$\alpha_3 = m_2 L_1 l_2 = 1.5185 \cdot 10^{-3} \quad (2.53)$$

$$\alpha_4 = g m_2 l_2 = 0.1006 \quad (2.54)$$

con los que las Ecuaciones 2.49 y 2.50 quedan:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 \text{sen}^2(\theta_2))\ddot{\theta}_1 + \alpha_3 \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \alpha_3 \text{sen}(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \alpha_2 \text{sen}(2\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 = \tau_m \quad (2.55)$$

$$\alpha_3 \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + \alpha_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}\alpha_2 \text{sen}(2\theta_2)\dot{\theta}_1^2 - \alpha_4 \text{sen}(\theta_2) = 0 \quad (2.56)$$

Despejando los términos de mayor orden, se obtiene finalmente:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{\beta} \left[-\frac{1}{2}\alpha_2 \alpha_3 \text{sen}(2\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \alpha_2 \alpha_3 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 - \alpha_2^2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 \alpha_4 \text{sen}(2\theta_2) + \alpha_2 \tau_m \right] \quad (2.57)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2}\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2 \text{sen}^2(\theta_2)) \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \alpha_2 \alpha_3 \text{sen}(2\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 \text{sen}^2(\theta_2)) \alpha_4 \text{sen}(\theta_2) - \alpha_3 \cos(\theta_2) \tau_m \right] \quad (2.58)$$

donde $\beta = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 \text{sen}^2(\theta_2) - \alpha_3^2 \cos^2(\theta_2)$

2.2.1. Linealización de las ecuaciones

Se van a linealizar las ecuaciones en torno al punto de equilibrio donde se va a trabajar. Dicho punto de equilibrio se corresponde con la posición vertical hacia arriba del brazo 2 cuando ambos brazos no se mueven ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\dot{\theta}_1 = 0$ y $\dot{\theta}_2 = 0$). Para linealizar las funciones trigonométricas, se van a usar los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor, cuya fórmula general en torno a un punto x_0 es:

$$f_{lin}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.59)$$

De esta forma:

$$\cos(\theta_2) = 1; \cos^2(\theta_2) = 1 \quad (2.60)$$

$$\text{sen}(\theta_2) = \theta_2; \text{sen}(2\theta_2) = 2\theta_2; \text{sen}^2(\theta_2) = 0 \quad (2.61)$$

Aplicando estas condiciones a las ecuaciones 2.57 y 2.58, se obtiene:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left[-\alpha_3 \alpha_4 \theta_2 + \alpha_2 \tau_m \right] \quad (2.62)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left[\alpha_1 \alpha_4 \theta_2 - \alpha_3 \tau_m \right] \quad (2.63)$$

La Ecuación 2.9 del par motor obtenida anteriormente también depende de $\dot{\theta}_1$, por lo se pueden simplificar, quedando:

$$\tau_m = \frac{k_m}{R_m} V \quad (2.64)$$

Finalmente, las ecuaciones del movimiento en torno al punto de equilibrio son:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left[-\alpha_3\alpha_4\theta_2 + \frac{\alpha_2 k_m}{R_m} V \right] \quad (2.65)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} \left[\alpha_1\alpha_4\theta_2 - \frac{\alpha_3 k_m}{R_m} V \right] \quad (2.66)$$

2.2.2. Espacio de estados

La representación del sistema en espacio de estados será necesaria para el diseño del controlador LQR. Esta representación permite describir el comportamiento de un sistema en función de su estado actual y sus entradas. Se escribe como una ecuación matricial de primer orden del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (2.67)$$

\mathbf{x} es un vector que contiene las variables de estado, que son el conjunto mínimo de variables que describen el estado completo del sistema en cualquier momento. En nuestro caso las variables de estado son la posición y velocidad angular de cada brazo, por lo que queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

La matriz A, llamada matriz de estado, es una matriz 4x4 que establece la relación entre las variables de \mathbf{x} y $\dot{\mathbf{x}}$. El vector \mathbf{u} contiene las entradas al sistema, ponderadas por los valores de la matriz B. En este caso, como solo hay una entrada (el voltaje V), B tendrá un tamaño 4x1. Observando las ecuaciones linealizadas 2.65 y 2.66, se ven las relaciones existentes, que son de θ_2 y V tanto con $\ddot{\theta}_1$ como con $\ddot{\theta}_2$. Además, $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ aparecen en los dos vectores, por lo que habrá una relación entre ellas. De esta forma, la representación en el espacio de estados queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} V \quad (2.69)$$

donde el valor de A_{32} , A_{42} , B_3 y B_4 se puede obtener directamente observando las ecuaciones 2.65 y 2.66:

$$A_{32} = \frac{-\alpha_3\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} = -68.8794 \quad (2.70)$$

$$A_{42} = \frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2} = 222.2311 \quad (2.71)$$

$$B_3 = \frac{\alpha_2 k_m}{R_m(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)} = 19.9458 \quad (2.72)$$

$$B_4 = \frac{-\alpha_3 k_m}{R_m(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)} = -32.7997 \quad (2.73)$$

Capítulo 3

Diseño

En este capítulo se van a diseñar los diferentes controladores que permitan realizar los dos objetivos que se quieren llevar a cabo: levantar el péndulo y mantenerlo en equilibrio una vez levantado.

Atendiendo a estos objetivos, se pueden diferenciar dos zonas angulares. En primer lugar, está la zona cercana al punto invertido, en la que la intención es mantener el péndulo en equilibrio. Este punto es la posición vertical hacia arriba ($\theta_2 = 0$), y en torno a él se considerará que se trata de una zona lineal, hasta $\pm 20^\circ$ ($\pm 0.35 \text{ rads}$).

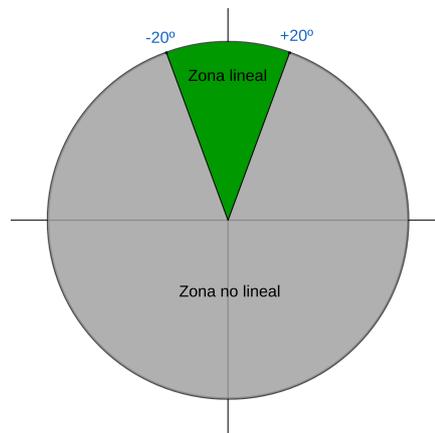


Figura 3.1: Zonas de trabajo del péndulo atendiendo a θ_2 .

Para controlar el péndulo en esta zona, se van a estudiar dos alternativas. La primera consistirá en el uso de dos controladores PD, cada uno de ellos controlando uno de los ángulos (θ_1 y θ_2). La segunda alternativa se basará en un control mediante LQR.

La segunda zona abarca todas las posiciones de θ_2 que no están cerca del punto de equilibrio, y en ella el comportamiento del péndulo no es lineal. Aquí, el objetivo es llevar al péndulo de la posición normal hacia abajo a la posición invertida hacia arriba, es decir, a la zona lineal. Este problema se denomina Swing-Up, y para resolverlo se utilizará un controlador de energía.

3.1. Diseño del controlador PD

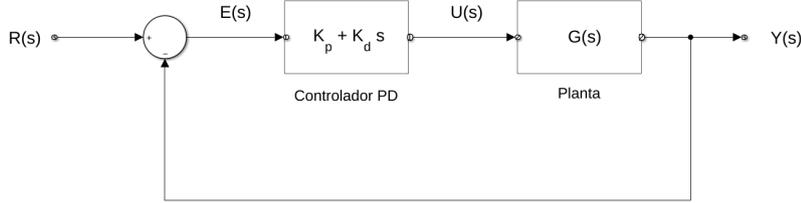


Figura 3.2: Esquema de un controlador PD.

Un controlador PD es un controlador realimentado para sistemas lineales de una entrada y una salida. En la Figura 3.2 se puede ver su diagrama de bloques. La variable de salida $Y(s)$ es realimentada y se compara con un valor de referencia $R(s)$, que es el valor deseado para dicha variable. Se obtiene el error $E(s)$ como la diferencia del valor deseado y el valor medido. El controlador usa este error para generar dos señales: la primera, llamada parte proporcional, multiplicando el error por una constante (K_p), y la segunda, llamada parte derivativa, derivando dicho error y multiplicándolo también por una constante (K_d). La salida del controlador hacia la planta $U(s)$ será la suma de estas dos señales. La función de transferencia de este controlador es la siguiente:

$$G_c(s) = K_p + K_d s \quad (3.1)$$

La acción proporcional es la que realiza la acción principal de control, consiguiendo reducir el error acercando el valor de salida al valor de referencia. Cuanto mayor es, más rápido se corrige el error, pero puede provocar mayores oscilaciones en el sistema. La acción derivativa tiene un carácter predictivo, consiguiendo reducir en gran medida las oscilaciones del sistema. Sin embargo, hay que tener cuidado con ella, ya que la derivada aumenta en mayor medida las señales de mayor frecuencia, por lo que esta acción es muy susceptible al ruido de alta frecuencia. Diseñar un controlador PD consiste en seleccionar las constantes de cada acción, K_p y K_d .

Como nuestro péndulo está definido por dos variables, serán necesarios dos controladores PD, uno para θ_1 y otro para θ_2 . Para su diseño, se supondrá que son independientes, y dado que nuestra variable más crítica es θ_2 , se diseñará este controlador en primer lugar. Para ello, lo primero es obtener la función de transferencia del péndulo para dicho ángulo. La entrada al sistema es el voltaje aplicado al motor, y la salida es θ_2 , por lo que dicha función de transferencia será

$$G_{\theta_2}(s) = \frac{\Theta_2(s)}{V(s)} \quad (3.2)$$

Para calcularla, se aplica la transformada de Laplace a la Ecuación 2.66:

$$s^2 \Theta_2(s) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2} \left[\alpha_1 \alpha_4 \Theta_2(s) - \frac{\alpha_3 k_m}{R_m} V(s) \right] \quad (3.3)$$

Operando y reordenando, finalmente se obtiene

$$G_{\theta_2}(s) = -\frac{\alpha_3 k_m}{(R_m(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2))(s^2 - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2})} = \frac{K_2}{s^2 - p_2^2} = \frac{K_2}{(s + p_2)(s - p_2)} \quad (3.4)$$

donde

$$K_2 = \frac{-\alpha_3 k_m}{R_m(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2)} = -32.7997 \quad (3.5)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2}} = 14.9074 \quad (3.6)$$

Como se puede ver, $G_{\theta_2}(s)$ tiene un polo en el semiplano positivo, por lo que se trata de un sistema inestable. Se define $G_{c2}(s)$ como el controlador PD para el brazo 2, de tal manera que:

$$G_{c2}(s) = K_{p2} + K_{d2}s \quad (3.7)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema controlador más péndulo queda

$$H_{CL}(s) = \frac{\Theta_2(s)}{R(s)} = \frac{G_{2c}(s)G_{\theta_2}(s)}{1 + G_{2c}(s)G_{\theta_2}(s)} = \frac{K_2 K_{d2}s + K_2 K_{p2}}{s^2 + K_2 K_{d2}s + K_2 K_{p2} - p_2^2} \quad (3.8)$$

donde $\Theta_2(s)$ es la variable de salida y $R(s)$ es el valor de referencia para esa variable.

Las dos formas canónicas de los sistemas de segundo orden [5] son:

$$G_1(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (3.9)$$

$$G_2(s) = \frac{w_n s}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (3.10)$$

donde $w_n = 2\pi f_n$ es la frecuencia natural del sistema, y ζ es el coeficiente de amortiguamiento. $H_{CL}(s)$ es una combinación lineal de $G_1(s)$ y $G_2(s)$, que tienen el mismo denominador ($s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2$). Comparándolo con el de $H_{CL}(s)$, se puede ver que se cumple

$$w_n^2 = K_2 K_{p2} - p_2^2 \quad (3.11)$$

$$2\zeta w_n = K_2 K_{d2} \quad (3.12)$$

Para un sistema subamortiguado ($\zeta < 1$), el tiempo de respuesta viene dado por la expresión

$$t_r = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.13)$$

El objetivo es hacer t_r todo lo pequeño que se pueda, que se consigue aumentando w_n y disminuyendo ζ . Sin embargo, como se va a ver a continuación, ni w_n se puede hacer arbitrariamente grande, ni ζ arbitrariamente pequeño.

La frecuencia natural es la frecuencia a la que oscila el sistema, y cuanto más alta sea, más inestable será el mismo. En este caso, se asocia a la frecuencia a la que

oscilará el péndulo, que no debe ser muy alta. Se ha fijado su máximo en $f_n = 5 \text{ Hz}$. Despejando K_{p2} de la ecuación 3.11, se obtiene:

$$K_{p2} = \frac{(2\pi f_n)^2 + p_2^2}{K_2} = -36.8659 \quad (3.14)$$

Otro parametro que es conveniente limitar es la sobreelongación máxima M_p , para evitar oscilaciones muy pronunciadas y mejorar el tiempo de establecimiento. Se va a fijar en un máximo del 4%. Su expresión en función de ζ es

$$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (3.15)$$

M_p aumenta al disminuir ζ , por lo que despejando ζ e imponiendo la condición anterior $M_p \leq 0.04$, queda

$$\zeta \geq \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} = 0.7156 \quad (3.16)$$

Despejando K_{d2} de la ecuación 3.12, se obtiene

$$K_{d2} = \frac{2\zeta\omega_n}{K_2} = -1.3709 \quad (3.17)$$

El controlador $G_{c1}(s)$ asociado a θ_1 es mucho menos crítico. Es más, su acción debe ser bastante sutil, para no interferir en exceso con el control de θ_2 . Solamente es necesario para evitar velocidades angulares excesivamente rápidas, que supondría romper la condición $\dot{\theta}_1 = 0$ impuesta para la linealización. Sus constantes se han obtenido de forma experimental mediante la simulación descrita en el siguiente apartado, y son $K_{p1} = -1$ y $K_{d1} = -1.5$.

3.1.1. Simulación del controlador PD

Para obtener unos primeros resultados de los diferentes controladores que se vayan diseñando, se van a simular utilizando la herramienta Simulink. Se ha creado un subsistema que representa el comportamiento del péndulo disponible en el laboratorio. Dispone de dos entradas (el voltaje aplicado al motor y la posición inicial del péndulo $\theta_2(0)$) y de cuatro salidas (θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$). En el Anexo C se detalla su desarrollo y características más importantes.

A partir de dicho subsistema se han implementado los diferentes controladores. En la Figura 3.3 se puede ver la implementación de los dos controladores PD diseñados en el apartado anterior. El bloque *Zona lineal* asegura que la acción de control solo sea aplicada mientras el péndulo se encuentra en la zona lineal. El bloque *Posición inicial del péndulo* establece el ángulo inicial del péndulo. Se ha iniciado a 0.15 rad (8.6°), para ver el comportamiento del motor al intentar reducir el error y mantenerlo en equilibrio.

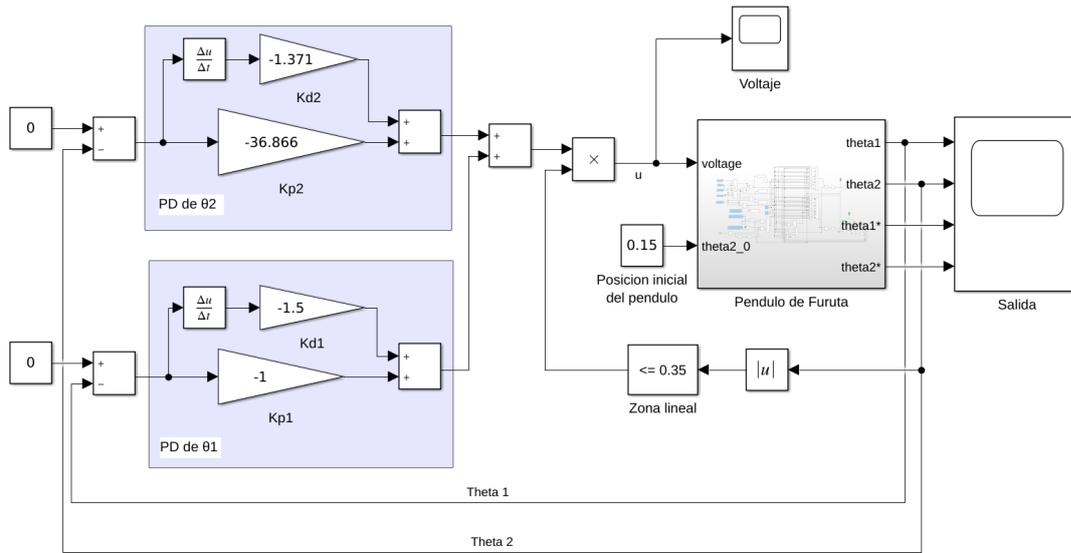


Figura 3.3: Controlador PD implementado en Simulink.

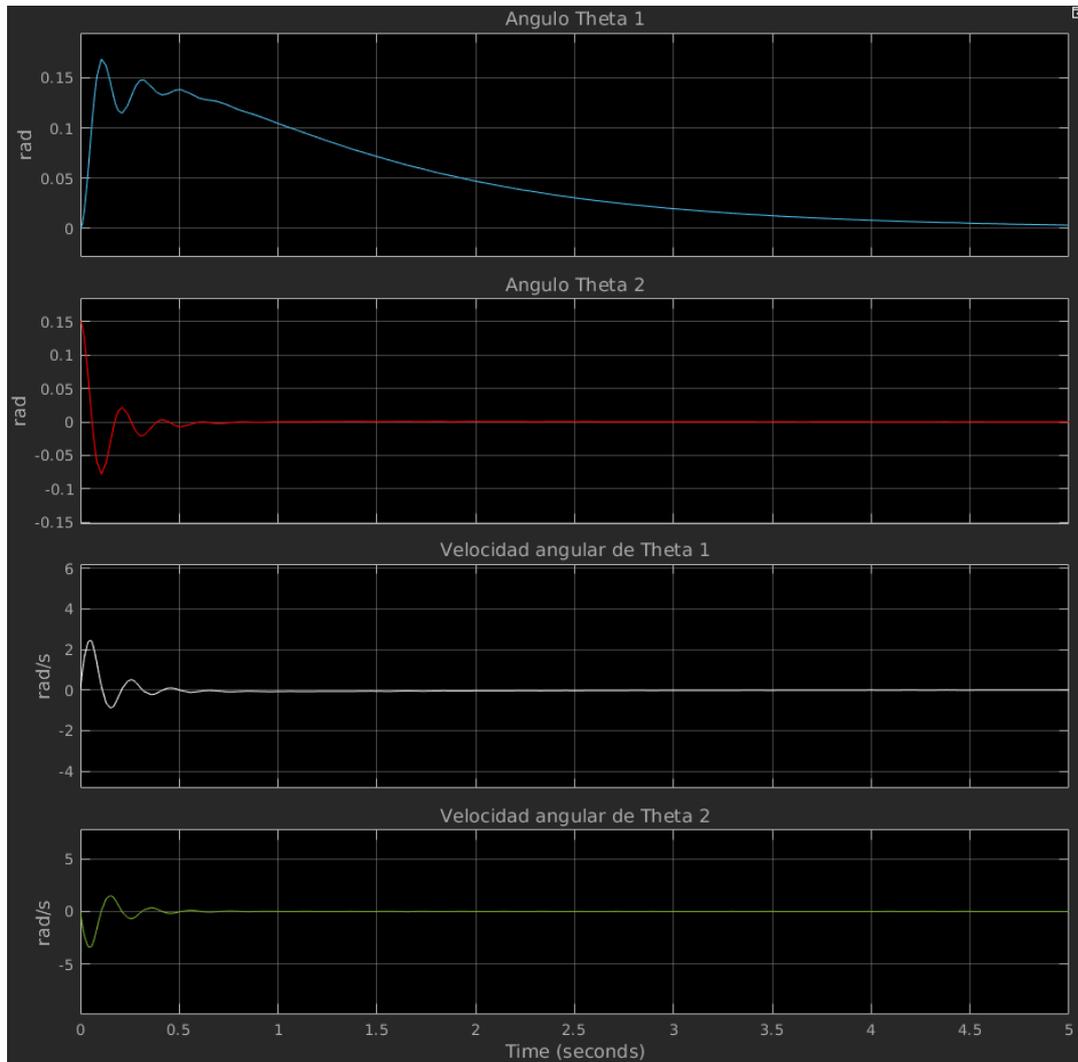


Figura 3.4: Salida simulada del controlador PD.

En la Figura 3.4 se puede ver la salida del sistema para una simulación de 5 s. La primeras dos gráficas representan θ_1 y θ_2 . Se puede ver cómo θ_2 se estabiliza bastante rápido. Tanto θ_1 como θ_2 presentan ciertas oscilaciones iniciales. Dichas oscilaciones son muy sensibles al valor K_{d1} . Aumentándolo o disminuyéndolo aproximadamente 5 unidades, estas oscilaciones provocan que el sistema deje de ser estable.

En la Figura 3.5 se puede ver la señal de control u aplicada al motor durante la simulación. Comienza en torno a 6 V, y decrece oscilando rápidamente hasta un valor casi nulo.

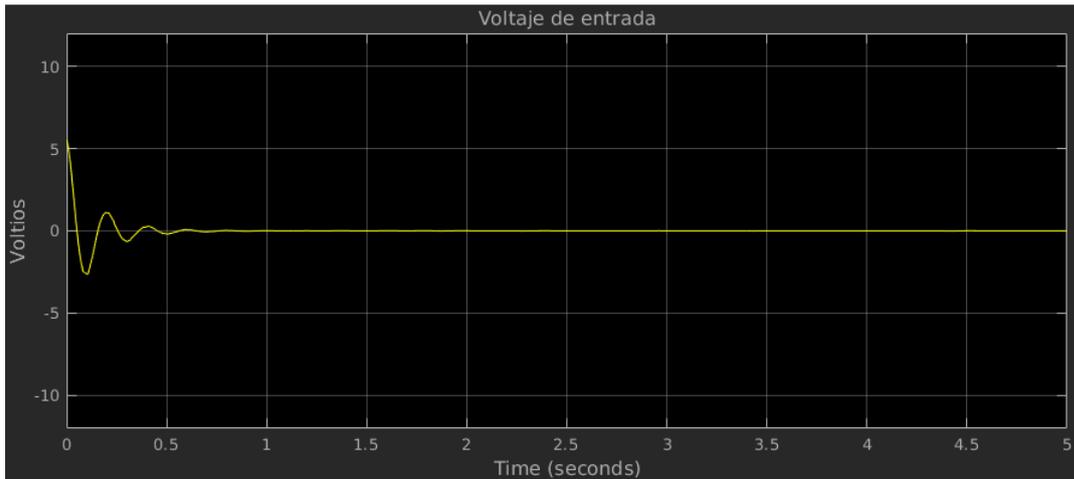


Figura 3.5: Señal de control u simulada del controlador PD.

3.2. Diseño del controlador LQR

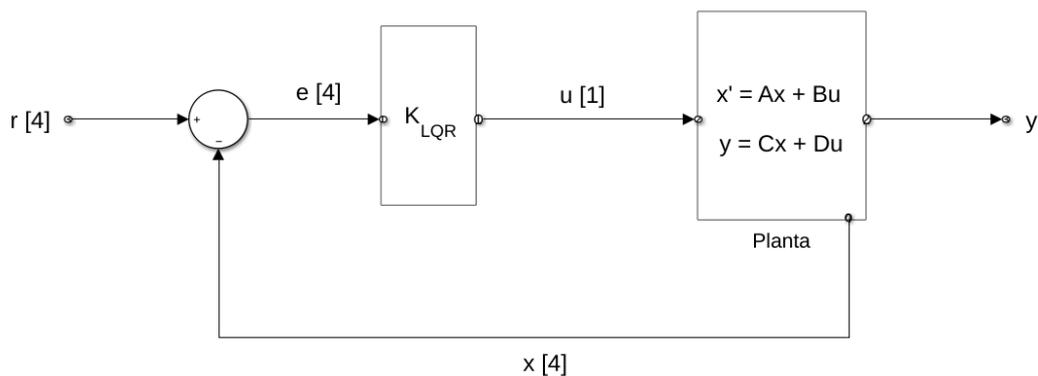


Figura 3.6: Esquema de un controlador LQR.

Un controlador LQR es un controlador basado en la realimentación del estado [6]. Como ya se vio en la Sección 2.2.2, el estado de un sistema es el número mínimo de

variables que definen completamente al sistema en un instante cualquiera. En el caso del péndulo, estas variables son θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$.

Este controlador está basado en la teoría de control óptimo, que trata el problema de obtener controladores óptimos desde el punto de vista del coste en función de un criterio concreto. El coste se refiere a la relación entre lo importante que es un determinado comportamiento y lo que cuesta (por ejemplo, en términos de energía) conseguirlo. El controlador óptimo se consigue minimizando dicho coste. Para un controlador LQR, el coste $J(u)$ se calcula según la expresión

$$J(u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})dt \quad (3.18)$$

En ella, \mathbf{x} es el vector de estado y \mathbf{u} es el vector de entradas. \mathbf{Q} es una matriz diagonal que establece la importancia de cada variable de estado. Es decir, cuánto de importante es que no se desvíe de su valor de referencia. La matriz \mathbf{R} establece el coste que tiene cada entrada (cada actuador). Para diseñar un controlador LQR, se deben definir los valores relativos de \mathbf{Q} y \mathbf{R} .

En el péndulo, como hay cuatro variables de estado, la matriz \mathbf{Q} es de tamaño 4x4, y al haber solo una entrada, \mathbf{R} es una matriz 1x1. Todas las variables de estado y entradas van a tener un valor base de 1. Se le quiere dar más importancia a θ_2 , que es la variable más crítica para mantener el péndulo en equilibrio. Para ello, se le asignará un valor superior. Experimentalmente, se ha decidido que un valor de 10 proporciona un resultado satisfactorio. De esta forma, \mathbf{Q} y \mathbf{R} quedan:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{R} = [1] \quad (3.20)$$

La solución a este problema es una ley de control $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ que minimiza el coste de la Ecuación 3.18. El valor de \mathbf{K} se calcula según la siguiente expresión:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{S} \quad (3.21)$$

donde \mathbf{S} es la solución a la ecuación asociada de Riccati [7]

$$\mathbf{A}'\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{S} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.22)$$

El comando *lqr* de Matlab, resuelve esta ecuación y calcula el valor de \mathbf{K} . Para ello, recibe como parámetros \mathbf{Q} y \mathbf{R} , junto con la matriz de estado \mathbf{A} y la matriz de entrada \mathbf{B} calculadas en la Sección 2.2.2. El resultado es:

$$\mathbf{K}_{LQR} = \begin{bmatrix} -1.000 \\ -28.1051 \\ -1.2821 \\ -2.5251 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.2.1. Simulación del controlador LQR

En la Figura 3.7 se puede ver la implementación de este controlador en Simulink.

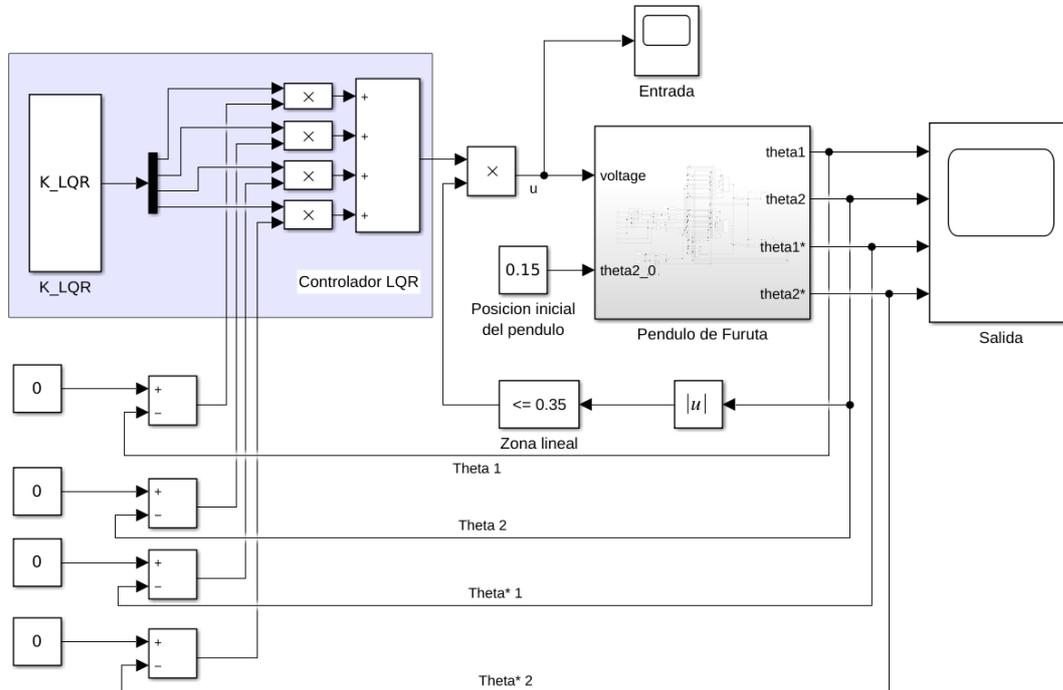


Figura 3.7: Controlador LQR implementado en Simulink.



Figura 3.8: Señal de control u simulada del controlador LQR.

La simulación se ha realizado bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior: Una duración de 5 s y una posición inicial del péndulo de 0.15 rad . La Figura 3.9 representa, como en el caso anterior, la salida del sistema. La respuesta de θ_2 es ligeramente más lenta que la conseguida mediante el controlador PD, pero también mucho más suave. Además, θ_1 no oscila.

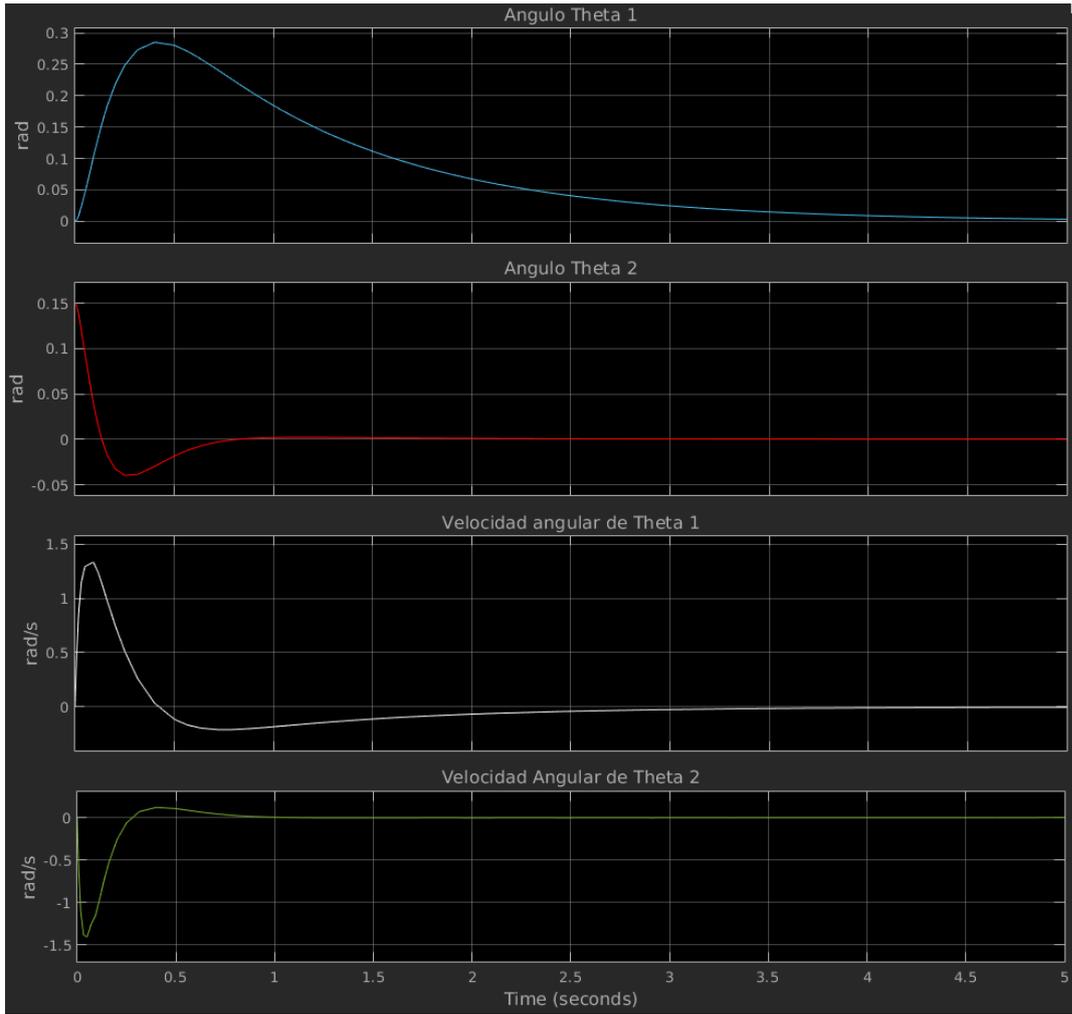


Figura 3.9: Salida simulada del controlador LQR.

En la Figura 3.8 se puede ver la señal de control producida por el controlador LQR. Comparándola con el caso anterior, el voltaje aplicado es menor. Aquí se observa la ventaja de usar un controlador óptimo en cuanto al coste de control se refiere.

3.3. Diseño del Swing-Up por energía

En la zona no lineal, se va a diseñar un control por energía. La energía del péndulo viene dada por la energía cinética más la energía potencial de cada brazo. En la Sección 2.2 se han obtenido las expresiones de las mismas, que se exponen a continuación. Se va a omitir E_{p1} , que al ser constante no es relevante para el diseño de este controlador.

$$E_{c1} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (3.24)$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} (m_2 L_1^2 + I_2 \sin^2(\theta_2)) \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (3.25)$$

$$E_{p2} = g m_2 l_2 (\cos(\theta_2) + 1) \quad (3.26)$$

La energía total es:

$$E_t = E_{c1} + E_{c2} + E_{p2} \quad (3.27)$$

El péndulo parte de la posición vertical hacia abajo en reposo ($\theta_2 = \pi$, $\dot{\theta}_2 = 0$ y $\dot{\theta}_1 = 0$), por lo que su energía inicial es nula. El objetivo es llevarlo a la posición vertical hacia arriba ($\theta_2 = 0$, $\dot{\theta}_2 = 0$ y $\dot{\theta}_1 = 0$), en la que la energía total del sistema es:

$$E_{ref} = gm_2l_2(\cos(0) + 1) = 0.2012 J \quad (3.28)$$

Para aumentar la energía del sistema, se balancea el péndulo de lado a lado. Cuando la energía total sea igual a la energía de referencia E_{ref} , se dejará forzar el balanceo, permitiendo al péndulo llegar a la posición vertical agotando su energía cinética.

Para que la energía del sistema aumente, cuando el péndulo se encuentra por debajo de la horizontal, la aceleración producida por el motor debe tener el mismo signo que la velocidad del brazo 2 (para producir el balanceo). En cambio, cuando el péndulo se encuentra por encima de la horizontal, la aceleración debe tener signo contrario al de la velocidad para seguir balanceándolo hacia arriba. Este signo en función del semiplano en el que se encuentre el péndulo se puede expresar en términos de θ_2 como $-\cos(\theta_2)$. Teniendo en cuenta la velocidad angular, el signo de la señal de control aplicada al motor será igual a $-\text{sign}(\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2))$.

Por tanto, el controlador por energía es parecido a un controlador proporcional no lineal, al que se le ha añadido un término correspondiente al signo, y tiene la forma

$$V = -k(E_{ref} - E_t) \cdot \text{sign}(\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) \quad (3.29)$$

k se ha obtenido experimentalmente mediante las simulaciones, y su valor mínimo es:

$$k = 120 \quad (3.30)$$

3.3.1. Simulación del Swing-Up

Para simular el Swing-Up, se ha utilizado el controlador LQR diseñado anteriormente para la zona lineal. La implementación en Simulink se puede ver en la Figura 3.10. Esta vez, se ha simulado durante un tiempo de 2.5 s, partiendo de la posición inicial $\theta_2(0) = \pi$, es decir, con el péndulo colgando hacia abajo.

En la Figura 3.11 se puede ver la evolución de θ_2 durante el experimento. El péndulo se balancea de lado a lado hasta que entra en la zona lineal, momento en el que se activa el controlador LQR, que lo lleva al punto de equilibrio. Para valores de k menores de 120, el péndulo no llega a la zona lineal, y por tanto no completa el Swing-Up.

La Figura 3.12 representa la evolución de la energía durante este experimento. En color azul está representada la energía total del péndulo. Se observa cómo esta va aumentando hacia el valor de referencia, mientras la energía cinética y potencial van

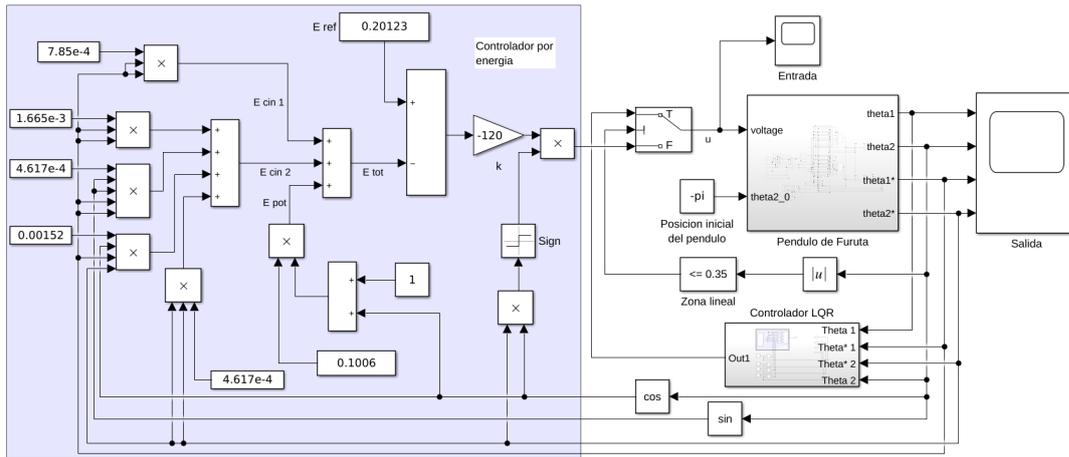


Figura 3.10: Controlador del Swing-Up implementado en Simulink.

oscilando (debido al balanceo). Cuando el péndulo entra en la zona lineal, aparece un pico de energía causado por el controlador LQR, mientras estabiliza el péndulo en posición vertical.

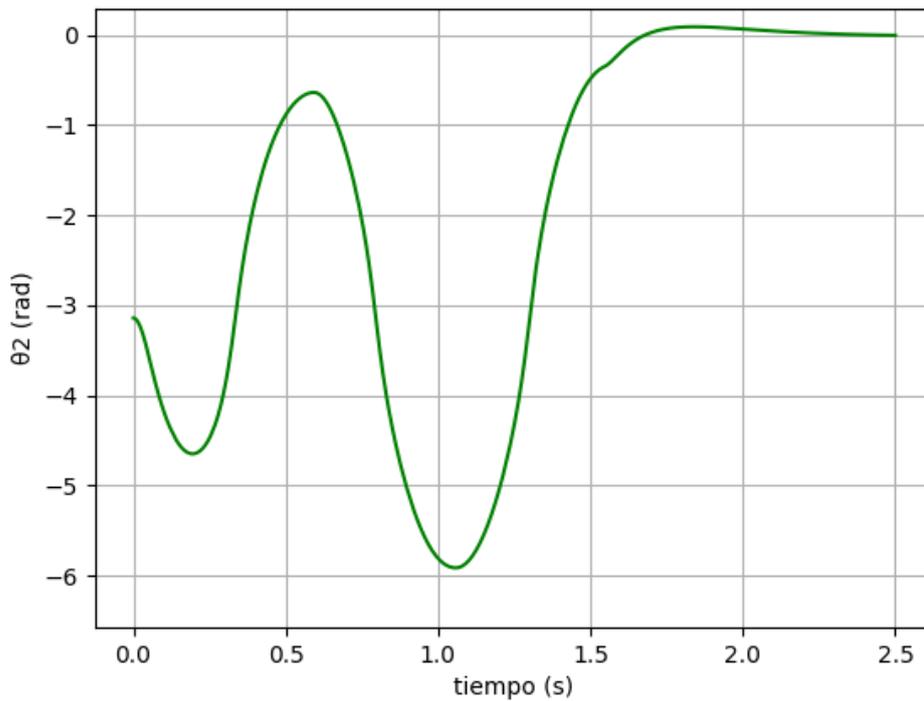


Figura 3.11: Respuesta del Swing-Up.

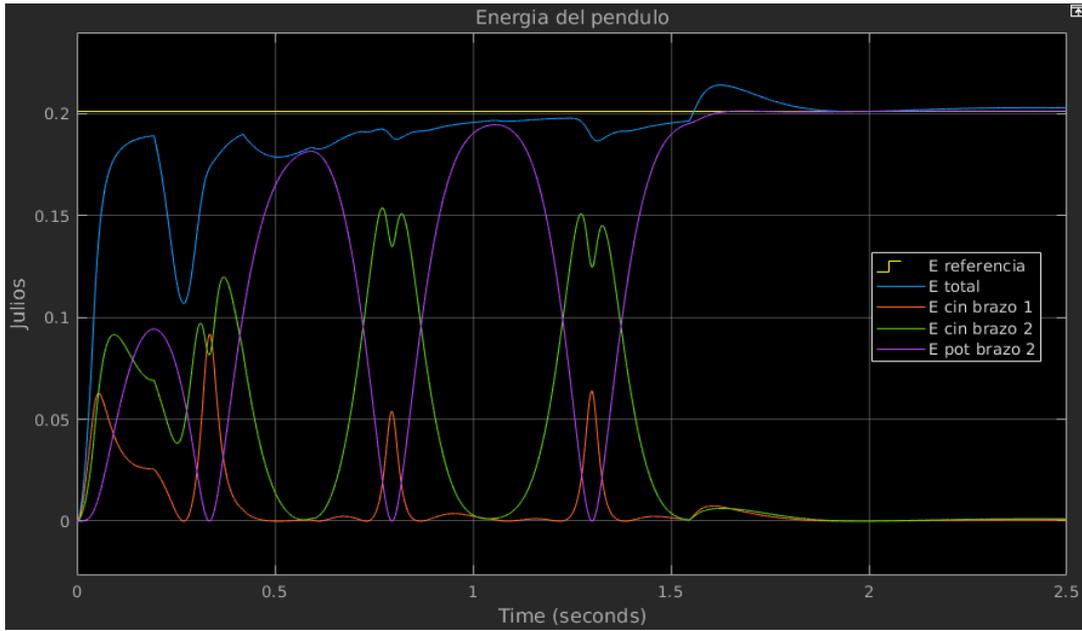


Figura 3.12: Evolución de la energía del Swing-Up.

Capítulo 4

Implementación y resultados

4.1. Sistema completo

4.1.1. Péndulo

En secciones anteriores se han desarrollado los aspectos mecánicos del péndulo, mientras que en esta se van a explicar los componentes electrónicos del mismo, que son la forma en la que el microcontrolador puede interactuar con él.

En primer lugar, el actuador del sistema es un motor DC acoplado en el eje θ_1 . Dispone de dos entradas: V_+ y V_- . El voltaje efectivo aplicado al motor es el resultado de la diferencia de estas entradas. Si $V_+ > V_-$, el motor gira en sentido positivo (anti-horario), y en caso contrario, en sentido negativo (horario). En la práctica, a la hora de manejar el motor se va a activar solo una de las salidas aplicando el voltaje deseado (de 0 a 12 V), mientras la otra se mantiene a 0.

Para medir la posición en el eje de θ_1 , se va a usar un encoder incremental que está acoplado al motor. Dicho encoder tiene dos canales (A y B) desfasados 90° , que tienen una resolución de 260 pulsos por vuelta cada uno. El encoder tiene dos salidas, correspondientes a los dos canales, y dos entradas de alimentación (V_{enc} y GND). La alimentación del encoder debe ser $V_{enc} = 5 V$.

En el eje de θ_2 , para medir la posición se dispone de un potenciómetro rotativo de valor nominal $5 k\Omega$. Tiene dos entradas de alimentación (V_{pot} y GND) y una salida analógica en función de la posición del potenciómetro. La alimentación debe realizarse a $V_{pot} = 3.3V$, por lo que la tensión de la salida estará entre 0 y dicho valor. Al tratarse de una resistencia, existe cierto ruido inevitable en la lectura de su valor. Además, el potenciómetro tiene una pequeña zona muerta en el paso por cero (cuando pasa de su valor máximo a su valor mínimo), en la que su lectura devuelve valores incoherentes. Para evitar problemas, al acoplar el péndulo al potenciómetro la zona de paso por cero se ha situado lejos de la zona lineal.

4.1.2. Microcontrolador Nucleo STM32 L476RG

El microcontrolador utilizado va a ser un Nucleo STM32 L476RG [8] [9] de la empresa ST. Funciona a una frecuencia $f_{MCLK} = 80 \text{ Mhz}$ y a una tensión de 3.3 V . Dispone de salidas de alimentación tanto a 3.3 V como a 5 V . Tiene una gran cantidad de periféricos, entre los que se encuentran el ADC y los Timers, que son los que se usarán para esta aplicación. En la Tabla 4.1 se muestra un resumen de ellos.

Periférico	Pines	Función
Timer 2	PA0, PA1	Leer canales A y B del encoder
Timer 3	PB4, PB5	Canales 1 y 2 del PWM
Timer 6	-	Temporización del ADC
Timer 7	-	Temporización del controlador
ADC 1	PC0	Leer la salida analógica del potenciómetro

Tabla 4.1: Periféricos del STM32 L476RG utilizados.

4.1.3. Etapa de potencia X-Núcleo IHM04A1

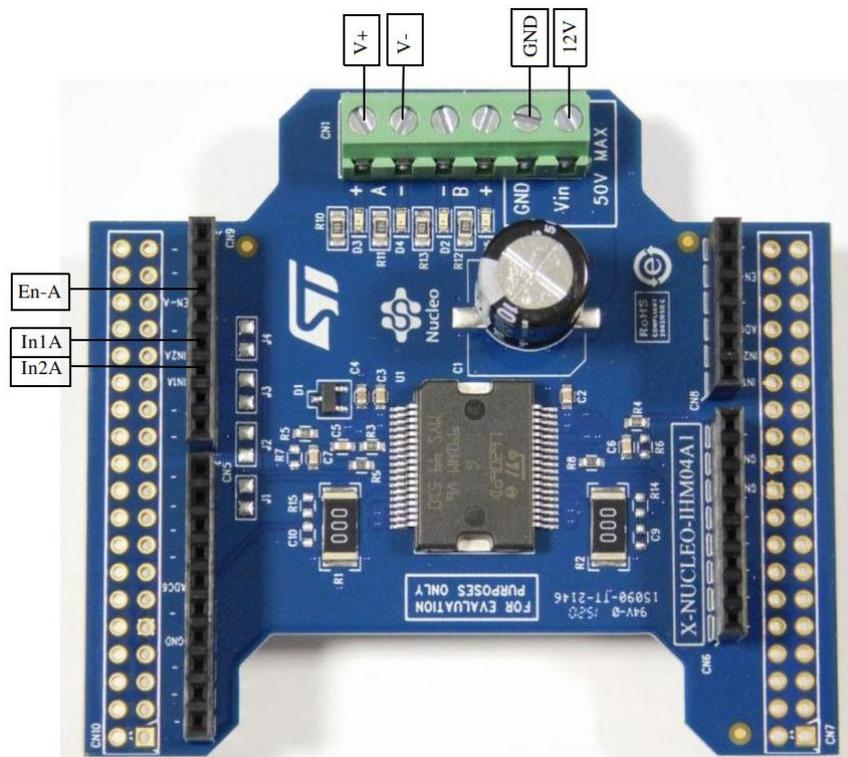


Figura 4.1: Conexiones de la etapa de potencia X-Núcleo IHM04A1.

Para la etapa de potencia se va a usar la placa X-Núcleo IHM04A1 [10], también de la empresa ST. Puede controlar dos motores bipolares (salida A y salida B) con

un rango de voltajes de 8 a 50 V. Mediante una fuente de alimentación externa se va a alimentar a $V_{cc} = 12 V$, que es el voltaje máximo admitido por el motor. En la Figura 4.1 se pueden ver las conexiones de esta placa. El motor va a estar conectado a la salida A. Dicha salida es controlada por tres entradas:

- En-A: Activa las salidas V_+ y V_- .
- In1A: Pone la salida V_+ a $V_{cc} = 12 V$.
- In2A: Pone la salida V_- a $V_{cc} = 12 V$.

4.2. Implementación

A continuación se van a explicar distintos aspectos de la implementación en software y de la configuración de los distintos periféricos del microcontrolador STM32 L476RG. En la Figura 4.2 están representadas las conexiones que se han realizado.

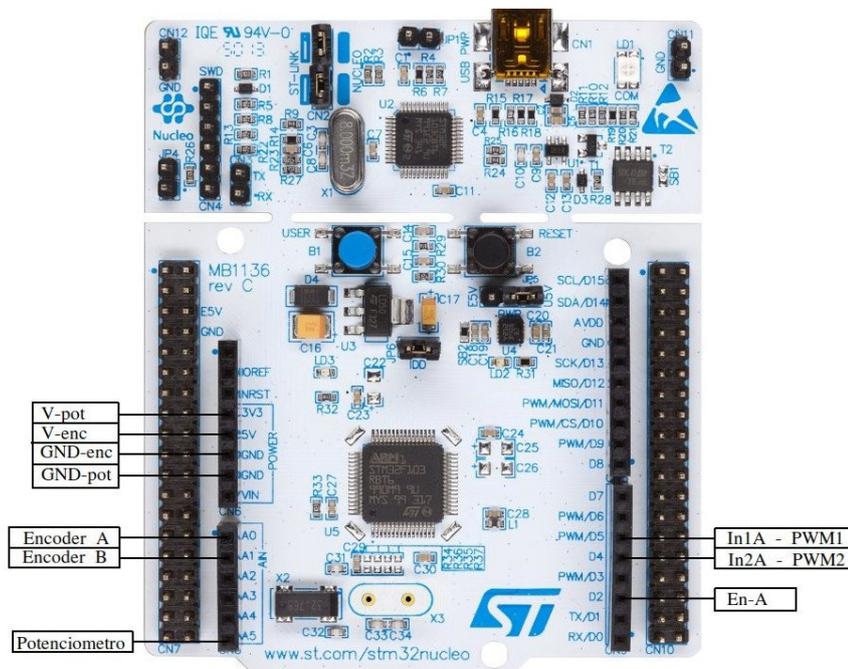


Figura 4.2: Conexiones del microcontrolador STM32 L476RG.

En primer lugar, todos los controladores que se han diseñado son sistemas continuos. Sin embargo, el microcontrolador es un sistema discreto. Por ello, debe trabajar a una velocidad elevada para corresponderse lo máximo posible con los análisis del sistema continuo.

Para esta tarea se ha usado el Timer 7, que va a producir una interrupción periódica cada $T_c = 1 ms$. La frecuencia de activación de los Timers es

$$f_T = \frac{f_{MCLK}}{(\text{preescaler} + 1)(\text{period} + 1)}, \quad (4.1)$$

donde f_{MCLK} es la frecuencia del reloj del microcontrolador, el *preescaler* es el factor por el que se divide dicho reloj para producir el reloj del Timer, y el *period* es el valor que debe alcanzar el contador del Timer para producir la interrupción y resetearse. De esta forma, para un *preescaler* = 31 el Timer cuenta a una frecuencia de 2.5MHz , y para un *period* = 2499, se produce una interrupción con una frecuencia $f_{T7} = 1\text{KHz}$.

En la rutina de atención a esta interrupción se ejecuta el controlador propiamente dicho. Primero calcula los valores de θ_1 y θ_2 a partir de los valores obtenidos del encoder y del potenciómetro. Su obtención se explica en la Sección 4.2.1. A continuación determina si el péndulo se encuentra en la zona lineal o no, y ejecuta el controlador correspondiente en cada caso.

También calcula las derivadas necesarias (las velocidades angulares y derivadas del error). Al tratarse de un sistema discreto, dichas derivadas son en realidad diferencias, cuyo valor se calcula como

$$\text{diferencia} = \frac{\text{muestra actual} - \text{muestra anterior}}{\text{tiempo entre muestras}} \quad (4.2)$$

Para tiempos entre muestras muy pequeños aparecen muchos errores de discretización, mientras que para tiempos muy grandes se pierden las variaciones rápidas, obteniéndose un valor medio más que el valor instantáneo. En el Anexo D se explica en más detalle este fenómeno, y cómo ha sido obtenido el periodo entre muestras ideal $T_d = 18\text{ms}$, es decir, cada 18 activaciones de la interrupción.

Una vez calculada la respuesta por el controlador correspondiente, la señal de salida va a ser implementada mediante una modulación de anchura de pulsos. Como se puede ver en la Ecuación 2.8, el motor se comporta como un filtro paso bajo, por lo que una señal PWM de frecuencia suficientemente alta será para el motor como una señal DC con el valor medio de la señal PWM. Se va a usar por tanto una señal PWM con una frecuencia $f_{PWM} = 25\text{KHz}$.

Se van a usar los canales 1 y 2 del Timer 3 configurados como PWM. Para obtener la frecuencia deseada se ha asignado el *preescaler* = 0 y el *period* = 3199. El ciclo de trabajo se calcula como

$$\text{Duty cycle} = \frac{\text{cycle}}{\text{period}} \quad (4.3)$$

donde $\text{cycle} \leq \text{period}$. La señal de salida está a nivel alto siempre que el contador sea menor que el valor de *cycle*, y a nivel bajo en caso contrario. En la Figura 4.3 se ve cómo el voltaje medio equivalente aplicado al motor depende del valor de *cycle*. Para girar en sentido positivo, se asigna el valor correspondiente (en función del par deseado) al registro de *cycle* del canal 1, y para girar en sentido negativo, al del canal 2.

4.2.1. Lectura del encoder y del potenciómetro

Los Timers del STM32 L476RG tienen un modo diseñado para leer encoders. Para esta tarea se ha utilizado el Timer 2, configurado con un *preescaler* = 0 para trabajar

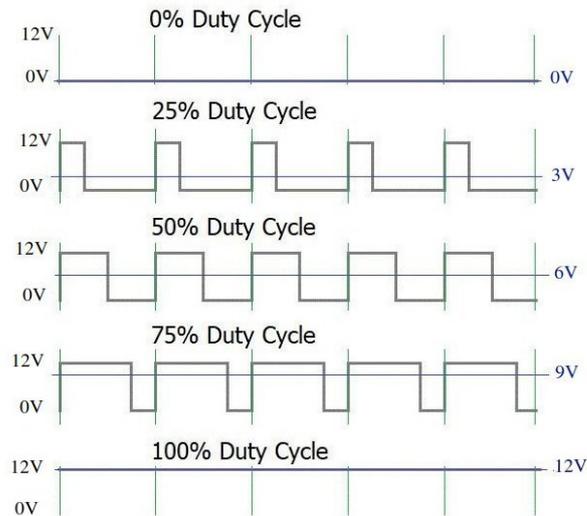


Figura 4.3: Valor medio de una señal PWM en función de su ciclo de trabajo.

a la máxima frecuencia posible. En este modo, en cada ciclo de reloj, el Timer lee los pulsos de sus dos entradas (correspondientes a los canales A y B del encoder) para aumentar o disminuir su contador en ese número de pulsos en función de la dirección del giro. La principal ventaja es que libera al procesador de esta tarea, que puede comprobar el número de pulsos con solo consultar el registro del contador. Solo hay que tener cuidado con la saturación de dicho registro. Dado que es de 16 bits, puede contar hasta $2^{16} - 1 = 65535$, por lo que dicha saturación se producirá al pasar de 65535 a 0 o viceversa.

Por otra parte, para leer el valor del potenciómetro se ha usado el ADC 1. Se ha configurado con una resolución de 12 bits, por lo que la señal de entrada va a tener un valor entre 0 y 4095. La señal producida por el potenciómetro es bastante ruidosa. Para minimizar este ruido, se va a usar como valor la media de las últimas 10 muestras con el ADC trabajando a una velocidad 10 veces mayor que la del resto del controlador. Por tanto el periodo de lectura es $T_{ADC} = 100 \mu s$.

Tras varias pruebas experimentales, se ha visto que la máxima frecuencia posible a la que se puede trabajar el ADC sin producir errores de lectura es $f_{ADC} = 2.5 MHz$, es decir, aplicando una división entre 32 a f_{MCLK} . Cada lectura necesita 19 ciclos, que a dicha frecuencia de reloj son $7.6 \mu s$, un tiempo bastante menor que el periodo de lectura T_{ADC} .

Para fijar el periodo de lectura se ha utilizado el Timer 6, con el mismo *prescaler* que el Timer 7 pero con un *period* = 249, por lo que $f_{T6} = 10 KHz$. Se ha configurado el ADC para que, con cada activación del Timer 6, comience la lectura de un nuevo valor y active una interrupción una vez el valor haya sido leído. En la rutina de atención a dicha interrupción, se almacena este nuevo valor en un array donde se encuentran los diez últimos valores. Cada vez que el controlador quiera saber el valor del potenciómetro, realizará una media de estos diez valores.

4.3. Resultados

En esta sección se van a presentar los resultados obtenidos para los diferentes controladores. En líneas generales, la implementación del diseño teórico de ambos controladores lineales (PD y LQR) funciona, ya que mantienen el péndulo en la posición invertida. Sin embargo, en los dos se producen muchas oscilaciones. Estos resultados se explican principalmente por tres factores.

En primer lugar, por el error en la lectura de θ_2 debido al ruido del potenciómetro. Este es el factor más importante, ya que la posición de θ_2 es crucial para mantener el péndulo en equilibrio, y el ruido producido es relativamente elevado.

Por otra parte, existe también ruido en el cálculo de las derivadas, que aunque se ha tratado de minimizar, no ha sido eliminado por completo.

Por último, están las aproximaciones realizadas durante el modelado del motor y del péndulo, como por ejemplo obviar la inductancia del primero, o la fricción y forma real de los brazos del segundo. Aunque sean poco influyentes, contribuyen a las discrepancias con el modelo teórico.

El controlador del Swing-Up es menos sensible al ruido, ya que no requiere de tanta precisión en el valor de los ángulos y velocidades para funcionar. Por tanto, presenta un comportamiento similar al teórico.

En los siguientes apartados se van a representar las gráficas correspondientes a los diferentes controladores. Tras comprobar el funcionamiento de los diseños teóricos, se ha decidido hacer un ajuste de los parámetros de los dos controladores lineales, con el objetivo de mejorar el comportamiento de los mismos.

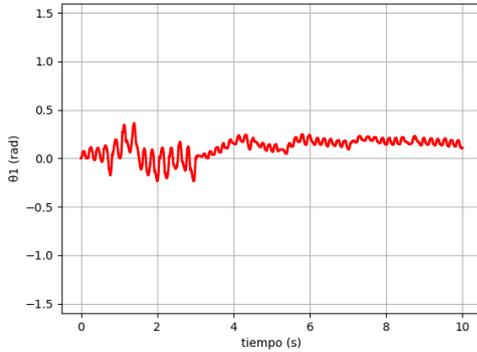
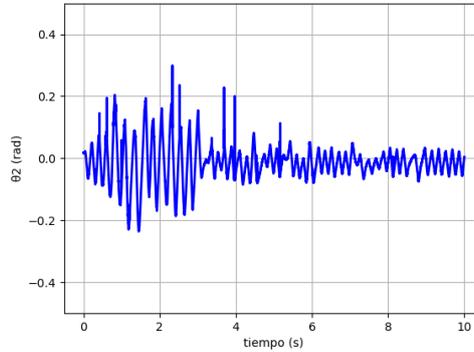
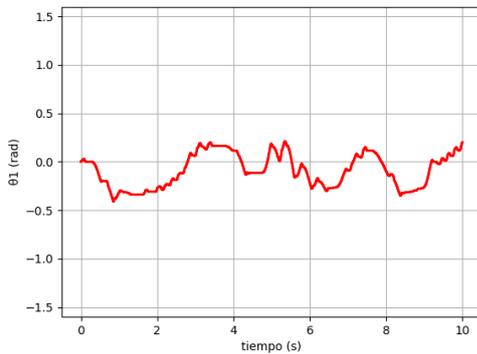
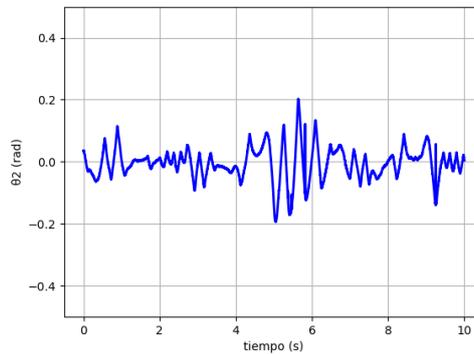
El primer paso del ajuste manual se ha basado en la disminución de las componentes asociadas a las derivadas. Esto ha conseguido un comportamiento más estable (debido a la disminución del ruido de derivación, asociado a estas variables). Sin embargo, el sistema se vuelve menos robusto frente a perturbaciones externas. Una vez hecho esto, se ha ajustado el valor de la ganancia proporcional asociada a θ_2 (K_{p2} en el controlador PD y el segundo elemento del vector K_{LQR} en el controlador LQR), tratando de reducir las oscilaciones al mínimo en ambos ejes.

4.3.1. Controlador PD

El experimento consiste en activar el controlador PD cuando el péndulo está en la zona lineal (se lleva allí manualmente, prescindiendo del Swing-Up) durante un tiempo de 10 s, en los que el microcontrolador almacena los datos correspondientes a θ_1 y θ_2 . Tras el experimento, los envía al ordenador por el puerto serie, donde se van a representar. Las Figuras 4.4 y 4.5 son el resultado obtenido para los parámetros teóricos, mientras que las Figuras 4.6 y 4.7 son el resultado para los parámetros ajustados manualmente. Dichos parámetros se pueden ver en la Tabla 4.2.

Valores	K_{p1}	K_{d1}	K_{p2}	K_{d2}
Teóricos	-1	-1.5	-36.8659	-1.3709
Ajustados	-1	-1.5	-30	-0.8

Tabla 4.2: Parámetros teóricos y ajustados del controlador PD.

Figura 4.4: θ_1 del controlador PD teórico.Figura 4.5: θ_2 del controlador PD teórico.Figura 4.6: θ_1 del controlador PD ajustado manualmente.Figura 4.7: θ_2 del controlador PD ajustado manualmente.

Comparando las gráficas de ambas respuestas, se puede observar la mejora en el comportamiento del controlador ajustado manualmente. Para el ángulo θ_2 , se ha disminuido la amplitud y la frecuencia, que se traduce en que el péndulo oscila menos y más despacio. Para el ángulo θ_1 , la amplitud se ha incrementado ligeramente, pero la frecuencia de oscilación se ha reducido muchísimo. En general, el comportamiento con los parámetros ajustados es mucho más suave, y mantiene el péndulo de forma más estable.

4.3.2. Controlador LQR

Se va a realizar el mismo experimento que en el apartado anterior, esta vez utilizando el controlador LQR. En las Figuras 4.8 y 4.9 se pueden observar los resultados para los valores teóricos, y en las Figuras 4.10 y 4.11, para los valores ajustados manualmente. Dichos valores son los siguientes:

$$K_{teorica} = \begin{bmatrix} -1.000 \\ -28.1051 \\ -1.2821 \\ -2.5251 \end{bmatrix} \Rightarrow K_{ajustada} = \begin{bmatrix} -1 \\ -32 \\ -1.5 \\ -1.2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

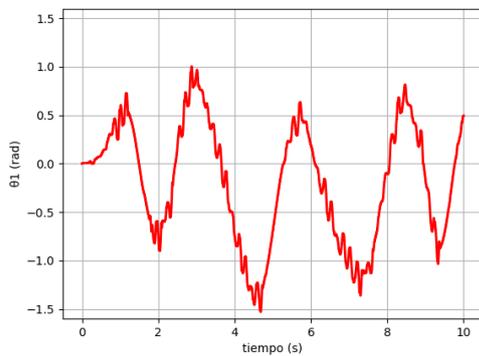


Figura 4.8: θ_1 del controlador LQR teórico.

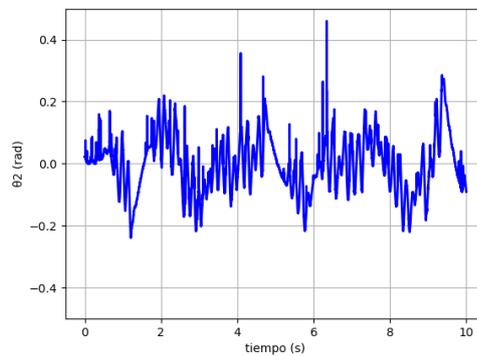


Figura 4.9: θ_2 del controlador LQR teórico.

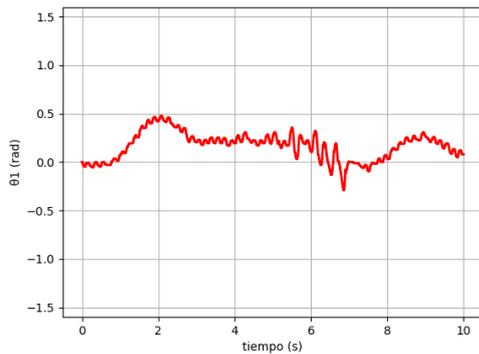


Figura 4.10: θ_1 del controlador LQR ajustado manualmente.

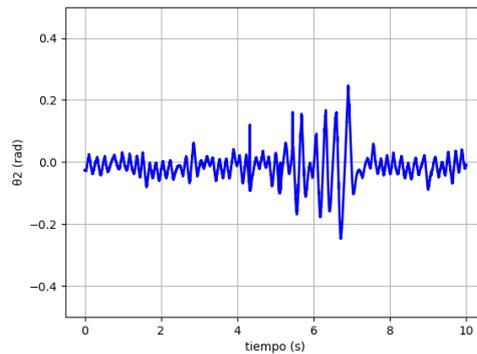


Figura 4.11: θ_2 del controlador LQR ajustado manualmente.

En este caso, al comparar las gráficas también se puede ver una mejora evidente. Cabe destacar la gran amplitud de la desviación del controlador LQR usando los parámetros teóricos, mucho mayor que la del PD. El controlador LQR ajustado arregla en gran medida este problema de amplitud, consiguiendo resultados similares a los del

controlador PD ajustado. Sin embargo, en cuanto a la frecuencia de las oscilaciones su comportamiento es peor que el de este último. Como conclusión, este controlador, una vez ajustado, mantiene el péndulo bastante estable cerca del punto de equilibrio en comparación con su versión teórica, pero sufre de unas oscilaciones de mayor frecuencia que las del controlador PD ajustado.

4.3.3. Controlador del Swing-Up

En esta sección se van a representar las gráficas correspondientes a la implementación del Swing-Up. Se ha implementado junto con el controlador PD teórico (Figuras 4.12 y 4.13) y el controlador LQR teórico (Figuras 4.14 y 4.15).

El experimento ha consistido en dejar suelto el péndulo en la posición de equilibrio hacia abajo y activar el controlador, como en el caso anterior, durante un tiempo de 10 s. El controlador consigue levantar el péndulo en aproximadamente 2 s, un valor muy cercano al obtenido en la simulación (Figura 3.11). A partir de ahí, el control se deja en manos de los controladores lineales.

Observando las gráficas de θ_2 , se puede ver como el péndulo parte de $-\pi$, y que mediante el balanceo, consigue levantarse. Una vez levantado, los controladores PD y LQR lo mantienen en la posición de equilibrio, en torno al 0.

En el eje de θ_1 , el controlador produce un desvío de unos 2.5rad durante el Swing-Up. Cabe destacar que el controlador LQR es mucho más rápido en la vuelta a 0 que el controlador PD, aunque, como ya se ha visto, produce unas oscilaciones mayores.

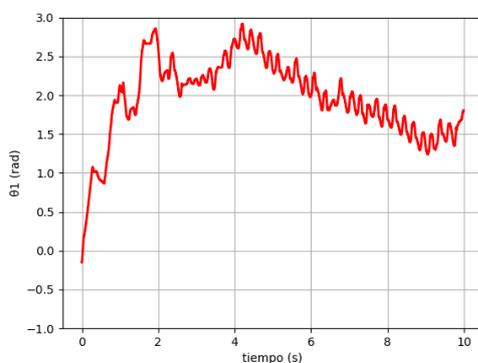


Figura 4.12: θ_1 durante el Swing-Up (PD).

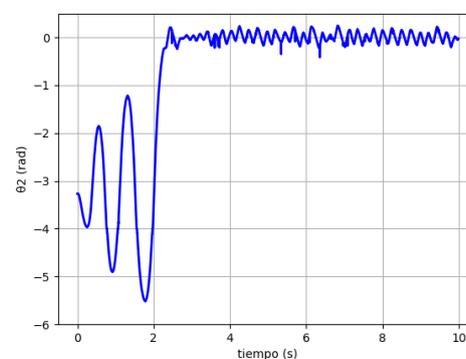


Figura 4.13: θ_2 durante el Swing-Up (PD).

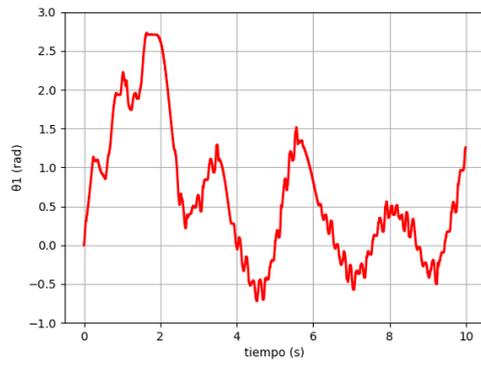


Figura 4.14: θ_1 durante el Swing-Up (LQR).

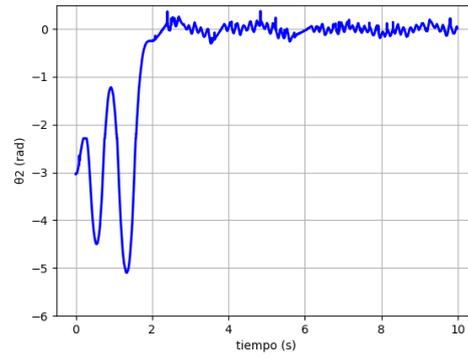


Figura 4.15: θ_2 durante el Swing-Up (LQR).

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras

5.1. Conclusiones

Los dos objetivos principales de este Trabajo de Fin de Grado eran controlar el péndulo para levantarlo hasta la posición invertida y mantenerlo en equilibrio en dicha posición. Ambos objetivos han sido solventados con éxito en la implementación final.

Con respecto al control lineal en torno al punto de equilibrio, el objetivo se ha conseguido para las dos alternativas presentadas. El modelado del péndulo se ha llevado a cabo con éxito, sirviendo como base para diseñar los controladores y para crear la implementación en Simulink.

Los primeros problemas han aparecido en el diseño del controlador PD, al tener que definir las especificaciones para el control. Esto se ha solventado mediante pruebas en las simulaciones y experimentos en el sistema real. Por el contrario, en el diseño del controlador LQR estos problemas no existen.

Sin embargo, es en el momento de la implementación real cuando han aparecido las mayores dificultades. El error de precisión en la lectura del potenciómetro (que proporciona la posición de θ_2) y en el cálculo de las derivadas hacen que el desempeño del sistema real sea peor del esperado por los resultados teóricos. Finalmente, se ha conseguido una mejor respuesta tras un ajuste manual de los parámetros, partiendo de los obtenidos teóricamente.

Como conclusión final, este péndulo es viable para su uso con fines docentes, sin embargo se podría tratar de conseguir un sistema aún más estable, que sería más fácil de manejar desde el punto de vista de los alumnos. Para ello, en la siguiente sección se proponen algunas formas de continuar el desarrollo de este Trabajo de Fin de Grado.

5.2. Líneas futuras

Como posibles continuaciones del proyecto de cara al futuro se proponen las siguientes mejoras:

- **Sustituir los brazos por varillas cilíndricas más ligeras.** Los brazos del péndulo son barras rectangulares de metal bastante pesadas, pero para su modelado se ha supuesto que son varillas cilíndricas para reducir la complejidad del mismo. Sustituyéndulas por varillas realmente cilíndricas se conseguiría que el modelo fuese más fiel al péndulo. Además, hacerlas más ligeras reduciría su inercia, por lo que facilitaría su movimiento por parte del motor.
- **Sustituir el potenciómetro por un encoder.** El potenciómetro rotacional que se usa para medir la posición de θ_2 es una gran fuente de ruido. Se propone cambiarlo por un encoder, que aumentaría la precisión en la lectura. Esto mejoraría el comportamiento general del sistema, ya que dicho ángulo es el más importante para el control en la zona lineal.
- **Mejorar las técnicas de diferenciación.** Esta es la otra gran fuente de ruido del sistema real: el ruido en la diferenciación debido a la discretización. Se propone un estudio más exhaustivo mediante el uso de técnicas más avanzadas, como podrían ser la diferenciación de orden mayor o el filtrado previo de la señal.
- **Péndulo doble.** Para aumentar la complejidad del sistema, y por tanto su interés desde el punto de vista del control, se propone añadir una nueva barra al final del brazo 2, con libertad de giro en un eje. De esta forma, se consigue un péndulo doble, con un grado más de libertad.
- **Obtener los coeficientes de fricción viscosa.** En el desarrollo incluido en este trabajo se ha supuesto nulo el efecto de la fricción viscosa. Sin embargo, se sabe que este efecto, aunque leve, existe. Por tanto, se propone obtener los coeficientes de fricción viscosa b_1 y b_2 del sistema mediante un método experimental, para incluirlos en el modelo. Esto haría que el modelo fuese una representación más exacta del péndulo.

Bibliografía

- [1] Félix Monasterio-Huelin and Alvaro Gutiérrez. Modelado de un motor dc, 2019.
- [2] The torque equation and the relationship with dc motors. <https://www.motioncontroltips.com/torque-equation/>. Accessed: 2017-06-18.
- [3] Parallel axis theorem. <http://scienceworld.wolfram.com/physics/ParallelAxisTheorem.html>. Accessed: 2017-06-18.
- [4] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Pearson, 5 edition, 2009.
- [5] Félix Monasterio-Huelin and Alvaro Gutiérrez. Diseño, 2019.
- [6] Full state feedback. https://en.wikipedia.org/wiki/Full_state_feedback. Accessed: 2017-06-18.
- [7] Linear-quadratic regulator. <https://es.mathworks.com/help/control/ref/lqr.html>. Accessed: 2017-06-18.
- [8] Carmine Noviello. *Mastering STM32*. 2018.
- [9] STMicroelectronics. *STM32L476xx*, 2018. Rev. 7.
- [10] STMicroelectronics. *UM1925*, 2015. Rev. 1.
- [11] Pid controller. https://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller. Accessed: 2017-06-18.
- [12] Time response of second-order control system. <https://www.electrical4u.com/time-response-of-second-order-control-system/>. Accessed: 2017-06-18.
- [13] Furuta pendulum dynamics. <https://www.hindawi.com/journals/jcse/2011/528341/>. Accessed: 2017-06-18.
- [14] Félix Monasterio-Huelin and Alvaro Gutiérrez. Análisis, 2019.
- [15] Russell Herman. *Solving Differential Equations Using Simulink*. 2017.

Apéndice A

Presupuesto económico

Este Trabajo de Fin de Grado se ha desarrollado en Laboratorio de Control y Robótica¹ de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación durante un periodo de 7 meses. Se ha elaborado una estimación del coste total del mismo, teniendo en cuenta los recursos humanos (Tabla A.1), el uso de equipo técnico y software del laboratorio (Tabla A.2) y los componentes del sistema utilizado (Tabla A.3).

	Coste por hora (€)	Horas trabajadas	Coste total (€)
Tutor del proyecto	25	50	1250
Estudiante	15	550	8250
Total			9500

Tabla A.1: Costes de recursos humanos.

	Vida útil (años)	Coste (€)	Depreciación (€/mes)	Tiempo utilizado (meses)	Coste total (€)
Ordenador	4	800	16.67	7	116.69
Licencia MATLAB	1	2000	166.67	7	1166.69
Total					1283.38

Tabla A.2: Costes de equipo técnico y software del laboratorio.

¹RoboLabo: <http://www.robolabo.etsit.upm.es/index.php>

Componente	Coste (€)
Péndulo	90
Nucleo-L476RG	14
X-Núcleo IHM04A1	13
Total	117

Tabla A.3: Costes de los componentes.

El coste total de este Trabajo de Fin de Grado es por tanto **10900.38 €**.

Apéndice B

Impacto social, económico y medioambiental

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado era desarrollar los aspectos del sistema presentado, el péndulo invertido rotacional, con la idea de que pudiera ser implementado en aulas y laboratorios en el ámbito de la enseñanza de ingeniería de control.

Por tanto, el **impacto social** de este proyecto incluye desde el personal docente y alumnos pertenecientes a este ámbito hasta cualquier persona interesada en los sistemas de control, que van a poder beneficiarse del desarrollo aquí realizado para implementar este sistema, con el objetivo de mejorar el aprendizaje.

Como se puede ver en el Anexo A, el precio de los componentes necesarios para reproducir el sistema es muy reducido. Por tanto, siguiendo con la línea anterior, este proyecto va a tener un **impacto económico** permitiendo la creación de nuevos puestos de laboratorio por un bajo precio sin renunciar a un sistema muy completo desde el punto de vista didáctico.

Por último, el **impacto medioambiental** de este proyecto se puede descomponer en el impacto de las cuatro etapas de vida de los componentes del sistema:

- **Producción:** El péndulo propiamente dicho es fabricado en China, y se desconoce su impacto de producción. Por otra parte, tanto el microcontrolador como la etapa de potencia han sido producidos por la empresa europea ST, que declara que el impacto de producción de dichos componentes es un 81 % del impacto total, y se debe principalmente a la emisión de gases y consumo de energía.
- **Distribución:** El péndulo debe ser transportado desde China, con el impacto que eso supone. Por el contrario, los productos de ST se fabrican en Europa, por lo que el impacto ambiental de distribución es muy bajo.
- **Uso:** Durante su vida útil, el único impacto del sistema es el consumo de electricidad durante su uso.
- **Fin de vida:** El péndulo está compuesto por piezas de metal y dos componentes electrónicos, el motor y el potenciómetro, por lo que puede reciclarse en su

totalidad. Esta situación es similar para el microcontrolador y la etapa de potencia.

Apéndice C

Desarrollo del modelo del péndulo en Simulink

Para simular los diferentes controladores en Simulink, primero se debe desarrollar un modelo del sistema a controlar (el péndulo rotacional invertido), para implementarlos en torno a él.

El sistema debe representar lo más fielmente posible al péndulo, por lo que se parte del desarrollo de la Sección 2.2, antes de cualquier simplificación.

A partir de las Ecuaciones 2.55 y 2.56, si se añaden los términos correspondientes a la fricción viscosa se obtiene:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2(\theta_2))\ddot{\theta}_1 + \alpha_3 \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \alpha_3 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \alpha_2 \sin(2\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + b_1\dot{\theta}_1 = \tau_m \quad (\text{C.1})$$

$$\alpha_3 \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + \alpha_2\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}\alpha_2 \sin(2\theta_2)\dot{\theta}_1^2 - \alpha_4 \sin(\theta_2) + b_2\dot{\theta}_2 = 0 \quad (\text{C.2})$$

Se despejan los términos de mayor orden:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{\beta} \left[-\frac{1}{2}\alpha_2 \alpha_3 \sin(2\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \alpha_2 \alpha_3 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 - \alpha_2^2 \sin(2\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \alpha_2 b_1 \dot{\theta}_1 + \alpha_3 \cos(\theta_2) b_2 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 \alpha_4 \sin(2\theta_2) + \alpha_2 \tau_m \right] \quad (\text{C.3})$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2}\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2(\theta_2)) \sin(2\theta_2) \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 \sin(2\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \alpha_2 \alpha_3 \sin(2\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \alpha_3 \cos(\theta_2) b_1 \dot{\theta}_1 - (\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2(\theta_2)) b_2 \dot{\theta}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2(\theta_2)) \alpha_4 \sin(\theta_2) - \alpha_3 \cos(\theta_2) \tau_m \right] \quad (\text{C.4})$$

donde $\beta = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 \sin^2(\theta_2) - \alpha_3^2 \cos^2(\theta_2)$.

A partir de estas dos últimas ecuaciones, y siguiendo como guía el artículo [15] se ha creado el sistema en Simulink. Los parámetros del péndulo contenidos en la Tabla 2.3 han sido introducidos a mano, y a partir de ellos se han obtenido los demás.

Lo mismo sucede con los parámetros del motor DC. El voltaje de entrada ha sido limitado a $\pm 12V$. Los términos correspondientes a la fricción viscosa se han supuesto cero para las simulaciones realizadas en este documento.

El sistema tiene dos entradas,

- V_{in} : Voltaje aplicado al motor.
- $\theta_2(0)$: Posición del péndulo en el instante inicial.

y cuatro salidas

- θ_1 : Posición angular del brazo 1.
- θ_2 : Posición angular del brazo 2.
- $\dot{\theta}_1$: Velocidad angular del brazo 1.
- $\dot{\theta}_2$: Velocidad angular del brazo 2.

En la Figura C.1 está representado el esquema de la implementación del péndulo en Simulink. Las cajas azules representan los parámetros propios del péndulo, las amarillas las entradas y las verdes las salidas.

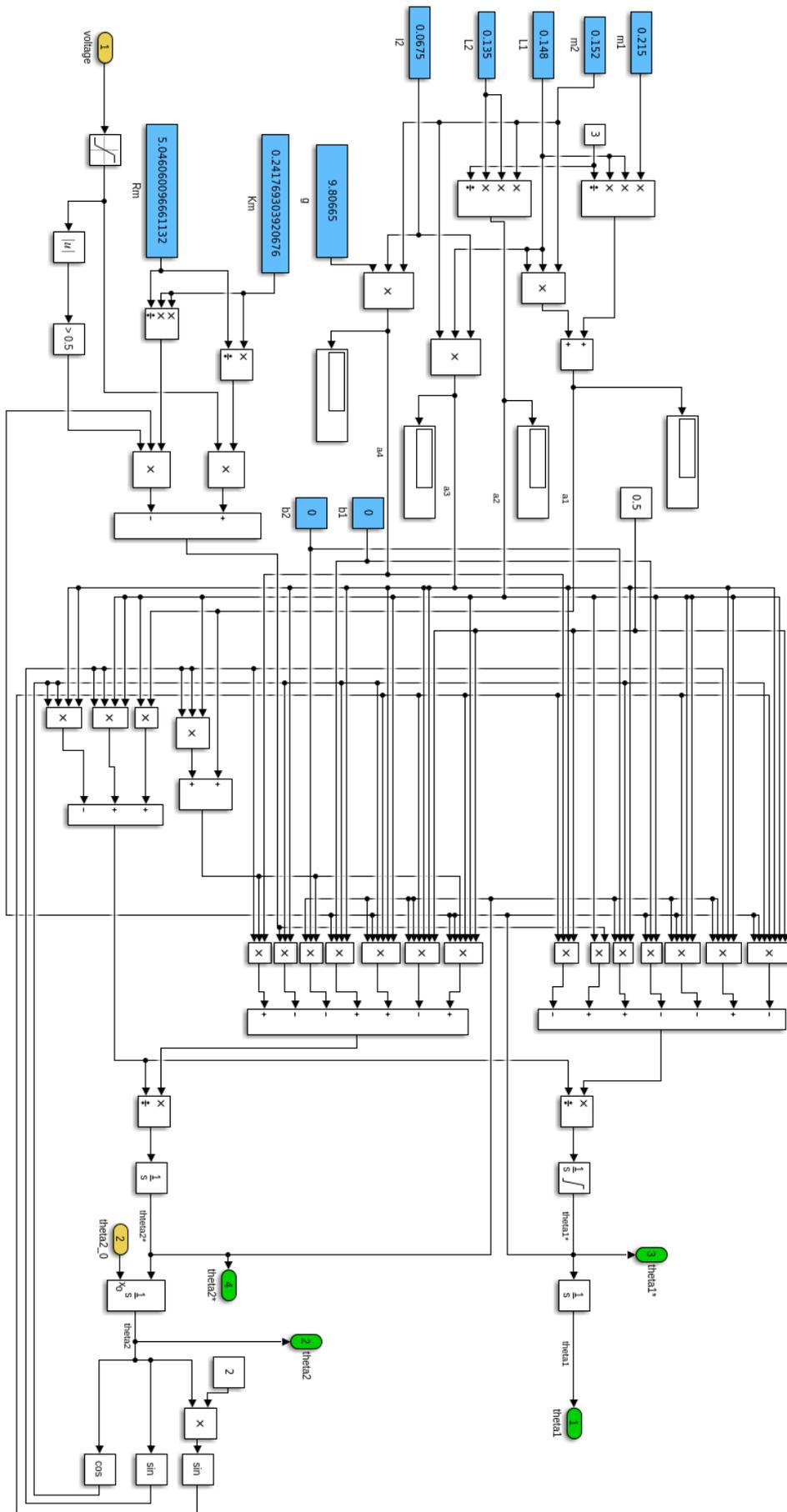


Figura C.1: Esquema de la implementación del péndulo en Simulink.

Apéndice D

Obtención del periodo de diferenciación ideal

La diferenciación es el equivalente a la derivación para señales discretas. Sea $x[n]$ la discretización de la señal $x(t)$ con un periodo entre muestras T_m , tal que $x[n] = x(nT)$, su derivada de primer orden en el instante n_0 se puede escribir como:

$$\dot{x}[n_0] = \frac{n[n_0] - n[n_0 - 1]}{T_m} \quad (\text{D.1})$$

El periodo de diferenciación T_d es el tiempo entre las dos muestras utilizadas para la diferenciación. En la Ecuación D.1, $T_d = T_m$. Sin embargo, esto no tiene por qué ser siempre así. Se puede escoger un periodo múltiplo de T_m , de la forma $T_d = kT_m$, con lo que la diferenciación sería:

$$\dot{x}[n_0] = \frac{n[n_0] - n[n_0 - k]}{kT_m} = \frac{n[n_0] - n[n_0 - k]}{T_d} \quad (\text{D.2})$$

donde k es un entero positivo.

Debido al error de muestreo y al límite de precisión numérica de los ordenadores, para periodos de muestreo y derivación bajos, las derivadas presentan problemas. Su valor es cero en la mayoría de los puntos, debido a que la señal no ha tenido tiempo de cambiar, mientras que en los puntos en los que cambia, al estar divididos por un número muy pequeño, tienden a ser muy grandes. Al aumentar k (y por tanto T_d) se deja pasar más tiempo entre muestras, de forma que la señal tiene más tiempo para variar su valor, por lo que se consiguen derivadas más suaves. Sin embargo, si aumenta demasiado, la derivada deja de ser un valor instantáneo y pasa a ser una media de los valores locales a ese punto, por lo que se puede perder información importante. Por ello, la elección de k no siempre es trivial.

En la implementación llevada a cabo en este proyecto, el microcontrolador toma muestras con un periodo $T_m = 1$. Sin embargo, diferenciar con dicho periodo produce señales con mucho ruido. Experimentalmente se ha visto que el mejor funcionamiento se consigue con T_d entre 10 ms y 20 ms. Por tanto, se han tomado muestras de los resultados obtenidos para el conjunto de valores $T_d = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ ms. En la tabla D.1 están recogidas la velocidad media y el error cuadrático medio obtenido

cuando el sistema intenta hacer la velocidad nula para dichos valores. Se puede observar que para $T_d = 18ms$ es cuando la velocidad total es menor, así como su error cuadrático medio, por lo que es el resultado que proporciona un mejor resultado.

T_d (ms)	Velocidad media (rad/s)	Error cuadrático medio
10	1.9800	3.1209
12	1.3256	2.2736
14	1.3198	2.8384
16	1.4521	1.4120
18	1.1517	1.088
20	1.5848	1.3351

Tabla D.1: Media y error cuadrático para los diferentes T_d .

Las Figuras D.1, D.2, D.3, D.4, D.5 y D.6 representan la velocidad durante este experimento, en las que también se puede observar que el mejor comportamiento es para $T_d = 18ms$.

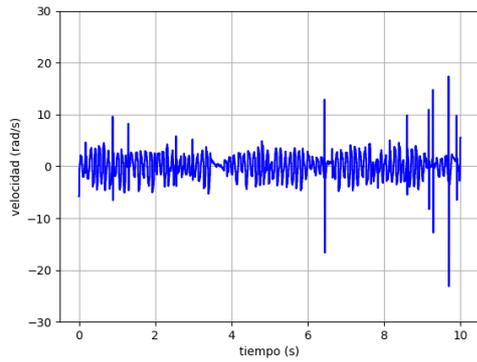


Figura D.1: Velocidad angular para $T_d = 10 \text{ ms}$.

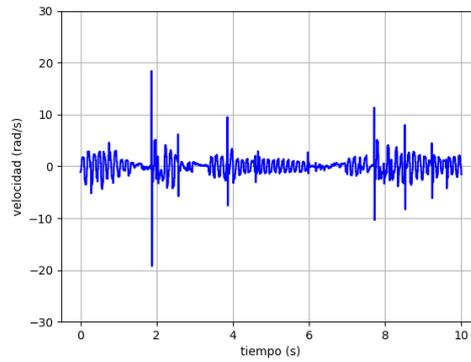


Figura D.2: Velocidad angular para $T_d = 12 \text{ ms}$.

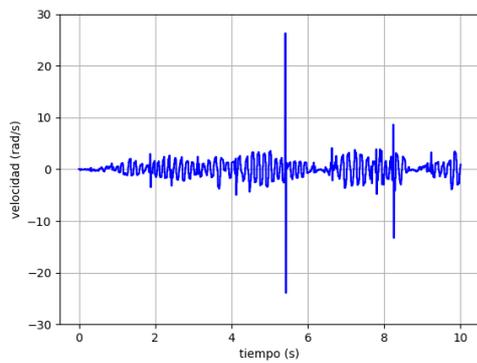


Figura D.3: Velocidad angular para $T_d = 14 \text{ ms}$.

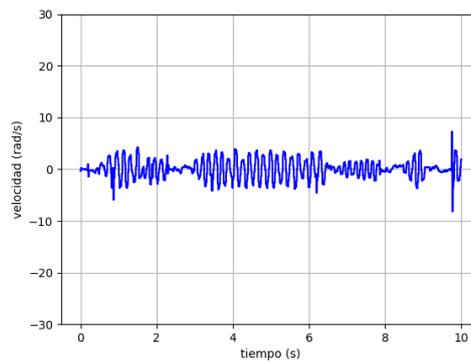


Figura D.4: Velocidad angular para $T_d = 16 \text{ ms}$.

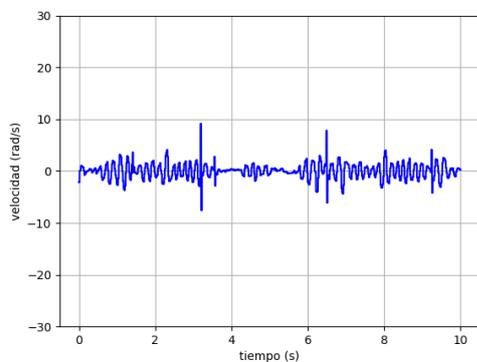


Figura D.5: Velocidad angular para $T_d = 18 \text{ ms}$.

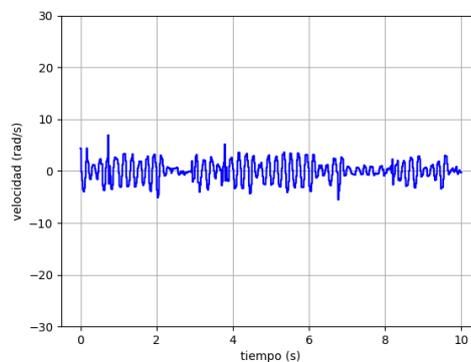


Figura D.6: Velocidad angular para $T_d = 20 \text{ ms}$.